Autovalores e Autovetores

Caracterização Matemática

Considere A = $[a_{jk}]$ uma matriz nxn. Considere também a seguinte equação vetorial:

$$Ax = \lambda x$$

Onde λ é um número.

Um valor de λ tal que x ≠ 0 seja uma solução do sistema é chamado de **autovalor** ou valor característico da matriz A.

As correspondentes soluções x ≠ 0 são chamadas de **autovetores** ou vetores característicos associados ao autovalor λ.

Problemas como este para determinação dos autovalores de uma matriz A são conhecidos como **problemas de autovalores**.

Autovalores e Autovetores

Determinação de autovalores e autovetores

Considere o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Transferindo os termos do lado direito para o lado esquerdo, temos:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Em notação matricial:

$$(A - \lambda I) \cdot x = 0$$

Autovalores e Autovetores

Esse sistema linear homogêneo de equações tem uma solução não trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes é zero. Assim:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

D(λ) é chamado de **determinante característico** e a equação acima de **equação característica** da matriz A.

Desenvolvendo D(λ) nós obtemos o polinômio de grau n em função de λ. Esse polinômio é conhecido como **polinômio característico** de A.

Autovalores e Autovetores

Teorema 1:

Os autovalores de uma matriz quadrada A são as raízes da correspondente equação característica.

A matriz A tem pelo menos um autovalor e no máximo n autovalores numericamente diferentes.

Os autovalores devem ser determinados primeiro. Com os autovalores determinados, os correspondentes autovetores são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares.

Teorema 2:

Se x é um autovetor da matriz A correspondente a um autovalor λ, kx, com $k \neq 0$, também é.

Autovalores e Autovetores

Exemplo:

Determinar os autovalores e autovetores da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Determinação dos autovalores

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -6$$

Autovalores e Autovetores

b) Determinação dos autovetores

$$\lambda = \lambda_1 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Para x_1 qualquer, $x_2 = 2x_1$. Por exemplo, $x_1 = 1$, então $x_2 = 2$. Um autovetor de A correspondente a $\lambda_1 = -1$ é:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \lambda_1 = -6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

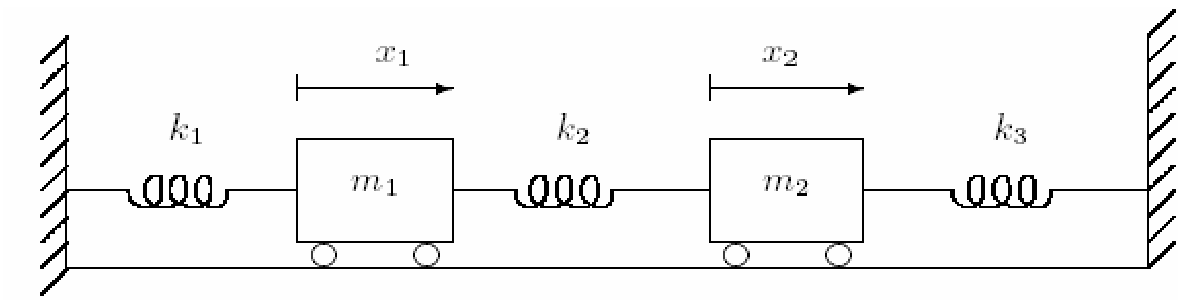
Solução: Para x_1 qualquer, $x_2 = -0.5 * x_1$. Por exemplo, $x_1 = 2$, então $x_2 = -1$. Um autovetor de A correspondente a $\lambda_1 = -6$ é:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Aplicações na Engenharia

a) Considere o movimento horizontal do conjunto massa mola mostrado na Figura abaixo:



As deflexões horizontais x_1 e x_2 são medidas relativamente à posição de equilíbrio estático. As molas possuem rigidez k_1, k_2 e k_3, que são as forças requeridas para estender ou comprimir cada mola de uma unidade de comprimento.

As equações de movimento são:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 (x_1 - x_2) + k_3 x_2$$

Autovalores e Autovetores

Se $x = (x_1,x_2)^t$ é o vetor deflexão, então podemos reescrever as equações acima na forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A \cdot x$$

Uma solução desta equação diferencial é dada por:

$$x = ve^{iwt}$$

Onde:

v é um vetor

$e^{iwt} = \cos(wt) + i \cdot \sin(wt)$, com $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Aqui, temos um problema de autovalor do tipo Ax = λx, onde $\lambda = -\omega^2$. Os possíveis valores de ω são as freqüências naturais que o sistema pode assumir.

Autovalores e Autovetores

b) A curvatura de uma coluna delgada sujeita a uma carga *P* pode ser modelada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Onde:

$\frac{d^2y}{dx^2}$ é a curvatura

M é o momento de curvatura

E é o módulo de elasticidade

I é o momento de inércia da seção transversal sobre o eixo neutro

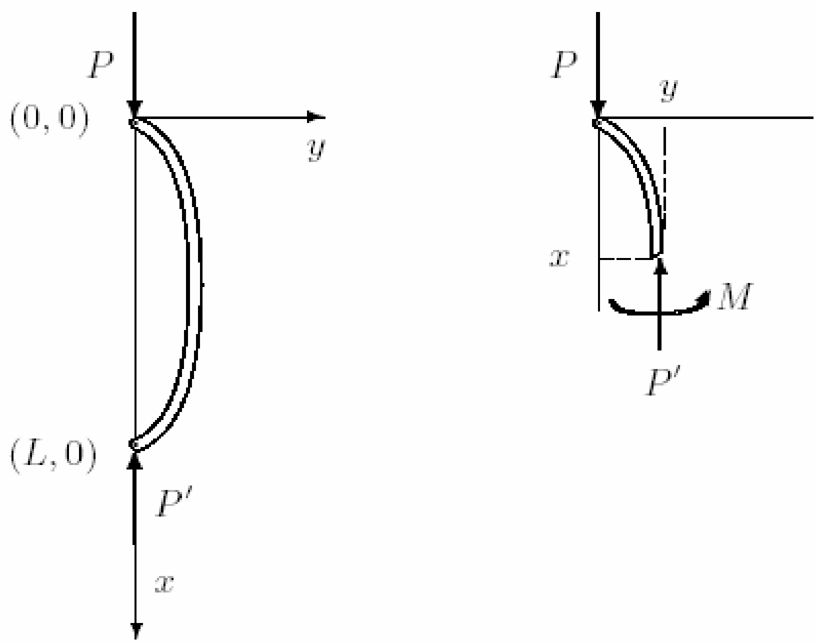
Autovalores e Autovetores

Considerando o corpo livre na Figura abaixo, o momento de curvatura em x é M = -Py. Então:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0$$

Onde:

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$



Autovalores e Autovetores

Para esse sistema, sujeita às condições de contorno y(0) = y(L) = 0, a solução geral é dada por:

$$y = A\sin(px) + B\cos(px)$$

onde A e B são constantes arbitrárias que devem ser obtidas usando-se as condições de contorno.

Assim, se y(0) = 0 obtêm-se B = 0 e se y(L) = 0 obtêm-se A sin(pL) = 0.

Mas desde que A = 0 representa a solução trivial, concluímos que sin(pL) = 0. Assim, para que esta última igualdade seja válida devemos ter:

$$pL = n\pi, n = 1,2,\ldots$$

Portanto, existe um número infinito de valores que satisfazem as condições de contorno. A equação anterior pode ser resolvida para:

$$p = \frac{n\pi}{L}, n = 1,2,\ldots$$

os quais são os **autovalores** para a coluna. Cada autovalor corresponde ao modo nos quais a coluna curva-se.

Autovalores e Autovetores

Combinando as equações anteriores, segue que:

$$p = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, n = 1, 2, \ldots$$

Isto pode ser entendido como uma deformação da carga porque elas representam os níveis nos quais as colunas movimentam-se em cada deformação sucessiva. Na prática, em geral, o autovalor correspondente a n = 1 é o de interesse porque a quebra usualmente ocorre quando a primeira coluna se deforma. Assim, a **carga crítica** pode ser definida como:

$$p_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Autovalores e Autovetores

Soluções Numéricas

Nosso objetivo é apresentar métodos numéricos para a determinação dos autovalores e correspondentes autovetores de uma matriz A de ordem n.

A menos que a matriz seja de ordem baixa ou que tenha muitos elementos iguais a zero, a expansão direta do determinante para a determinação do polinômio característico é ineficiente.

Assim os métodos numéricos que estudaremos são obtidos sem fazer uso do cálculo do determinante. Tais métodos podem ser divididos em três grupos:

a) Métodos que determinam o polinômio característico;
b) Métodos que determinam alguns autovalores;
c) métodos que determinam todos os autovalores.

Nos dois últimos casos determinamos os autovalores sem conhecer a expressão do polinômio característico.

Autovalores e Autovetores

Observações:

1) Em relação aos métodos do grupo a), uma vez determinado o polinômio característico de A, para calcular os autovalores devemos utilizar métodos numéricos para determinação de **zeros de função**. Nessa classe encontram-se, entre outros, os métodos de **Leverrier** e **Leverrier-Faddeev**.

2) Os métodos do grupo b), chamados iterativos, são usados se não estamos interessados em todos os autovalores de A.

Autovalores e Autovetores

Métodos que determinam o polinômio característico

Teorema de Newton: Seja o polinômio:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

cujas raízes são: x_1, x_2, ..., x_n. Seja ainda:

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad 1 \leq k \leq n$$

Então:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i} + k a_k = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

Através desse teorema vemos que existe uma relação entre os coeficientes de um polinômio e as somas das potências das suas raízes.

Assim, conhecidas as somas das potências das raízes do polinômio podemos determinar os coeficientes do mesmo.

Autovalores e Autovetores

Exemplo: Sejam s_1 = 6, s_2 = 14, s_3 = 36 as somas das potências das raízes de um polinômio P(x). Determinar P(x).

$$k = 1 \Rightarrow a_0 s_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0 s_1$$

$$k = 2 \Rightarrow a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow 2a_2 = -a_0 s_2 - a_1 s_1$$

$$k = 3 \Rightarrow a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow 3a_3 = -a_0 s_3 - a_1 s_2 - a_2 s_1$$

Tomando o coeficiente do termo de maior grau do polinômio igual a 1, isto é, fazendo a_0 = 1, obtemos por substituição nas expressões anteriores que:

$$a_1 = -6 \qquad a_2 = 11 \qquad a_1 = 6$$

O polinômio procurado é:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Para os métodos numéricos descritos a seguir usaremos a seguinte notação para o polinômio característico de uma matriz A, de ordem n:

$$P(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1} \lambda - p_n\right]$$

Autovalores e Autovetores

Método de Leverrier

Esse método fornece o polinômio característico de uma matriz A de ordem n.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ são os autovalores da matriz A, isto é, se $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ são os zeros do polinômio e se

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

então, pelo Teorema de Newton, temos que:

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-1} s_1, \qquad 1 \leq k \leq n$$

Portanto, se conhecermos os s_k, poderemos determinar os coeficientes $p_1, p_2, ..., p_n$ de $P(\lambda)$.

Fazendo expansão direta do determinante de $A - \lambda I$ e usando o Teorema de Newton, tem-se que

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Ou seja:

$$s_1 = p_1 = tr(A)$$

A soma dos autovalores de A é igual ao traço de A.

Autovalores e Autovetores

Então, desde que os autovalores de A^k são a $k^{\underline{a}}$ potência dos autovalores de A, temos:

$$s_k = tr(A^k)$$

Assim os números s_1, s_2, ..., s_n são obtidos através do cálculo das potências de A. Essas potências podem ser usadas para determinar os coeficientes do polinômio característico.

Determina-se as raízes desse polinômio por qualquer dos métodos numéricos estudados em **zero de funções**, obtendo-se os **autovalores de A**.

Exemplo: Seja a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar seus autovalores usando o Método de Leverrier.

Autovalores e Autovetores

$$s_1 = tr(A) = 1$$

$$s_2 = tr(A^2), \quad A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; s_2 = 5$$

$$s_3 = tr(A^3), \quad A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; s_3 = 1$$

$$p_1 = s_1 \Rightarrow p_1 = 1$$

$$2p_2 = s_2 - p_1 s_1 \Rightarrow p_2 = 2$$

$$3p_3 = s_3 - p_1 s_2 - p_2 s_1 \Rightarrow p_3 = -2$$

Assim:

$$P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3)$$

$$P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2$$

Calcular o Zero

Autovalores e Autovetores

Métodos que determinam alguns autovalores

Método das Potências

Consiste em determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz A, e seu correspondente autovetor, sem determinar o polinômio característico.

O método é útil na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas alguns autovalores, de módulo grande, e, que estes estejam bem separados, em módulo, dos demais.

Podem surgir complicações caso a matriz A não possua autovetores linearmente independentes.

O método das potências baseia-se no teorema a seguir.

Autovalores e Autovetores

Teorema:

Seja A uma matriz real de ordem n e sejam λ_1, λ_2,..., λ_n seus autovalores e u_1, u_2, ..., u_m seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são linearmente independentes, e que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

Seja ainda a seqüência y_k definida por:

$$y_{k+1} = Ay_k, \quad \mathrm{k} = 0,1,2,\ldots$$

onde y_0 é um vetor arbitrário, que permite a expansão:

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_i u_j \longrightarrow \text{Combinação Linear}$$

com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$$

onde o índice r indica a r-ésima componente. Além disso, quando $k \to \infty$, y_k tende ao autovetor correspondente a λ_1.

Autovalores e Autovetores

Observações:

a) No limite, todas as componentes de $(z_{k+1})_r/(y_k)_r$ tendem a 1. Entretanto, na prática, uma das componentes converge mais rapidamente do que as outras. Assim, quando uma das componentes satisfizer a precisão desejada teremos o autovalor procurado. Além disso, a velocidade de convergência depende de λ_2/λ_1. Portanto, quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência;

b) Para obtermos λ_1 com uma precisão , em cada passo calculamos aproximações para λ_1 usando a equação anterior. O teste do erro relativo usado como critério de parada para cada componente de λ_1 é:

$$\frac{\left|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}\right|_r}{\left|\lambda_1^{(k+1)}\right|_r} < \varepsilon$$

c) Quando todas as componentes da equação anterior forem iguais, então o vetor y_k dessa iteração é o autovetor correspondente ao autovalor λ_1;

Autovalores e Autovetores

d) Se algum vetor resultar no vetor nulo, o método falha. Tal acontecimento deve ocorrer se as hipóteses não foram satisfeitas;

e) No Teorema é feita a hipótese de $c_1 \neq 0$. Se $c_1 = 0$, então a prova do Teorema indica que, teoricamente, o vetor y_k converge. Entretanto, na prática, para matrizes de ordem $n \geq 3$, que satisfaçam as demais condições do citado teorema, o método funciona sempre.

Conseqüências do Teorema:

A partir de um vetor y_k, arbitrário, não nulo, construímos dois outros vetores y_{k+1} e z_{k+1}, do seguinte modo:

$$z_{k+1} = Ay_k$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}$$

Onde:

$$\alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} \left|(z_{k+1})_r\right|$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo:

Usando o método das potências determinar o autovalor de maior valor absoluto da seguinte matriz com precisão de 10^{-2}:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução:

Tomemos o seguinte valor para y_0:

$$y_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Assim:

$$z_1 = Ay_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \max\left|(z_1)_r\right| = \max(|4|,|6|,|11|) = 11$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 0.3636 \\ 0.5455 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = Ay_1 = \begin{pmatrix} 2.0908 \\ 3.8182 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

Podemos, então, calcular a primeira aproximação para λ_1.

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 5.7503 \\ 6.9995 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

Calculando-se o valor de α_2, temos:

$$\alpha_2 = \max\left|(z_2)_r\right| = \max(|2.0908|,|3.8182|,|7.5454|) = 7.5454$$

Autovalores e Autovetores

Assim:

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 0.2771 \\ 0.5060 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = A y_2 = \begin{pmatrix} 1.8313 \\ 3.5662 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

Novamente obtemos uma aproximação para λ_1.

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 6.6088 \\ 7.0478 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

Calculando-se o erro relativo, temos:

$$\frac{\left|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}\right|_r}{\left|\lambda_1^{(2)}\right|_r} \approx \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.07 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

O qual possui todas as componentes maiores que 10^{-2}. Assim, devemos fazer uma nova iteração.

Autovalores e Autovetores

Observações:

a) É claro que se desejamos λ_1 com precisão maior basta continuar fazendo iterações;

b) O método das potências deve ser aplicado se o objetivo é determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz. A desvantagem desse método é que ele fornece apenas um autovalor de cada vez. Se todos os autovalores são procurados devemos aplicar outros métodos que são muito mais eficientes;

c) Algumas vezes o maior autovalor, em módulo, é o mais importante. No entanto, em alguns problemas, o mais importante é a determinação do autovalor de menor valor absoluto.

Autovalores e Autovetores

Método da Potência Inversa

É usado para determinar o autovalor de menor valor absoluto e seu correspondente autovetor de uma matriz A.

O método é útil na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas o autovalor, de menor módulo, e, que este esteja bem separado dos demais.

Novamente, o método pode não funcionar caso a matriz A não possua autovetores linearmente independentes.

O método da potência inversa é semelhante ao método das potências, com a diferença que agora assumimos:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$$

E desejamos calcular λ_n.

Sabemos que se λ é autovalor de A, então λ^{-1} é autovalor de A^{-1}. Além disso, se $|\lambda_n|$ é o menor autovalor de A, então $|\lambda_n|$ é o maior autovalor de A^{-1}.

Autovalores e Autovetores

Assim, o método da potência inversa consiste em calcular pelo método das potências o autovalor de maior valor absoluto de A^{-1}, pois assim teremos o menor autovalor, em módulo, de A.

Portanto, dado y_k, construímos dois outros vetores y_{k+1} e z_{k+1} da seguinte forma:

$$z_{k+1} = A^{-1} y_k$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}$$

Onde:

$$\alpha_{k+1} = \max_{1 \le r \le n} \left| (z_{k+1})_r \right|$$

E, portanto:

$$\lambda_n^{-1} = \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r}$$

Autovalores e Autovetores

Note que na prática não é necessário calcular A^{-1}, pois de:

$$z_{k+1} = A^{-1} y_k \Rightarrow A z_{k+1} = y_k$$

Exemplo:

Usando o Método da Potência Inversa, determinar o menor autovalor, em módulo, da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Solução:

Tomemos o seguinte valor para y_0:

$$y_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Assim:

$$Az_1 = y_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} z_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow z_1 = \begin{Bmatrix} 0.5715 \\ -0.1429 \\ 0.1905 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \max\left|(z_1)_r\right| = 0.5715$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2500 \\ 0.3333 \end{pmatrix}$$

$$Az_2 = y_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} z_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.2500 \\ 0.3333 \end{Bmatrix} \Rightarrow z_2 = \begin{Bmatrix} 0.7024 \\ -0.4048 \\ 0.1230 \end{Bmatrix}$$

Podemos, então, calcular a primeira aproximação para a inversa de λ.

$$\lambda^{-1} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ 1.6192 \\ 0.3690 \end{pmatrix}$$

Calculando-se o valor de α_2, temos:

$$\alpha_2 = \max\left|(z_2)_r\right| = 0.7024$$

Autovalores e Autovetores

Assim:

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5763 \\ 0.1751 \end{pmatrix}$$

$$Az_3 = y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} z_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5763 \\ 0.1751 \end{Bmatrix} \Rightarrow z_3 = \begin{Bmatrix} 0.7377 \\ -0.4754 \\ 0.1084 \end{Bmatrix}$$

Novamente obtemos uma aproximação para a inversa de λ.

$$\lambda^{-1} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ 0.8249 \\ 0.6192 \end{pmatrix}$$

Prosseguindo, encontra-se que a $\lambda^{-1} = 0.7471$. Logo, o valor $\lambda = 1.3385$ é o autovalor de menor valor absoluto de A.