

Capítulo 7

Determinação Numérica de Auto-Valores e Auto-Vetores

7.1 Introdução

Auto-valores e auto-vetores estão presentes em diferentes ramos da matemática incluindo formas quadráticas, sistemas diferenciais; problemas de otimização não linear, e podem ser usados para resolver problemas de diversos campos, como economia, teoria da informação, análise estrutural, eletrônica, teoria de controle e muitos outros.

Nosso objetivo nesse capítulo é apresentar métodos numéricos para a determinação dos auto-valores e correspondentes auto-vetores de uma matriz A de ordem n . Sugerimos ao leitor rever a seção sobre auto-valores e auto-vetores dada no Capítulo 1. A menos que a matriz seja de ordem baixa ou que tenha muitos elementos iguais a zero, a expansão direta do determinante para a determinação do polinômio característico, ver exemplo 1.22, é ineficiente. Assim os métodos numéricos que estudaremos são obtidos sem fazer uso do cálculo do determinante. Tais métodos podem ser divididos em três grupos:

- i) métodos que determinam o polinômio característico,
- ii) métodos que determinam alguns auto-valores,
- iii) métodos que determinam todos os auto-valores.

Nos dois últimos casos determinamos os auto-valores sem conhecer a expressão do polinômio característico.

Em relação aos métodos do grupo **i)**, uma vez determinado o polinômio característico de A , para calcular os auto-valores devemos utilizar métodos numéricos para determinação de zeros de polinômio, (ver Capítulo 3). Nessa classe encontram-se, entre outros, os métodos de Leverrier e Leverrier-Faddeev.

Os métodos do grupo **ii)**, chamados iterativos, são usados se não estamos interessados em todos os auto-valores de A . Incluem-se nessa classe os métodos das potências, potência inversa.

Em relação aos métodos do grupo **iii)**, podemos dividi-los em duas classes:

- a) métodos numéricos para matrizes simétricas,
- b) métodos numéricos para matrizes não simétricas.

Na classe **a)**, inclui-se entre outros, o método de Jacobi, o qual reduz uma dada matriz simétrica numa forma especial, cujos auto-valores são facilmente determinados. Entre os métodos da classe **b)** podemos citar os métodos de Rutishauser (método LR) e o de Francis (método QR) os quais transformam a

matriz dada numa matriz triangular superior. Todos os métodos do grupo **iii)** fazem uso de uma série de transformações de similaridade e assim são algumas vezes referenciados como métodos de transformações ou métodos diretos.

Maiores detalhes sobre essas técnicas, bem como sobre a teoria desses métodos podem ser encontradas em [Wilkinson,1965].

Descreveremos e exemplificaremos cada um dos métodos numéricos mencionados acima, iniciando com aqueles que determinam o polinômio característico. Antes porém precisamos do seguinte resultado.

Teorema 7.1 - (*Teorema de Newton*) - *Seja o polinômio:*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n ,$$

cujas raízes são: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Seja ainda:

$$s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \quad , \quad 1 \leq k \leq n ,$$

então:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{k-i} + k a_k = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n .$$

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em [Jennings,19..].

Através desse teorema vemos que existe uma relação entre os coeficientes de um polinômio e as somas das potências das suas raízes. Assim, conhecidas as somas das potências das raízes do polinômio podemos determinar os coeficientes do mesmo.

Exemplo 7.1 - *Sejam $s_1 = 6$, $s_2 = 14$, $s_3 = 36$ as somas das potências das raízes de um polinômio $P(x)$. Determinar $P(x)$.*

Solução: Pelo teorema 7.1, temos:

$$\begin{aligned} k=1 &\Rightarrow a_0 s_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0 s_1 \\ k=2 &\Rightarrow a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow 2a_2 = -a_0 s_2 - a_1 s_1 \\ k=3 &\Rightarrow a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3a_3 = -a_0 s_3 - a_1 s_2 - a_2 s_1 \end{aligned}$$

Tomando o coeficiente do termo de maior grau do polinômio igual a 1, isto é, fazendo $a_0 = 1$, obtemos por substituição nas expressões anteriores que:

$$a_1 = -6 \quad , \quad a_2 = 11 \quad , \quad a_3 = 6 .$$

Portanto, o polinômio procurado é:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 .$$

Logo, o conhecimento dos $s_k, k = 1, \dots, n$, proporciona a determinação dos $a_k, k = 1, 2, \dots, n$. Observe que nesse exemplo as raízes do polinômio são: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.

Para os métodos numéricos descritos a seguir usaremos a seguinte notação para o polinômio característico de uma matriz A , de ordem n :

$$P(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_{n-1} \lambda - p_n] . \quad (7.1)$$

7.2 Método de Leverrier

O **Método de Leverrier** fornece o polinômio característico de uma matriz A de ordem n .

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os auto-valores da matriz A , isto é, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os zeros do polinômio (7.1) e se

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

então, pelo Teorema 7.1, temos:

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1} s_1, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (7.2)$$

Portanto, se conhecermos os $s_k, 1 \leq k \leq n$, poderemos determinar os coeficientes $p_1, p_2, \dots, p_n$ de $P(\lambda)$.

Vejamos então como determinar as somas parciais s_k . Fazendo expansão direta do determinante de $A - \lambda I$, o coeficiente de λ^{n-1} em $P(\lambda)$ é $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$. Por outro lado esse mesmo coeficiente em (7.1) é $(-1)^{n-1}p_1$. Logo devemos ter:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

A soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz A é conhecida como **traço** de A , cuja notação é $tr(A)$. Além disso, de (7.2), $s_1 = p_1$, e assim:

$$s_1 = tr(A),$$

isto é, a soma dos auto-valores da matriz A é igual ao traço de A .

Então, desde que os auto-valores de A^k são a k ª potência dos auto-valores de A , (ver exercício 1.26), temos:

$$s_k = tr(A^k).$$

Assim os números $s_1, s_2, \dots, s_n$ são obtidos através do cálculo das potências de A , e (7.2) pode ser usada para determinar os coeficientes do polinômio característico. Determinando as raízes desse polinômio por qualquer dos métodos numéricos estudados no Capítulo 3, obtemos os auto-valores de A .

Exemplo 7.2 - Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar seus auto-valores usando o Método de Leverrier.

Solução: Temos:

$$s_1 = tr(A) = 3,$$

$$s_2 = tr(A^2), \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow s_2 = 3,$$

$$s_3 = tr(A^3), \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow s_3 = -3.$$

Usando (7.2), obtemos:

$$\begin{aligned} p_1 &= s_1 \Rightarrow p_1 = 1, \\ 2p_2 &= s_2 - p_1 s_1 \Rightarrow p_2 = 2, \\ 3p_3 &= s_3 - p_1 s_2 - p_2 s_1 \Rightarrow p_3 = -2. \end{aligned}$$

De (7.1), segue que:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-1)^3(\lambda^3 - p_1 \lambda^2 - p_2 \lambda - p_3) \\ &= (-1)^3(\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Para determinar os auto-valores de A basta determinar os zeros de $P(\lambda)$. É fácil verificar que $\lambda = 1$ é uma raiz de $P(\lambda)$. Usando o algoritmo de Briot-Ruffini-Horner, (Capítulo 3), obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 1 & 2 & -2 \\ \hline 1 & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Assim, $P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2)$. Logo os auto-valores de A são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

Exercícios

7.1 - Usando o método de Leverrier, determinar o polinômio característico e os auto-valores do operador $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por:

$$T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z).$$

7.2 -Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinar seu polinômio característico e seus auto-valores pelo processo de Leverrier.

7.3 Método de Leverrier-Faddeev

Uma modificação do método de Leverrier, devida a Faddeev, simplifica os cálculos dos coeficientes do polinômio característico e fornece, em alguns casos, os auto-vetores de A . Tal método é conhecido por **Método de Leverrier-Faddeev**.

Para descrever tal método, definimos uma sequência de matrizes:

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

do seguinte modo:

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \quad q_1 = \text{tr} A_1, \quad B_1 = A_1 - q_1 I; \\ A_2 &= AB_1, \quad q_2 = \frac{\text{tr} A_2}{2}, \quad B_2 = A_2 - q_2 I, \\ A_3 &= AB_2, \quad q_3 = \frac{\text{tr} A_3}{3}, \quad B_3 = A_3 - q_3 I; \\ &\vdots \\ A_n &= AB_{n-1}, \quad q_n = \frac{\text{tr} A_n}{n}, \quad B_n = A_n - q_n I. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Propriedades da sequência: $A_1, A_2, \dots, A_n$

1ª) Os termos q_k obtidos na sequência (7.3), são os coeficientes do polinômio característico (7.1), isto é:

$$q_k = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Prova: A prova será feita por indução.

a) Desde que $A = A_1$, segue que: $q_1 = \text{tr}(A_1) = \text{tr}(A) = p_1$.

b) Suponhamos que: $q_i = p_i, i = 1, 2, \dots, k-1$.

c) Provemos que: $q_k = p_k$. Por (7.3), temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \\ A_2 &= AB_1 = A(A_1 - q_1 I) = A(A - q_1 I) = A^2 - q_1 A, \\ A_3 &= AB_2 = A(A_2 - q_2 I) = A(A^2 - q_1 A - q_2 I) \\ &= A^3 - q_1 A^2 - q_2 A, \\ &\vdots \\ A_k &= AB_{k-1} = A(A_{k-1} - q_{k-1} I) \\ &= A^k - q_1 A^{k-1} - q_2 A^{k-2} - \dots - q_{k-1} A. \end{aligned}$$

Desde que $q_i = p_i, i = 1, 2, \dots, k-1$, (hipótese de indução), obtemos:

$$A_k = A^k - p_1 A^{k-1} - p_2 A^{k-2} - \dots - p_{k-1} A. \quad (7.4)$$

Aplicando traço em ambos os membros da igualdade (7.4), segue que:

$$\text{tr}(A_k) = \text{tr}(A^k) - p_1 \text{tr}(A^{k-1}) - p_2 \text{tr}(A^{k-2}) - \dots - p_{k-1} \text{tr}(A).$$

Agora, desde que $s_i = \text{tr}(A^i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, e, por (7.3) $q_k = \frac{\text{tr}(A_k)}{k}$, obtemos:

$$kq_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \dots - p_{k-2} s_2 - p_{k-1} s_1. \quad (7.5)$$

Comparando (7.5) com (7.2), obtemos:

$$q_k = p_k,$$

o que completa a prova.

2ª) Se A é uma matriz de ordem n , então:

$$B_n = \theta \quad (\text{matriz nula}).$$

Prova: Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, (Teorema 1.8), temos:

$$A^n - p_1 A^{n-1} - \dots - p_{n-1} A - p_n I = \theta.$$

Mas, por (7.3), e usando a 1ª propriedade, segue que:

$$B_n = A_n - p_n I.$$

Fazendo $k = n$ em (7.4) e substituindo o valor de A_n , na expressão anterior, obtemos:

$$B_n = A^n - p_1 A^{n-1} - \dots - p_{n-2} A^2 - p_{n-1} A - p_n I = \theta.$$

3ª) Se A é uma matriz não singular, de ordem n , então:

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1} .$$

Prova: De $B_n = \theta$ e $B_n = A_n - p_n I$, temos:

$$A_n = p_n I .$$

Mas, por (7.3),

$$A_n = AB_{n-1} .$$

Logo:

$$AB_{n-1} = p_n I .$$

Se A é não singular então existe A^{-1} . Assim, pré-multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por A^{-1} , segue que:

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n} B_{n-1} .$$

Observações:

- Com o método de Leverrier-Faddeev, obtemos o polinômio característico de A . Para determinar seus auto-valores basta determinar os zeros de $P(\lambda)$.
- Se ao fazer os cálculos B_n resultar numa matriz diferente da matriz nula, você terá cometido erros de cálculo.
- Como $B_n = \theta$ e como $B_n = A_n - p_n I$ então A_n é uma matriz diagonal com todos os elementos não nulos iguais a p_n .
- Se A é singular então $p_n = 0$. Nesse caso $\lambda = 0$ é um auto-valor de A .

Cálculo dos Auto-Vetores

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ auto-valores distintos de A . Mostraremos a seguir que cada coluna não nula da matriz:

$$Q_k = \lambda_k^{n-1} I + \lambda_k^{n-2} B_1 + \dots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1} , \quad (7.6)$$

é um auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_k .

Observações:

- Em (7.6), $B_i, i = 1, \dots, n-1$, são as matrizes calculadas para a determinação dos coeficientes do polinômio característico, isto é, são as matrizes obtidas em (7.3), e λ_k é o k -ésimo auto-valor de A .
- Pode-se provar que Q_k é matriz não nula se os auto-valores de A são distintos.
- Pode ocorrer que mesmo com λ_i iguais a matriz Q_k não seja nula.

Provemos agora que cada coluna não nula de Q_k é um auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_k . Temos:

$$\begin{aligned} (\lambda_k I - A) Q_k &= (\lambda_k I - A) (\lambda_k^{n-1} I + \lambda_k^{n-2} B_1 + \dots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1}) \\ &= \lambda_k^n I + \lambda_k^{n-1} (B_1 - A) + \lambda_k^{n-2} (B_2 - AB_1) + \dots \\ &\quad + \lambda_k (B_{n-1} - AB_{n-2}) - AB_{n-1} \\ &= \lambda_k^n I - p_1 \lambda_k^{n-1} I - p_2 \lambda_k^{n-2} I - \dots - p_{n-1} \lambda_k I - p_n I = \theta , \end{aligned}$$

desde que λ_k é auto valor de A e portanto é raiz do polinômio característico. Assim, acabamos de mostrar que:

$$AQ_k = \lambda_k Q_k ,$$

Portanto, construídas as matrizes B_i e determinados todos os auto-valores da matriz A , para obter os auto-vetores correspondentes ao auto-valor λ_k basta calcular a matriz Q_k usando (7.6). Entretanto, observe que se u é alguma coluna não nula de Q_k , então, podemos escrever que:

$$Au = \lambda_k u .$$

isto é, u é auto-vetor de A correspondente ao auto-valor λ_k . Assim, ao invés de determinarmos a matriz Q_k , é muito mais vantajoso calcularmos apenas uma coluna u de Q_k , da seguinte maneira: Fazemos,

$$\begin{aligned} u_0 &= e \\ u_i &= \lambda_k u_{i-1} + b_i , \quad i = 1, 2, \dots, n-1 , \end{aligned} \tag{7.7}$$

onde e é uma coluna adotada da matriz identidade e b_i é sua correspondente coluna da matriz B_i , isto é, se adotamos e como sendo a i -ésima coluna da matriz identidade então $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ em (7.7) serão, respectivamente, a i -ésima coluna das matrizes $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$. Logo, $u = u_{n-1}$ é o auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_k . Note que em (7.7), i varia de 1 até $n-1$ pois $B_n = \theta$.

Observe que se calcularmos até u_{n-1} e este resultar no vetor nulo, devemos adotar outra coluna da matriz identidade e refazer os cálculos, pois por definição o auto-vetor é um vetor não nulo.

Exemplo 7.3 - Considere a matriz dada no exemplo 7.2. Usando o método de Leverrier-Faddeev, determinar:

- a) seu polinômio característico,
- b) seus auto-valores e correspondentes auto-vetores,
- c) sua inversa.

Solução:

- a) Para determinar o polinômio característico devemos construir a sequência A_1, A_2, A_3 . Assim,

usando (7.3), obtemos:

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \text{tr}(A_1) \Rightarrow p_1 = 1,$$

$$B_1 = A_1 - p_1 I \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = AB_1 \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \frac{\text{tr}(A_2)}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{4}{2} \Rightarrow p_2 = 2,$$

$$B_2 = A_2 - p_2 I \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = AB_2 \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \frac{\text{tr}(A_3)}{3} \Rightarrow p_3 = \frac{-6}{3} \Rightarrow p_3 = -2,$$

$$B_3 = A_3 - p_3 I \Rightarrow B_3 = \theta.$$

Usando (7.1), segue que:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-1)^3 (\lambda^3 - p_1 \lambda^2 - p_2 \lambda - p_3) \\ &= (-1)^3 (\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Para determinar os auto-valores de A basta determinar os zeros de $P(\lambda)$. Já fizemos esses cálculos no exemplo 7.2, e obtivemos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

b) Determinemos agora os auto-vetores correspondentes a esses auto-valores.

b.1) Para $\lambda_1 = 1$, seja $e = (1, 0, 0)^t$. Assim:

$$u_0 = e \Rightarrow u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \lambda_1 u_0 + b_1 \Rightarrow u_1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \lambda_1 u_1 + b_2 \Rightarrow u_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Logo $u = (0, -1, -1)^t$ é um auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_1 = 1$.

Observe que se adotamos $e = (0, 1, 0)^t$ obtemos $u_2 = (0, -1, -1)^t$ que é auto-vetor de A correspondente ao auto-valor $\lambda_1 = 1$; mas se adotamos $e = (0, 0, 1)^t$ obtemos $u_2 = (0, 0, 0)^t$ e assim com esse vetor inicial não obtemos uma resposta válida.

b.2) Para $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, seja $e = (1, 0, 0)^t$. Assim,

$$\begin{aligned} u_0 &= e \Rightarrow u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ u_1 &= \lambda_2 u_0 + b_1 \Rightarrow u_1 = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= \lambda_2 u_1 + b_2 \Rightarrow u_2 = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo $u = (1, -1, \sqrt{2})^t$ é um auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Novamente, observe que se adotamos $e = (0, 1, 0)^t$ obtemos $u_2 = (-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2})^t$, enquanto que $e = (0, 0, 1)^t$ fornece $u_2 = (1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})^t$. Ambos são auto-vetores de A correspondentes ao auto-valor $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

b.3) Para $\lambda_3 = \sqrt{2}$, seja $e = (1, 0, 0)^t$. Assim:

$$\begin{aligned} u_0 &= e \Rightarrow u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ u_1 &= \lambda_3 u_0 + b_1 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= \lambda_3 u_1 + b_2 \Rightarrow u_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo $u = (1, -1, -\sqrt{2})^t$ é um auto-vetor correspondente ao auto-valor $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

Observe que se adotamos $e = (0, 1, 0)^t$ obtemos $u_2 = (-1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})^t$, enquanto que $e = (0, 0, 1)^t$ fornece $u_2 = (1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})^t$. Novamente, ambos são auto-vetores de A correspondentes ao auto-valor $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

Finalmente observe que para cada auto-valor λ_k , a escolha do vetor inicial produz exatamente a coluna correspondente da matriz Q_k . Entretanto, como pode ser observado nesse exemplo, não é necessário calcular todas as colunas da matriz Q_k , isto é, basta uma, pois as colunas não nulas de Q_k são múltiplas uma das outras.

c) Pela 3ª propriedade, temos:

$$A^{-1} = \frac{1}{p_3} B_2,$$

e assim:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

7.3 -Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 9 & 1 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Usando o método de Leverrier-Faddeev, determinar:

- a) seu polinômio característico,
- b) seus auto-valores e correspondentes auto-vetores,
- c) A^{-1} .

7.4 - Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por:

$$T(x, y) = (3x + 5y, 3y).$$

Usando o método de Leverrier-Faddeev, determinar seus auto-valores e correspondentes auto-vetores.

7.4 Método das Potências

O **Método das Potências** consiste em determinar o auto-valor de maior valor absoluto de uma matriz A , e seu correspondente auto-vetor, sem determinar o polinômio característico. O método é útil na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas alguns auto-valores, de módulo grande, e, que estes estejam bem separados, em módulo, dos demais. Podem surgir complicações caso a matriz A não possua auto-vetores linearmente independentes. O método das potências baseia-se no seguinte teorema.

Teorema 7.2 - Seja A uma matriz real de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus auto-valores e $u_1, u_2, \dots, u_n$ seus correspondentes auto-vetores. Suponha que os auto-vetores são linearmente independentes, e que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Seja a sequência y_k definida por:

$$y_{k+1} = Ay_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde y_0 é um vetor arbitrário, que permite a expansão:

$$y_0 = \sum_{j=1}^n c_j u_j,$$

com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1,$$

onde o índice r indica a r -ésima componente. Além disso, quando $k \rightarrow \infty$, y_k tende ao auto-vetor correspondente a λ_1 .

Prova: Temos por hipótese que:

$$y_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n . \quad (7.8)$$

Agora, lembrando que $Au_i = \lambda_i u_i$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_1 &= Ay_0 \\ &= c_1 Au_1 + c_2 Au_2 + \dots + c_n Au_n \\ &= c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + \dots + c_n \lambda_n u_n \\ &= \lambda_1 \left[c_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_n \right] , \\ y_2 &= Ay_1 = A^2 y_0 \\ &= \lambda_1 \left[c_1 Au_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} Au_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} Au_n \right] \\ &= \lambda_1 \left[c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_2 u_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \lambda_n u_n \right] \\ &= \lambda_1^2 \left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 u_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 u_n \right] , \\ &\vdots \\ y_k &= Ay_{k-1} = A^k y_0 \\ &= \lambda_1^k \left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k u_n \right] . \end{aligned}$$

Desde que, por hipótese, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, temos então para $i = 1, \dots, n$ que $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$, e portanto quando $k \rightarrow \infty$, $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0$.

Logo, o vetor:

$$\left[c_1 u_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^p u_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^p u_n \right] ,$$

converge para $c_1 u_1$ que é um múltiplo do auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_1 .

Assim, λ_1 é obtido de:

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^{k+1} y_0)_r}{(A^k y_0)_r} , r = 1, 2, \dots, n . \quad (7.9)$$

e isso conclui a prova.

Observe então que, teoricamente, a partir de (7.9) obtemos o auto-valor de maior valor absoluto de uma matriz A . Na prática, para obter λ_1 , utilizamos o algoritmo dado a seguir.

A partir de um vetor y_k , arbitrário, não nulo, construímos dois outros vetores y_{k+1} e z_{k+1} , do seguinte modo:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= Ay_k \\ y_{k+1} &= \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \text{ onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_{k+1})_r| , \end{aligned}$$

ou seja: dado um vetor y_0 qualquer, não nulo, construímos a sequência:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= Ay_0 \\
 y_1 &= \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \frac{1}{\alpha_1} Ay_0 \\
 z_2 &= Ay_1 = \frac{1}{\alpha_1} A^2 y_0 \\
 y_2 &= \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^2 y_0 \\
 z_3 &= Ay_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} A^3 y_0 \\
 &\vdots \\
 y_k &= \frac{1}{\alpha_k} z_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} A^k y_0 \\
 z_{k+1} &= Ay_k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} A^{k+1} y_0.
 \end{aligned}$$

Assim, para obtermos λ_1 , calculamos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^{k+1} y_0)_r}{(A^k y_0)_r} = \lambda_1.$$

Observe que podemos garantir que o valor resultante fornece λ_1 desde que obtemos a mesma expressão dada por (7.9). Assim, pelo algoritmo, temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1. \quad (7.10)$$

Observações:

- a) No limite, todas as componentes de $\frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r}$ de (7.10), tendem a λ_1 . Entretanto, na prática, uma das componentes converge mais rapidamente do que as outras. Assim, quando uma das componentes satisfizer a precisão desejada teremos o auto-valor procurado. Além disso, a velocidade de convergência depende de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Portanto, quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência.
- b) Para obtermos λ_1 com uma precisão ϵ , em cada passo calculamos aproximações para λ_1 usando (7.10). O teste do erro relativo para cada componente de λ_1 , isto é:

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|_r}{|\lambda_1^{(k+1)}|_r} < \epsilon,$$

é usado como critério de parada.

- c) Quando todas as componentes de (7.10) forem iguais, então o vetor y_k dessa iteração é o auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_1 .
- d) Se algum vetor resultar no vetor nulo, o método falha. Tal acontecimento deve ocorrer se as hipóteses não foram satisfeitas.

e) No Teorema 7.2 é feita a hipótese de $c_1 \neq 0$. Se $c_1 = 0$, então a prova do Teorema 7.2 indica que, teoricamente, o vetor y_k converge para u_2 . Entretanto, na prática, para matrizes de ordem $n \geq 3$, que satisfaçam as demais condições do citado teorema, o método funciona sempre, pois, mesmo que o vetor y_0 não tenha componentes na direção de u_1 , e desde que o método envolva a cada iteração uma divisão, os erros de arredondamento da máquina farão com que y_1 passe a ter componente nessa direção, após uma ou duas iterações.

Exemplo 7.4 - Usando o método das potências determinar o auto-valor de maior valor absoluto da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2} .

Solução: Tomemos $y_0 = (1, 1, 1)^t$. Temos:

$$\begin{aligned} z_1 &= Ay_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 = \max |(z_1)_r| = \max(|4|, |6|, |11|) = 11. \\ y_1 &= \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 0.3636 \\ 0.5455 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_2 = Ay_1 = \begin{pmatrix} 2.0908 \\ 3.8182 \\ 7.5454 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos então calcular uma 1ª aproximação para λ_1 , usando (7.10). Logo:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 5.7503 \\ 6.9995 \\ 7.5454 \end{pmatrix}.$$

Agora desde que $\alpha_2 = \max\{|2.0908|, |3.8182|, |7.5454|\} = 7.5454$, obtemos:

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 0.2771 \\ 0.5060 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_3 = Ay_2 = \begin{pmatrix} 1.8313 \\ 3.5662 \\ 7.1204 \end{pmatrix},$$

Novamente, obtemos uma nova aproximação para λ_1 , fazendo:

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 6.6088 \\ 7.0478 \\ 7.1204 \end{pmatrix}.$$

Calculando então o erro relativo, obtemos:

$$\frac{|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}|_r}{|\lambda_1^{(2)}|_r} \simeq \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.07 \\ 0.13 \end{pmatrix},$$

o qual possui todas as componentes maiores que 10^{-2} . Assim, devemos fazer uma nova iteração. Agora desde que $\alpha_3 = 7.1204$, segue que:

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{1}{\alpha_3} z_3 = \begin{pmatrix} 0.2572 \\ 0.5008 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_4 = Ay_3 = \begin{pmatrix} 1.8256 \\ 3.5160 \\ 7.0304 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \lambda_1^{(3)} &= \frac{(z_4)_r}{(y_3)_r} = \begin{pmatrix} 7.0980 \\ 7.0208 \\ 7.0304 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Novamente, calculando o erro relativo:

$$\frac{|\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}|_r}{|\lambda_1^{(2)}|_r} \simeq \begin{pmatrix} 0.069 \\ 0.004 \\ 0.013 \end{pmatrix},$$

vemos que a segunda componente é menor que 10^{-2} . Portanto,

$$\lambda_1 \simeq 7.0208 \text{ com } \epsilon < 10^{-2} \text{ e } u_1 \simeq \begin{pmatrix} 0.2572 \\ 0.5008 \\ 1 \end{pmatrix} = y_3.$$

Observações:

- 1) É claro que se desejamos λ_1 com precisão maior basta continuar fazendo iterações.
- 2) Os auto-valores de A são: 1, 2 e 7 com auto-vetores: $(0.5, 1, -1)^t$, $(-1, 0.5, 1)^t$ e $(0.25, 0.5, 1)^t$, respectivamente.
- 3) O método das potências deve ser aplicado se o objetivo é determinar o auto-valor de maior valor absoluto de uma matriz. A desvantagem desse método é que ele fornece apenas um auto-valor de cada vez. Se todos os auto-valores são procurados devemos aplicar outros métodos que são muito mais eficientes.
- 4) Algumas vezes o maior auto-valor, em módulo, é o mais importante, mas se não é, devemos modificar o método. Em alguns problemas, o mais importante é a determinação do auto-valor de menor valor absoluto. Para isso dispomos da seguinte estratégia.

7.4.1 Método da Potência Inversa

O **Método da Potência Inversa** é usado para determinar o auto-valor de menor valor absoluto e seu correspondente auto-vetor de uma matriz A . O método é útil na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas o auto-valor, de menor módulo, e, que este esteja bem separado dos demais. Novamente, o método pode não funcionar caso a matriz A não possua auto-vetores linearmente independentes. O método da potência inversa é semelhante ao método das potências, com a diferença que agora assumimos:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|,$$

e desejamos determinar λ_n .

Sabemos que se λ é auto-valor de A , então λ^{-1} é auto-valor de A^{-1} . Além disso, se $|\lambda_n|$ é o menor auto-valor de A , então $|\lambda_n^{-1}|$ é o maior auto-valor de A^{-1} . Assim, o método da potência inversa consiste em calcular pelo método das potências o auto-valor de maior valor absoluto de A^{-1} , pois assim teremos o menor auto-valor, em módulo, de A . Portanto, dado y_k , construímos dois outros vetores y_{k+1} e z_{k+1} da seguinte forma :

$$z_{k+1} = A^{-1}y_k$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \text{ onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_{k+1})_r|,$$

e portanto:

$$\lambda_n^{-1} = \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r}.$$

Note que na prática não é necessário calcular A^{-1} , pois de:

$$z_{k+1} = A^{-1}y_k \Rightarrow Az_{k+1} = y_k ,$$

e assim resolvemos o sistema usando a **Decomposição LU** (ver Capítulo 4). Este método é particularmente conveniente desde que as matrizes L e U são independentes de k e portanto basta obtê-las uma única vez.

Exemplo 7.5 - Determinar o menor auto-valor, em módulo, da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} ,$$

usando o método da potência inversa.

Solução: Os auto-valores de A são: $\lambda_1 = 7.44437$, $\lambda_2 = 4.21809$ e $\lambda_3 = 1.33754$. Portanto o maior auto-valor de A^{-1} é $\lambda_3^{-1} = \frac{1}{1.33754} \simeq 0.7476$, e é esse valor que desejamos encontrar.

Decompondo A em LU , obtemos:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} , \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5.25 \end{pmatrix} .$$

Assim, tomando $y_0 = (1, 1, 1)^t$ em $Az_1 = y_0$ ou seja fazendo $LUz_1 = y_0$, segue que:

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0.5715 \\ -0.1429 \\ 0.1905 \end{pmatrix} , \quad \alpha_1 = 0.5715 , \quad y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2500 \\ 0.3333 \end{pmatrix} .$$

Resolvendo agora $LUz_2 = y_1$, obtemos:

$$z_2 = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ -0.4048 \\ 0.1230 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ 1.6192 \\ 0.3690 \end{pmatrix} .$$

Agora, $\alpha_2 = 0.7024$. Continuando o processo, obtemos:

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5763 \\ 0.1751 \end{pmatrix} , \text{ e de } LUz_3 = y_2 \Rightarrow z_3 = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ -0.4754 \\ 0.1084 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \lambda_3^{-1} &= \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ 0.8249 \\ 0.6192 \end{pmatrix} . \text{ Temos : } \alpha_3 = 0.7377, \text{ e assim :} \\ y_3 &= \frac{1}{\alpha_3} z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6444 \\ 0.1469 \end{pmatrix} \text{ e de } LUz_4 = y_3 \Rightarrow z_4 = \begin{pmatrix} 0.7454 \\ -0.4908 \\ 0.1063 \end{pmatrix} . \\ \Rightarrow \lambda_3^{-1} &= \frac{(z_4)_r}{(y_3)_r} = \begin{pmatrix} 0.7454 \\ 0.7617 \\ 0.7235 \end{pmatrix} . \text{ Finalmente, } \alpha_4 = 0.7454, \text{ e portanto :} \end{aligned}$$

$$y_4 = \frac{1}{\alpha_4} z_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6584 \\ 0.1426 \end{pmatrix} \text{ e de } LUz_5 = y_4 \Rightarrow z_5 = \begin{pmatrix} 0.7471 \\ -0.4942 \\ 0.1061 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_5)_r}{(y_4)_r} = \begin{pmatrix} 0.7471 \\ 0.7506 \\ 0.7443 \end{pmatrix}.$$

Logo $\lambda_3^{-1} \simeq 0.7471$ é o auto-valor de maior valor absoluto de A^{-1} . Portanto $\frac{1}{\lambda_3^{-1}} \simeq 1.3385$ é o auto-valor de menor valor absoluto de A .

7.4.2 Método das Potências com Deslocamento

Suponha agora que A tem auto-valores λ_i , reais, com

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n.$$

e considere a sequência de vetores definida por:

$$z_{k+1} = (A - qI)y_k$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \text{ onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \leq r \leq n} |(z_{k+1})_r|,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e q é um parâmetro qualquer. Isto é chamado **Método das Potências com Deslocamento**, porque $A - qI$ tem auto-valores $\lambda_i - q$, isto é, os auto-valores de A são deslocados q unidades na reta real. Os auto-vetores de $A - qI$ são os mesmos da matriz A .

Portanto o Teorema 7.2 pode ser aplicado à matriz $A - qI$, e pode ser mostrado que y_k converge para o auto-vetor correspondente àquele que maximiza $|\lambda_i - q|$. Portanto se:

$$q < \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \text{ então } y_k \rightarrow u_1 \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} \rightarrow \lambda_1 - q,$$

$$q > \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \text{ então } y_k \rightarrow u_n \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r} \rightarrow \lambda_n - q,$$

Assim, a escolha apropriada de q pode ser usada para determinar os dois auto-valores extremos, correspondendo ao maior e ao menor auto-valor de A . Observe que se $q = (\lambda_1 + \lambda_n)/2$ então $\lambda_1 - q = -(\lambda_n - q)$, e assim $A - qI$ tem dois auto-valores de mesmo módulo, mas de sinais opostos. Neste caso, a sequência de vetores oscilará entre dois limites os quais são duas combinações de u_1 e u_2 .

O auto-valor e o auto-vetor *dominante* são usualmente calculados tomando um *deslocamento zero*, isto é, o cálculo para determinar λ_1 e u_1 são realizados na matriz A , através do método das potências. A matriz pode então ser *deslocada* de λ_1 para estimar o auto-valor λ_n .

Exemplo 7.6 - Determinar o auto-valor de menor valor absoluto da matriz dada no exemplo 7.4, usando o método das potências com deslocamento.

Solução: No exemplo 7.4, o auto-valor de maior valor absoluto foi estimado $\simeq 7$. Assim, para determinar o auto-valor de menor valor absoluto, vamos aplicar o método das potências na matriz:

$$A - 7I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = A^*.$$

Iniciando com $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, obtemos:

$$z_1 = A^* y_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 = \max |(z_1)_r| = 4.$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_2 = A^* y_1 = \begin{pmatrix} 4.00 \\ 1.75 \\ -5.50 \end{pmatrix}.$$

Podemos, então, calcular uma primeira aproximação para λ_1^* . Assim:

$$\lambda_1^{*(1)} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} -5.33 \\ -7.00 \\ -5.50 \end{pmatrix}.$$

Continuando o processo, obteremos:

$$y_{19} = \begin{pmatrix} -0.52 \\ -0.94 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_{20} = A^* y_{19} = \begin{pmatrix} 3.03 \\ 5.71 \\ -5.98 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{*(19)} = \frac{(z_{20})_r}{(y_{19})_r} = \begin{pmatrix} -5.92 \\ -5.95 \\ -5.98 \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos concluir que o auto-valor *dominante* de A^* é aproximadamente -5.98 com auto-vetor aproximado $u_1^* = (-0.52, -0.94, 1)^t$. Portanto a matriz original possui o mesmo auto-vetor mas seu auto-valor é $-5.98 + 7.00 = 1.02$. A lentidão na convergência neste caso se deve ao fato que os auto-valores de A^* são: $-6, -5$ e 0 e assim a convergência é governada pelo fator: $\left(\frac{5}{6}\right)^k$. Compare com o exemplo 7.4, e 7.5, onde a razão de convergência é $\left(\frac{2}{7}\right)^k$ e $\left(\frac{1.33754}{4.21809}\right)^k$, respectivamente.

Em geral, se $y_k \rightarrow u_1$, então na presença do *deslocamento* q , a velocidade de convergência depende de:

$$\left(\frac{\lambda_i - q}{\lambda_1 - q} \right)^k,$$

e assim uma escolha adequada de q pode acelerar a convergência. Por exemplo, se A é uma matriz de ordem 3, com auto-valores: 5, 7 e 10, sem *deslocamento* a convergência depende de $\left(\frac{7}{10}\right)^k$, mas com um *deslocamento* de 6 dependerá de $\left(\frac{1}{4}\right)^k$, pois $A - 6I$ tem auto-valores: $-1, 1$ e 4 .

Portanto, na prática não é trivial encontrar o melhor valor de q , a menos que alguns dos auto-valores sejam conhecidos a priori. O método das potências e /ou o método das potências *com deslocamento* devem ser utilizados se apenas um ou dois dos auto-valores são desejados. Se o objetivo é determinar mais auto-valores então o método da potência inversa *com deslocamento* pode ser usado, ou seja, como no método da potência inversa, calculamos:

$$(A - qI)z_{k+1} = y_k ,$$

usando a decomposição LU , e assim os auto valores de $(A - qI)^{-1}$ serão $\frac{1}{(\lambda_i - q)}$. Novamente, o Teorema 7.2 pode ser aplicado a $(A - qI)^{-1}$ e deduzimos que y_k converge para o auto-vetor correspondente ao auto-valor que maximiza $\frac{1}{|\lambda_i - q|}$. Escolhas adequadas dos valores de q nos permitem determinar todos os auto-valores de A , e não somente aqueles correspondentes aos auto-valores extremos. Assim, se o auto-valor próximo a q é λ_j , então o valor de λ_j pode ser calculado a partir de:

$$\bar{\lambda}_j = \frac{1}{(\lambda_j - q)} ,$$

onde $\bar{\lambda}_j$ é o auto-valor de $(A - qI)^{-1}$, obtido pelo método da potência inversa *com deslocamento* q .

Exemplo 7.7 - Determinar o segundo maior auto-valor, em valor absoluto, da matriz dada no exemplo 7.4.

Solução: Já determinamos dois auto-valores desta matriz: 7 e 1.02 (Exemplos 7.4 e 7.6). Sabemos que o **traço** de uma matriz é igual a soma dos seus auto-valores. Neste exemplo o traço de A é 10 e assim o outro auto-valor é aproximadamente 1.98, o qual será tomado como o valor de q na iteração inversa *com deslocamento*. Assim, montamos a matriz:

$$A - 1.98I = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 1 \\ 2 & 0.02 & 2 \\ 4 & 2 & 3.02 \end{pmatrix} ,$$

e a decompomos no produto LU , onde:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1.9608 & 1 & \\ 3.9216 & 100 & 1 \end{pmatrix} , \quad U = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 1 \\ & 0.02 & 0.0392 \\ & & -4.8216 \end{pmatrix} .$$

Tomando como vetor inicial $y_0 = (1, 1, 1)^t$, e resolvendo o sistema linear $LUz_1 = y_0$, resulta :

$$z_1 = \begin{pmatrix} 19.9226 \\ -10.1707 \\ -19.3211 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{19.9226} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5105 \\ -0.9698 \end{pmatrix}$$

De $LUz_2 = y_1$, obtemos:

$$z_2 = \begin{pmatrix} 50.2356 \\ -25.0940 \\ -50.2403 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2^{*(1)} = \frac{z_2}{y_1} = \begin{pmatrix} 50.2356 \\ 49.0500 \\ 51.8048 \end{pmatrix} .$$

Agora,

$$y_2 = \frac{1}{-50.2403} z_2 = \begin{pmatrix} -0.9999 \\ 0.4995 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Fazendo $LUz_3 = y_2$, obtemos:

$$z_3 = \begin{pmatrix} -50.4088 \\ 24.1885 \\ 50.4166 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_2^{*(2)} = \frac{z_3}{y_2} = \begin{pmatrix} 50.4138 \\ 48.3180 \\ 51.4166 \end{pmatrix}.$$

Assim, $\lambda_2^* \simeq 50.41$. Portanto, o segundo maior auto-valor, em valor absoluto de A é:

$$\lambda_2 = 1.98 + \frac{1}{50.41} = 1.9998.$$

Observe que o sucesso do método das potências *com deslocamento* depende de nossa habilidade em obter estimativas precisas para usar no *deslocamento*. Neste último exemplo, uma estimativa para λ_2 foi obtida usando a relação entre o traço da matriz e a soma dos auto-valores. Infelizmente, para matrizes de ordem > 3 , não é fácil obter valores apropriados para os *deslocamentos*. Como já dissemos anteriormente, se desejamos todos os auto-valores devemos usar outros métodos.

Exercícios

7.5 - Determinar o auto-valor de maior valor absoluto e seu correspondente auto-vetor, da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

, calculando apenas a primeira aproximação pelo método das potências. O que você pode concluir?

7.6 - Usando o método das potências calcular, o auto-valor de maior valor absoluto e seu correspondente auto-vetor, da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

com precisão de 10^{-2} .

7.7 - Usando o método da potência inversa, calcule o auto-valor de menor valor absoluto da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2} .

7.8 - Sabendo que o auto-valor de maior valor absoluto da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

é aproximadamente: -5.76849 , e que seu correspondente auto-vetor é aproximadamente: $(-0.1157, -0.1306, 1)^t$, calcule os demais auto-valores e correspondentes auto-vetores de A , usando:

- o método das potências com deslocamento para obter o menor auto-valor, em valor absoluto,
- o método da potência inversa com deslocamento para obter o auto-valor λ_2 .

7.5 Auto-Valores de Matrizes Simétricas

Nessa seção restringiremos nossa atenção para matrizes simétricas de ordem n . Matrizes deste tipo possuem auto-valores reais e os auto-vetores são linearmente independentes. O método de Jacobi, que descreveremos mais adiante, é usado para determinar os auto-valores e auto-vetores, de matrizes simétricas, através de uma série de transformações similares:

$$A_{k+1} = U_k^{-1} A_k U_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

onde $A_1 = A$. As matrizes $A_1, A_2, \dots$ convergem num número infinito de passos para uma matriz diagonal. Os auto-valores e auto-vetores são então determinados em virtude do Lema 1.1 (o qual se aplica tanto para matrizes simétricas como para matrizes não simétricas).

Assim, após m passos do método de Jacobi, obteremos:

$$A_{m+1} = U_m^{-1} \dots U_2^{-1} U_1^{-1} A_1 U_1 U_2 \dots U_m.$$

Portanto, se $A_{m+1} \simeq D$, segue que os elementos diagonais de A_{m+1} são aproximações para os auto-valores de A e as colunas de $V = U_1 U_2 \dots U_m$ são aproximações para os auto-vetores.

Para descrevermos o método de Jacobi, (para matrizes simétricas), precisamos de alguns conceitos, os quais passamos a considerar agora. Assim:

Rotação de Jacobi

Seja A uma matriz simétrica. Uma rotação (p, q) de Jacobi é a operação $U^t A U$ com U dada por (1.23). Observe que fazer uma rotação de Jacobi é efetuar uma transformação de semelhança na matriz A .

Para um melhor entendimento, consideremos inicialmente, uma rotação (2,4) de Jacobi, em uma matriz A de ordem 4. Efetuando o produto $U^t A$, obtemos:

$$\begin{aligned} U^t A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}c - a_{41}s & a_{22}c - a_{42}s & a_{23}c - a_{43}s & a_{24}c - a_{44}s \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21}s - a_{41}c & a_{22}s + a_{42}c & a_{23}s - a_{43}c & a_{24}s - a_{44}c \end{pmatrix} \\ &= A' = (a'_{ij}), \text{ onde } \cos \varphi = c \text{ e } \sin \varphi = s. \end{aligned}$$

Fazendo agora o produto $A'U$, segue que:

$$\begin{aligned} A'U &= \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12}c - a'_{14}s & a'_{13} & a'_{12}s + a'_{14}c \\ a'_{21} & a'_{22}c - a'_{24}s & a'_{23} & a'_{22}s + a'_{24}c \\ a'_{31} & a'_{32}c - a'_{34}s & a'_{33} & a'_{32}s + a'_{34}c \\ a'_{41} & a'_{42}c - a'_{44}s & a'_{43} & a'_{42}s + a'_{44}c \end{pmatrix} = A'' = (a''_{ij}). \end{aligned}$$

Assim, de um modo geral, para uma matriz de ordem n o produto $U^t A$, fornece uma matriz A' , onde:

$$\begin{cases} a'_{pj} = a_{pj} \cos \varphi - a_{qj} \sin \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a'_{qj} = a_{pj} \sin \varphi + a_{qj} \cos \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a'_{ij} = a_{ij}, & i \neq p, q, \quad 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (7.11)$$

e o produto $A'U$ fornece uma matriz A'' , onde:

$$\begin{cases} a''_{ip} = a'_{ip} \cos \varphi - a'_{iq} \sin \varphi, & i \leq i \leq n, \\ a''_{iq} = a'_{ip} \sin \varphi + a'_{iq} \cos \varphi, & i \leq i \leq n, \\ a''_{ij} = a'_{ij}, & j \neq p, q, \quad i \leq i \leq n. \end{cases} \quad (7.12)$$

Portanto, a matriz A'' tem a seguinte forma:

$$A'' = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \bigcirc & \dots & \bigcirc & \dots & p \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \bigcirc & \dots & \bigcirc & \dots & q \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & p & & q & & \end{pmatrix},$$

isto é, na matriz A'' apenas os elementos das linhas e colunas p e q serão alterados, sendo que os elementos a_{pp} , a_{pq} , a_{qp} , a_{qq} serão transformados duas vezes. Portanto A'' continua simétrica.

Vejamos agora as fórmulas que determinam a passagem de $A \rightarrow A''$, denominada **Rotação de Jacobi** de um ângulo φ para os elementos da interseção. Temos, utilizando (7.12) e (7.11), que:

$$\begin{aligned} 1) \ a''_{pp} &= a'_{pp} \cos \varphi - a'_{pq} \sin \varphi \\ &= (a_{pp} \cos \varphi - a_{qp} \sin \varphi) \cos \varphi - \\ &\quad - (a_{pq} \cos \varphi - a_{qq} \sin \varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Portanto:

$$a''_{pp} = a_{pp} \cos^2 \varphi - 2a_{pq} \sin \varphi \cos \varphi + a_{qq} \sin^2 \varphi. \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} 2) \ a''_{qq} &= a'_{qp} \sin \varphi + a'_{qq} \cos \varphi \\ &= (a_{pp} \sin \varphi + a_{qp} \cos \varphi) \sin \varphi + \\ &\quad + (a_{pq} \sin \varphi - a_{qq} \cos \varphi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Logo:

$$a''_{qq} = a_{pp} \sin^2 \varphi + 2a_{pq} \sin \varphi \cos \varphi + a_{qq} \cos^2 \varphi. \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} 3) \ a''_{pq} &= a'_{pp} \sin \varphi + a'_{pq} \cos \varphi \\ &= (a_{pp} \cos \varphi - a_{qp} \sin \varphi) \sin \varphi + \\ &\quad + (a_{pq} \cos \varphi - a_{qq} \sin \varphi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Assim:

$$a''_{pq} = a''_{qp} = (a_{pp} - a_{qq}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{pq} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (7.15)$$

Portanto, para fazer uma rotação (p, q) de Jacobi, usamos as fórmulas: (7.13), (7.14), (7.15), (7.12) com $j \neq p, q$ e (7.11) com $i \neq p, q$.

Exemplo 7.8 - Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Fazer uma rotação de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ em torno do elemento $(p, q) = (1, 3)$.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos 90^\circ = 0 , \\ \sin \varphi &= \sin 90^\circ = 1 . \end{aligned}$$

Agora, utilizando as fórmulas anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{de (7.7)} \Rightarrow a''_{11} &= a_{11} c^2 - 2a_{13} s c + a_{33} s^2 = a_{33} = 3 , \\ \text{de (7.8)} \Rightarrow a''_{33} &= a_{11} s^2 + 2a_{13} s c + a_{33} c^2 = a_{11} = 2 , \\ \text{de (7.9)} \Rightarrow a''_{13} &= a'_{31} = (a_{11} - a_{33}) s c + a_{13} (c^2 - s^2) = -a_{13} = -3 . \end{aligned}$$

Usando (7.12) e (7.11), segue que:

$$\begin{aligned} a''_{12} &= a'_{12} = a_{12} c - a_{32} s = -a_{32} = 1 = a''_{21} , \\ a''_{14} &= a'_{14} = a_{14} c - a_{34} s = -a_{34} = 0 = a''_{41} , \\ a''_{32} &= a'_{32} = a_{12} s + a_{32} c = a_{12} = 1 = a''_{23} , \\ a''_{34} &= a'_{34} = a_{14} s + a_{34} c = a_{14} = 1 = a''_{43} . \end{aligned}$$

Assim:

$$A'' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

corresponde a uma rotação de 90° em torno do elemento $(1, 3)$.

7.5.1 Método Clássico de Jacobi

O **Método Clássico de Jacobi**, ou simplesmente **Método de Jacobi**, como já dissemos, é um método numérico que serve para determinar auto-valores e auto-vetores de matrizes simétricas. Dada a matriz A , efetuamos uma sequência de rotações:

$$\begin{aligned} A_1 &= A ; A_2 = U_1^t A_1 U_1 \rightarrow A_3 = U_2^t A_2 U_2 \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \rightarrow A_{k+1} = U_k^t A_k U_k \simeq D , \end{aligned}$$

onde U_i , $i = 1, 2, \dots, k$ são matrizes de rotação, e D é uma matriz diagonal.

O processo para construção da matriz A_2 , consiste em escolhermos entre os elementos não diagonais de A o elemento de maior valor absoluto, isto é:

$$a_{pq} = \max_{i \neq j} (a_{ij}) .$$

Fazer então, uma rotação com a finalidade de zerar o elemento a_{pq} . A seguir reaplicamos o processo à matriz resultante tantas vezes quantas forem necessárias, de tal modo a reduzirmos a matriz A a uma matriz diagonal D , cujos elementos são os auto-valores de A .

Assim, no primeiro passo devemos zerar o elemento a_{pq} . Assumimos que $a_{pq} \neq 0$, (pois caso contrário nada teríamos a fazer), e assim nosso objetivo é obter $a''_{pq} = 0$. De (7.15), temos a expressão para a''_{pq} e impondo que o mesmo seja identicamente nulo, segue que:

$$(a_{pp} - a_{qq}) \underbrace{\cos \varphi \sen \varphi}_{\frac{1}{2} \sen 2\varphi} + a_{pq} \underbrace{(\cos^2 \varphi - \sen^2 \varphi)}_{\cos 2\varphi} = 0 .$$

Portanto:

$$\begin{aligned} a_{pp} - a_{qq} &= - \frac{a_{pq} \cos 2 \varphi}{\frac{1}{2} \sen 2 \varphi} = - 2 a_{pq} \cotg 2 \varphi \\ \Rightarrow \cotg 2 \varphi &= \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2 a_{pq}} = \phi . \end{aligned}$$

Agora:

$$\begin{aligned} \cotg 2 \varphi &= \frac{\cos 2 \varphi}{\sen 2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi - \sen^2 \varphi}{2 \sen \varphi \cos \varphi} = \\ &= \frac{\cos^2 \varphi - \sen^2 \varphi}{\frac{2 \sen \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \frac{1 - tg^2 \varphi}{2 tg \varphi} . \end{aligned}$$

Seja $t = tg \varphi$; temos $\cotg 2 \varphi = \phi$. Assim:

$$\phi = \frac{1 - t^2}{2t} \Rightarrow 1 - t^2 = 2t\phi .$$

Portanto:

$$t^2 + 2t\phi - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2\phi \pm \sqrt{4\phi^2 + 4}}{2} .$$

Obtemos então: $t = -\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1}$. Multiplicando o numerador e o denominador por: $\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1}$ segue que:

$$t = \frac{1}{\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1}}$$

Computacionalmente, adotamos:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\phi + \text{Sinal}(\phi)\sqrt{\phi^2 + 1}} , & \phi \neq 0 ; \\ 1 , & \phi = 0 . \end{cases}$$

Observe que escolhemos o sinal positivo ou negativo de ϕ de modo a obter o denominador de maior módulo, pois assim teremos sempre $|t| \leq 1$. Agora, temos as seguintes fórmulas para a secante de um ângulo φ :

$$\sec^2 \varphi = 1 + tg^2 \varphi , \quad \text{e} , \quad \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi} .$$

Assim:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + tg^2 \varphi \Rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + tg^2 \varphi} .$$

Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} c &= \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ s &= \sen \varphi = \cos \varphi \cdot t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Resumindo, o método de Jacobi, consiste em:

- 1) Determinar o elemento de maior módulo de A fora da diagonal. Esse elemento será denotado por a_{pq} .
- 2) Calcular:

$$\mathbf{2.1)} \quad \phi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}.$$

$$\mathbf{2.2)} \quad t = \begin{cases} \frac{1}{\phi + \text{Sinal}(\phi)\sqrt{\phi^2 + 1}}, & \phi \neq 0; \\ 1, & \phi = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{2.3)} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\mathbf{2.4)} \quad \sen \varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

- 3) Usar as fórmulas de rotação de Jacobi, isto é: as fórmulas: (7.13), (7.14), (7.6) com $j \neq p, q$ e (7.5) com $i \neq p, q$.

O processo deve ser repetido até obtermos uma matriz diagonal.

Observe que em cada passo k , o item **3)** acima pode ser substituído pelo produto $U_k^t A_k U_k$.

Cálculo dos Auto-Vetores

Ao mesmo tempo que calculamos os auto-valores de uma matriz A pelo método de Jacobi podemos obter seus auto-vetores. Vimos que a sequência de matrizes A_k é calculada por recorrência através de:

$$A_{k+1} = U_k^t A_k U_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Como $A_1 = A$, obtemos:

$$A_{k+1} = U_k^t U_{k-1}^t \dots U_2^t U_1^t A U_1 U_2 \dots U_{k-1} U_k = V^t A V,$$

onde $V = U_1 U_2 \dots U_{k-1} U_k$.

Com a hipótese que $A_k \simeq D$ obtemos que $D = V^t A V$, onde V é matriz ortogonal, pois a matriz V é produto de matrizes ortogonais. Assim D contém os auto-valores de A e V contém seus correspondentes auto-vetores (em colunas), isto é, a j -ésima coluna de V é o auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_j .

Observe que em cada passo do método de Jacobi, um par de elementos fora da diagonal torna-se zero. Assim pode parecer, à primeira vista, que uma matriz diagonal é obtida após um número finito de passos. Entretanto, isso não é verdade porque transformações ortogonais subsequentes destroem os zeros criados

anteriormente. Apesar disso, é possível mostrar que quando um zero é criado nas posições (p, q) e (q, p) , a soma dos quadrados dos elementos não diagonais da matriz A_k , $S(A_k)$, decresce de $2a_{pq}^2$. De fato, seja:

$$S(A_k) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} (a_{ij})^2 .$$

Vamos mostrar que $S(A_k) \rightarrow 0$. Para tanto, em cada passo $A \rightarrow A''$ vamos comparar $S(A)$ com $S(A'')$. Assim:

$$\begin{aligned} S(A'') &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \neq p,q}} (a''_{ij})^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p,q}} [(a''_{ip})^2 \\ &+ (a''_{iq})^2] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p,q}} [(a''_{pj})^2 + (a''_{qj})^2] + 2(a''_{pq})^2 , \end{aligned}$$

onde as somas do lado direito da expressão acima representam, respectivamente: os elementos que não mudam, os elementos das linhas p e q , fora da diagonal; elementos das colunas p e q , fora da diagonal. Agora, usando $(??)$, segue que:

$$(a''_{ip})^2 + (a''_{iq})^2 = (a_{ip}c - a_{iq}s)^2 + (a_{ip}s - a_{iq}c)^2 = (a_{ip})^2 + (a_{iq})^2 ,$$

e desde que o mesmo é válido para $(a''_{pj})^2 + (a''_{qj})^2$, obtemos:

$$S(A'') = S(A) - 2(a_{pq})^2 + 2(a''_{pq})^2 .$$

Observe que na expressão acima devemos subtrair $2(a_{pq})^2$, pois $S(A)$ contém este elemento. Assim, de um modo geral, no k -ésimo passo, teremos:

$$\begin{aligned} S_k &= S_{k-1} - 2(a_{pq}^{k-1})^2 + 2(a_{pq}^k)^2 \\ &= S_{k-1} - 2(a_{pq}^{k-1})^2 , \end{aligned}$$

desde que (a_{pq}^{k-1}) é o maior elemento, em módulo, fora da diagonal principal e $a_{pq}^k = 0$. Substituindo todos os elementos, fora da diagonal principal, por a_{pq}^{k-1} , obtemos:

$$\begin{aligned} S_{k-1} &\leq (n^2 - n)(a_{pq}^{k-1})^2 \\ \Rightarrow (a_{pq}^{k-1})^2 &\leq \frac{S_{k-1}}{n^2 - n} . \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} S_k &\leq S_{k-1} - 2 \frac{S_{k-1}}{n^2 - n} \\ &= S_{k-1} \left(1 - \frac{2}{n^2 - n} \right) . \end{aligned}$$

A partir desta expressão para S_k , podemos escrever que:

$$S_k \leq \left(1 - \frac{2}{n^2 - n} \right) S_{k-1} \leq \left(1 - \frac{2}{n^2 - n} \right)^2 S_{k-2} \leq \dots ,$$

e assim, concluímos que:

$$S_k \leq \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right)^k S_0 ,$$

onde S_0 , representa a soma dos quadrados dos elementos não diagonais da matriz dada. Agora desde que $\left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right) < 1$, segue que $S_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, e isto significa que $A \rightarrow D$, quando $k \rightarrow \infty$. Com isso, acabamos de mostrar que o método de Jacobi é convergente para qualquer matriz real simétrica.

Observe ainda que, na prática, não obtemos, em geral uma matriz diagonal, mas sim uma matriz quase diagonal, ou seja, desde que: $S_{k-1} \leq (n^2 - n)(a_{pq}^{k-1})^2 \leq n^2(a_{pq}^{k-1})^2$, paramos o processo quando $n|a_{pq}^k| < \epsilon$, onde ϵ é uma precisão pré-fixada. A seguir daremos alguns exemplos.

Exemplo 7.9 - Determinar os auto-valores e correspondentes auto-vetores de:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} ,$$

pelo método de Jacobi.

Solução: Como a matriz é 2×2 para diagonalizar A devemos zerar o elemento $(1, 2)$. Assim: $(p, q) = (1, 2)$. Temos então que:

$$\phi = \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}} = 0 \Rightarrow t = 1 .$$

Portanto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071 ,$$

$$s = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t \times c = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071 ,$$

$$\begin{aligned} a''_{11} &= a_{11}c^2 - 2a_{12}sc + a_{22}s^2 \\ &= 7(0.5) - 2(2)(0.7071)(0.7071) + 7(0.5) = 5 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a''_{22} &= a_{11}s^2 + 2a_{12}sc + a_{22}c^2 \\ &= 7(0.5) + 2(2)(0.7071)(0.7071) + 7(0.5) = 9 , \end{aligned}$$

onde utilizamos as fórmulas: (7.7) e (7.8). Assim: $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Logo os auto-valores de A são: $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 9$ e desde que:

$$V = U_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix} ,$$

os auto-vetores, correspondentes, são:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix} .$$

Exemplo 7.10 - Determinar, usando o método de Jacobi, os auto-valores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} .$$

Solução: O maior elemento, em módulo, fora da diagonal principal da matriz $A_1 = A$, é o elemento $a_{23} = a_{32} = 3$. Assim:

$$\phi = \frac{a_{33} - a_{22}}{2a_{23}} = \frac{6 - 5}{6} = 0.1667 .$$

Portanto, $t = 0.8471$, $\cos\varphi = c = 0.7630$, $\sin\varphi = s = 0.6464$. Como já dissemos podemos ou aplicar as fórmulas: (7.13), (7.14), (7.6) com $j \neq 2, 3$ e (7.5) com $i \neq 2, 3$, ou simplesmente efetuar o produto $U_1^t A_1 U_1$, para obter A_2 , onde:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7630 & 0.6464 \\ 0 & -0.6464 & 0.7630 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1.5260 & 1.2928 \\ 1.5260 & 2.4586 & 0 \\ 1.2928 & 0 & 8.5414 \end{pmatrix} .$$

O elemento de maior valor absoluto, na matriz A_2 é $a_{12} = a_{21} = 1.5260$. Assim:

$$\phi = -0.5050, \quad t = -0.6153, \quad c = 0.8517, \quad s = -0.5240 .$$

Obtemos, então:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.8517 & -0.5240 & 0 \\ 0.5240 & 0.8517 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 4.9387 & 0 & 1.1011 \\ 0 & 1.5197 & -0.6774 \\ 1.1011 & -0.6774 & 8.5414 \end{pmatrix} .$$

Agora $(p, q) = (1, 3)$, $\phi = 1.6360$, $t = 0.2814$, $c = 0.9626$, $s = 0.2709$, e com isso obtemos:

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0.9626 & 0 & 0.2709 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2709 & 0 & 0.9626 \end{pmatrix} \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 4.6611 & 0.1239 & 0 \\ 0.1239 & 1.5197 & -0.6520 \\ 0 & -0.6520 & 8.8536 \end{pmatrix} .$$

Temos $(p, q) = (2, 3)$ e assim afetando os cálculos segue que: $\phi = -5.6266$, $t = -0.0882$, $c = 0.9961$, $s = -0.0879$. Portanto:

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9961 & -0.0879 \\ 0 & -0.0879 & 0.9961 \end{pmatrix} \Rightarrow A_5 = \begin{pmatrix} 4.6228 & 0.1827 & -0.0161 \\ 0.1827 & 1.4621 & 0 \\ -0.0161 & 0 & 8.9081 \end{pmatrix} .$$

Observe que os elementos não diagonais da sequência $A_k \rightarrow 0$, à medida que k aumenta. Assim os elementos diagonais da sequência A_k convergem para os auto-valores de A que são: 1.45163, 4.63951, 8.90885. Uma precisão maior pode ser obtida continuando o processo. Além disso, se desejarmos uma aproximação para os auto-vetores, basta efetuar o produto $U_1 U_2 U_3 U_4$.

7.5.2 Método Cíclico de Jacobi

A procura do elemento de maior módulo, fora da diagonal principal, a cada passo do método de Jacobi, é um processo caro que deve ser evitado. Uma alternativa é percorrer ciclicamente os elementos fora da diagonal principal, por linha, por exemplo. Assim, sucessivamente, zeramos os elementos das posições:

$$\begin{array}{cccc} (1, 2) & (1, 3) & \dots & (1, n) \\ & (2, 3) & \dots & (2, n) \\ & & \dots & \\ & & & (n-1, n) \end{array}$$

escolhendo em cada passo φ tal que $a''_{pq} = 0$. As fórmulas usadas são as mesmas do método de Jacobi. A seguir voltamos à primeira linha, segunda linha, etc, isto é, repetimos o ciclo tantas vezes quantas

forem necessárias até obtermos uma matriz diagonal. Além disso, desde que os elementos não diagonais, a cada passo, decrescem podemos usar uma estratégia conhecida como **Método Cíclico de Jacobi com Dados de Entrada**. Tal método consiste em omitir transformações sobre elementos cujo valor, em módulo, é menor que os valores fornecidos como *dados de entrada*. A vantagem deste método é que zeros são criados apenas nas posições onde o valor é em módulo maior que os valores fornecidos nos *dados de entrada*, sem a necessidade de ir zerando todos os elementos. O próximo exemplo ilustra esse método.

Exemplo 7.11 - *Determinar os auto-valores e correspondentes auto-vetores da matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.4 & 5 \\ 0.4 & 4 & 0.1 \\ 5 & 0.1 & -2 \end{pmatrix},$$

usando o método de Jacobi, tomando como dados de entrada para o primeiro e segundo ciclos: 0.5 e 0.05, respectivamente.

Solução: Para o primeiro ciclo a transformação sobre o elemento (1, 2) será omitida pois $|0.4| < 0.5$. Portanto, desde que $|5| > 0.5$, um zero será criado na posição (1, 3). Assim, fazendo os cálculos, obtemos:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0.8507 & 0 & -0.5257 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5257 & 0 & 0.8507 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 6.0902 & 0.3928 & 0 \\ 0.3928 & 4 & -0.1252 \\ 0 & -0.1252 & -5.0902 \end{pmatrix}.$$

A transformação (2, 3) será omitida porque $|-0.1252| < 0.5$. Isto completa o primeiro ciclo. Para o segundo ciclo um zero será criado na posição (1, 2) porque $|0.3928| > 0.05$. Portanto:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.9839 & -0.1788 & 0 \\ 0.1788 & 0.9839 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 6.1616 & 0 & -0.0224 \\ 0 & 3.9286 & -0.1232 \\ -0.0224 & -0.1232 & -5.0902 \end{pmatrix}.$$

A transformação (1, 3) será omitida pois $|-0.0224| < 0.05$. Finalmente um zero será criado na posição (2, 3). Assim:

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9999 & 0.0137 \\ 0 & -0.0137 & 0.9999 \end{pmatrix} \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 6.1616 & 0.0003 & -0.0224 \\ 0.0003 & 3.9303 & 0 \\ -0.0024 & 0 & -5.0919 \end{pmatrix}.$$

e portanto podemos dizer que os auto-valores de A são aproximadamente iguais a 6.1616, 3.9303 e -5.0919 . Agora, para obtermos os auto-vetores calculamos o produto $U_1 U_2 U_3$. Fazendo isso, segue que:

$$U_1 U_2 U_3 = \begin{pmatrix} 0.8370 & -0.1449 & -0.5277 \\ 0.1788 & 0.9838 & 0.0135 \\ 0.5172 & -0.1056 & 0.8439 \end{pmatrix}.$$

Portanto os auto-vetores aproximados de A , correspondentes aos auto-valores aproximados: 6.1616, 3.9303 e -5.0919 , são:

$$\begin{pmatrix} 0.8370 \\ 0.1788 \\ 0.5172 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.1449 \\ 0.9838 \\ -0.1056 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.5277 \\ 0.0135 \\ 0.8439 \end{pmatrix}.$$

Os auto-valores de A são: 6.16161, 3.93029 e -5.09190 .

Observe que os teoremas de Gerschgorin (Teorema 1.10) fornecem ainda um limitante para os erros cometidos nos auto-valores calculados pelo método de Jacobi. No exemplo 7.11, os círculos de Gerschgorin da matriz transformada A_4 são dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 6.1616, & r_1 &= 0.0227, \\ a_2 &= 3.9303, & r_2 &= 0.0003, \\ a_3 &= -5.0919, & r_3 &= 0.0224. \end{aligned}$$

Estes círculos são isolados e assim existe exatamente um auto-valor em cada círculo. Os auto-valores podem portanto serem estimados por:

$$6.1616 \pm 0.0227, \quad 3.9303 \pm 0.0003, \quad -5.0919 \pm 0.0224$$

De um modo geral, se os elementos não diagonais de uma matriz $n \times n$ simétrica têm módulo não excedendo ϵ então, desde que os círculos de Gerschgorin são isolados, os auto-valores diferem dos elementos da diagonal principal por no máximo $(n-1)\epsilon$.

Exercícios

7.9 - Determine os auto-valores e auto-vetores das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -4 \\ -6 & 11 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

usando:

- a) o método de Jacobi,
- b) o método cíclico de Jacobi,
- c) o método cíclico de Jacobi, com dados de entrada igual a 10^{-i} para o i -ésimo ciclo.

7.10 - Se:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcule $U^t A U$, e deduza que se $\phi = -\frac{3}{2}$ então os elementos $(1,3)$ e $(3,1)$ deste produto são iguais a zero. Escreva aproximações para os auto-valores e auto-vetores de A . Use o teorema de Gerschgorin para obter um limite superior do erro nos auto-valores estimados.

7.6 Método de Rutishauser (ou Método LR)

O **método de Rutishauser** ou **Método LR** permite, sob certas condições, determinar todos os auto-valores de uma matriz, sem determinar o polinômio característico.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . O método consiste em construir uma sequência de matrizes $A_1, A_2, \dots$ do seguinte modo: decompomos $A = A_1$ no produto $L_1 R_1$ onde L_1 é triangular inferior com 1 na diagonal e R_1 é triangular superior. (Decomposição LU , Capítulo 4). Então, $A_1 = L_1 R_1$. Agora,

multiplicamos as duas matrizes na ordem inversa e formamos a matriz $A_2 = R_1 L_1$, e decompomos, a seguir, a matriz A_2 no produto de duas matrizes triangulares L_2 e R_2 e assim por diante. Então temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= A = L_1 R_1 \\ A_2 &= R_1 L_1 = L_2 R_2 \\ A_3 &= R_2 L_2 = L_3 R_3 \\ &\vdots \\ A_k &= R_{k-1} L_{k-1} = L_k R_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observações:

- 1) Pode-se provar que: Se os auto-valores de A são distintos a sequência $\{A_k\}$ converge para uma matriz triangular superior R .
- 2) As matrizes A e R são matrizes similares. De fato, temos: $A_1 = L_1 R_1 \Rightarrow L_1^{-1} A_1 = R_1$, então:

$$A_2 = R_1 L_1 = L_1^{-1} A L_1 ,$$

desde que $A_1 = A$. Portanto A_2 é similar a A . De $A_2 = L_2 R_2 \Rightarrow L_2^{-1} A_2 = R_2$, então:

$$A_3 = R_2 L_2 = L_2^{-1} A_2 L_2 = L_2^{-1} L_1^{-1} A L_1 L_2 ,$$

e portanto A_3 é similar a A . De um modo geral, obtemos:

$$A_k = R_{k-1} L_{k-1} = \underbrace{L_{k-1}^{-1} \dots L_1^{-1}}_{L^{-1}} A \underbrace{L_1 \dots L_{k-1}}_L .$$

Portanto A_k é similar a A . Logo possuem o mesmo polinômio característico. Portanto possuem os mesmos auto-valores.

- 3) Os elementos diagonais da matriz A_k são os auto-valores procurados.
- 4) O processo termina quando o elemento de maior valor absoluto da matriz A_k , (abaixo da diagonal principal), for menor que ϵ , onde ϵ é uma precisão pré-fixada.

Exemplo 7.12 - *Calcular os auto-valores de:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pelo método de Rutishauser com precisão de 10^{-2} .

Solução: Temos:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 0.5 \end{pmatrix} = L_1 U_1, \\
 A_2 &= U_1 L_1 = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 0.4 \end{pmatrix} = L_2 U_2, \\
 A_3 &= U_2 L_2 = \begin{pmatrix} 2.6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.04 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0.0154 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.6 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 0.3846 \end{pmatrix} = L_3 U_3, \\
 A_4 &= U_3 L_3 = \begin{pmatrix} 2.6154 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.00592 & 0 & 0.3846 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como os elementos abaixo da diagonal principal de A_4 são, em módulo menor que $10^{-2} \Rightarrow A_4 \simeq R$. Assim, os auto-valores de A são:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &\simeq 2.6154, \\
 \lambda_2 &= 1, \\
 \lambda_3 &\simeq 0.3846, \quad \text{com } \epsilon < 10^{-2}.
 \end{aligned}$$

Observe que os auto-valores de A são: 2.618034, 1 e 0.381966.

O método de Rutishauser permite obter também os auto-vetores. Entretanto o cálculo dos auto-vetores, por este método, é um tanto trabalhoso e assim será omitido. O leitor interessado pode encontrar a descrição do método, por exemplo em [Fox, 19..].

Exercícios

7.11 - Usando o método LR, determine os auto-valores das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2} .

7.12 - Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando o método LR, uma única vez, isto é, até determinar A_2 , é possível estimar os auto-valores de A ?

7.7 Método de Francis (ou Método QR)

O **método de Francis** ou **Método QR** determina todos os auto-valores de uma matriz, sem determinar o polinômio característico.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . O método consiste em construir uma sequência de matrizes $A_1, A_2, \dots$ do seguinte modo: decompomos $A = A_1$ no produto $Q_1 R_1$ onde Q_1 é ortogonal e R_1 é triangular superior. Então, $A_1 = Q_1 R_1$. Agora, multiplicamos as duas matrizes na ordem inversa e formamos a matriz $A_2 = R_1 Q_1$, e decompomos, a seguir, a matriz A_2 no produto $Q_2 R_2$ e assim por diante. Então temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= A = Q_1 R_1, \\ A_2 &= R_1 Q_1 = Q_2 R_2, \\ &\vdots \\ A_k &= R_{k-1} Q_{k-1} = Q_k R_k \dots \end{aligned}$$

Observações:

- a) Essa decomposição tem a vantagem, em relação ao método LR , de sempre existir. Além disso, se A_s é real então Q_s e R_s são reais.
- b) A sequência A_k converge para uma matriz triangular superior em cuja diagonal encontram-se os auto-valores da matriz A .
- c) A matriz A_k é similar a matriz A . De fato, temos: $A_1 = Q_1 R_1 \Rightarrow Q_1^{-1} A_1 = R_1$, então:

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^{-1} A Q_1$$

Portanto, desde que $A_1 = A$, temos que: A_2 e A são similares. De um modo geral, obtemos:

$$A_{k+1} = R_k Q_k = \underbrace{Q_k^{-1} Q_{k-1}^{-1} \dots Q_1^{-1}}_{Q^{-1}} A_1 \underbrace{Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k}_Q$$

Portanto A_{k+1} é similar a A . Logo possuem o mesmo polinômio característico. Portanto possuem os mesmos auto-valores.

- d) Os elementos diagonais da matriz A_k são os auto-valores procurados.
- e) O processo termina quando o elemento de maior valor absoluto da matriz A_k , (abaixo da diagonal principal), for menor que ϵ , onde ϵ é uma precisão pré-fixada.

Em cada passo do método QR, devemos determinar matrizes Q_k e R_k onde Q_k é matriz ortogonal e R_k é matriz triangular superior. Essa decomposição pode ser obtida utilizando transformações ortogonais da forma (1.23). A seguir mostramos como isso pode ser feito.

Seja A uma matriz que desejamos decompor no produto QR . Para zerar o elemento a_{21} , fazemos o produto $U_1 A$ e com isso obtemos uma matriz $A^{(1)}$; para zerar o elemento a_{31} fazemos o produto $U_2 A^{(1)}$ e assim obtemos uma matriz $A^{(2)}$, e assim sucessivamente, isto é, procedemos coluna por coluna até zerarmos todos os elementos abaixo da diagonal principal. O produto das matrizes $U_1^t U_2^t \dots$ fornece a matriz Q_1 .

Considere então o produto $U_1 A$, onde U_1 é dada por (1.23). O elemento a'_{qp} é dado por:

$$a'_{qp} = -\operatorname{sen} \varphi a_{pp} + \cos \varphi a_{qp}, \quad (7.16)$$

e queremos $a'_{qp} = 0$. Assim, o que desejamos é

$$\begin{aligned} & -a_{pp}\sqrt{1-\cos^2\varphi} + \cos\varphi a_{qp} = 0 \\ \Rightarrow & a_{pp}\sqrt{1-\cos^2\varphi} = a_{qp}\cos\varphi \\ \Rightarrow & a_{pp}^2(1-\cos^2\varphi) = a_{qp}^2\cos^2\varphi \\ \Rightarrow & (a_{pp}^2 + a_{qp}^2)\cos^2\varphi = a_{pp}^2 \\ \Rightarrow & \cos\varphi = \frac{a_{pp}}{\sqrt{a_{pp}^2 + a_{qp}^2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, igualando (7.18) a zero, segue que:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{a_{qp}\cos\varphi}{a_{pp}} \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{a_{qp}}{\sqrt{a_{pp}^2 + a_{qp}^2}}.$$

Para melhor entendimento do método, considere uma matriz de ordem 3. Para reduzi-la a forma triangular devemos zerar os elementos a_{21} , a_{31} e a_{32} . Assim, fazendo $c = \cos\varphi$ e $s = \operatorname{sen}\varphi$, segue que:

1) para zerar o elemento a_{21} , efetuamos o produto:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

e desde que queremos $a_{21} = 0$ devemos ter:

$$-s a_{11} + c a_{21} = 0, \text{ onde}$$

$$s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \quad e \quad c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.$$

2) para zerar o elemento a_{31} , efetuamos o produto:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}}_{U_2} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

e desde que queremos $a_{31} = 0$, devemos ter:

$$-s a'_{11} + c a_{31} = 0, \text{ onde}$$

$$s = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} \quad e \quad c = \frac{a'_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}}.$$

3) para zerar o elemento a_{32} , efetuamos o produto:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}}_{U_3} \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a''_{32} & a''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{pmatrix}$$

e desde que queremos $a''_{32} = 0$, devemos ter:

$$\begin{aligned} -s a'_{22} + c a''_{32} &= 0 \\ \Rightarrow s &= \frac{a''_{32}}{\sqrt{a'^2_{22} + a''^2_{32}}} \quad \text{e} \quad c = \frac{a'_{22}}{\sqrt{a'^2_{22} + a''^2_{32}}} . \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$U_3 U_2 U_1 A = R_1 \Rightarrow A = \underbrace{U_1^t U_2^t U_3^t}_{Q_1} R_1 .$$

O produto $R_1 Q_1 = R_1 U_1^t U_2^t U_3^t$ é obtido por sucessivas pré-multiplicações de R com as matrizes U_k^t , $k = 1, 2, \dots$

Exemplo 7.13 - Determinar os auto-valores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pelo método de Francis; com $\epsilon < 10^{-2}$.

Solução: Como $a_{21} = 0$, devemos zerar apenas o elemento a_{31} . Assim $U_1 = I$ e para obtermos U_2 , fazemos:

$$\begin{aligned} s &= \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472 , \\ c &= \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.8944 . \end{aligned}$$

Assim :

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.4472 & 0 & 0.8944 \end{pmatrix} .$$

Portanto:

$$U_2 U_1 A = U_2 I A = U_2 A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.2360 & 0 & 1.3416 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4472 \end{pmatrix}}_{R_1} .$$

Desde que $a_{32} = 0 \Rightarrow U_3 = I$. Assim: $U_3 U_2 U_1 = U_2$ e $U_2^{-1} = U_2^t$. Portanto:

$$A_1 = A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8944 & 0 & -0.4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4472 & 0 & 0.8944 \end{pmatrix}}_{U_2^t} \begin{pmatrix} 2.2360 & 0 & 1.3416 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4472 \end{pmatrix} = Q_1 R_1 .$$

Agora:

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 2.5998 & 0 & 0.2000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.2000 & 0 & 0.4000 \end{pmatrix}.$$

Aplicando novamente o processo, temos que: $U_1 = U_3 = I$. Devemos então determinar U_2 . Assim:

$$\begin{aligned} s &= \frac{0.2000}{\sqrt{(2.5998)^2 + (0.2000)^2}} = 0.0767, \\ c &= \frac{2.5998}{\sqrt{(2.5998)^2 + (0.2000)^2}} = 0.9971. \end{aligned}$$

Portanto:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.9971 & 0 & 0.0767 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.0767 & 0 & 0.9971 \end{pmatrix},$$

e assim:

$$U_2 A_2 = \begin{pmatrix} 2.6076 & 0 & 0.2301 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3935 \end{pmatrix} = R_2$$

Logo:

$$A_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9971 & 0 & -0.0767 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.0767 & 0 & 0.9971 \end{pmatrix}}_{U_2^t} \begin{pmatrix} 2.6076 & 0 & 0.2301 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3835 \end{pmatrix} = Q_2 R_2$$

Finalmente,

$$A_3 = R_2 Q_2 = \begin{pmatrix} 2.6177 & 0 & 0.0294 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.0094 & 0 & 0.3824 \end{pmatrix}.$$

Desde que o maior elemento, em valor absoluto, abaixo da diagonal principal é menor do que 10^{-2} , temos que os valores aproximados dos auto-valores de A são: 2.6177, 1 e 0.3824. Observe que os auto-valores de A são: 2.618034, 1 e 0.381966.

O método QR permite obter também os auto-vetores. Como no método LR o cálculo dos auto-vetores é trabalhoso por este método e assim será omitido. O leitor interessado pode encontrar a descrição do método, por exemplo em [Fox, 19..].

Exercícios

7.13 - Usando o método QR, determinar todos os auto-valores das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ -9 & -2 & -3 \\ 14 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2} .

7.14 - Usando o método QR, uma única vez, na matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

é possível estimar seus auto-valores? (Use aritmética exata).

7.8 Exercícios Complementares

7.15 - Para cada uma das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

encontre um polinômio que tenha a matriz como raiz.

7.16 - Sabendo que uma matriz de ordem 3 tem como auto-valores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

- a) Qual é o polinômio característico de A ?
- b) Quanto vale $\text{tr}(A^2)$?
- c) Quais são os auto-valores de A^{-1} ?
- d) A matriz A é uma matriz singular? Por quê?

7.17 - Seja A uma matriz quadrada de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus auto-valores. Quais são os auto-valores de $A - qI$ onde q é uma constante e I é a matriz identidade?

7.18 - Mostre que se v é auto-vetor de A e de B então v é auto-vetor de $\alpha A + \beta B$, onde α, β são escalares quaisquer.

7.19 - Mostre que uma matriz A e sua transposta A^t possuem o mesmo polinômio característico.

7.20 - Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique, através do método de Leverrier, que seu polinômio característico é dado por:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 8.$$

7.21 - Seja a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Verifique pelo método de Leverrier-Faddeev que seu polinômio característico é dado por:

$$P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 7).$$

b) Determine por método numérico a sua escolha o único auto-valor real negativo de A com precisão de 10^{-2} .

c) Usando os resultados obtidos em a) e b) calcule o auto-vetor correspondente.

d) Usando a) obtenha a inversa de A .

7.22 - Usando o método das potências determine, com precisão de 10^{-3} , o auto-valor de maior valor absoluto, e seu correspondente auto-vetor, para cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.23 - Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Pelo método das potências calcule o auto-valor de maior valor absoluto de A e seu correspondente auto-vetor.

b) Obtenha o polinômio característico de A pelo método de Leverrier-Faddeev.

c) Determine os demais auto-valores de A .

d) Obtenha o auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_2 pelo processo de Leverrier - Faddeev. Suponha $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$.

7.24 - Determinar o auto-valor de maior valor absoluto da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

usando o método das potências. Use como vetor inicial $y_0 = (8/9, 8/9, 1)^t$. Dê seu valor aproximado após três iterações.

7.25 - Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para cada uma delas:

a) calcule $P(\lambda)$ e suas raízes algebricamente.

b) calcule $P(\lambda)$ pelo método de Leverrier.

c) calcule os auto-valores e auto-vetores pelo método de Leverrier-Faddeev.

d) calcule os auto-valores pelo método de potências.

e) calcule os auto-valores pelo método LR.

f) calcule os auto-valores pelo método QR.

7.26 - Matrizes do tipo:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_0 \end{pmatrix},$$

são chamadas **matrizes circulantes**. Determine todos os auto-valores e correspondentes auto-vetores da matriz circulante onde $x_0 = 9, x_1 = 2$ e $x_3 = 1$, utilizando para isso método numérico a sua escolha.

7.27 - Localizar, usando o teorema de Gerschgorin, os auto-valores de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.28 - Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine os auto-valores de A , usando:

- a) o método clássico de Jacobi,
- b) o método cíclico de Jacobi,
- c) o método cíclico de Jacobi, com dados de entrada igual a 5×10^{-i} para o i -ésimo ciclo.
- d) Use o teorema de Gerschgorin para obter um limite superior do erro nos auto-valores estimados.

7.29 - Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 99 \\ 0 & 20 & 0 \\ 99 & 0 & 101 \end{pmatrix}.$$

- a) Caso haja convergência pelo método de Rutishauser, o que se deve esperar?
- b) Determine os auto-valores usando o método de Rutishauser. Use com processo de parada $\epsilon = 10^{-2}$, ou número máximo de iterações = 3.

7.30 Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determine os auto-valores de A , com precisão de 10^{-2} , usando:

- a) o método LR,
- b) o método QR.

7.9 Problemas Aplicados e Projetos

7.1 - Considere o movimento horizontal do conjunto massa mola mostrado na Figura 7.3.

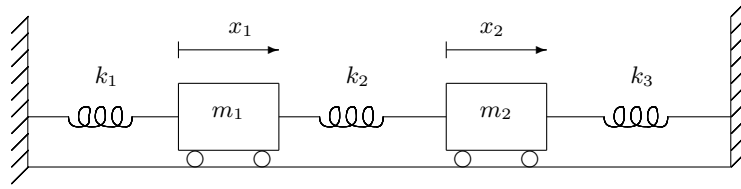


Figura 7.3

As deflexões horizontais x_1 e x_2 são medidas relativamente à posição de equilíbrio estático. As molas possuem rigidez k_1, k_2 e k_3 , que são as forças requeridas para estender ou comprimir cada mola de uma unidade de comprimento.

As equações de movimento são:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 (x_1 - x_2) + k_3 x_2$$

a) Se $x = (x_1, x_2)^t$ é o vetor deflexão então podemos reescrever as equações acima na forma:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = Ax$$

b) Mostre que a substituição:

$$x = v e^{i\omega t}$$

onde v é um vetor do $\mathbb{R}^2$, $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ com $i = \sqrt{-1}$, leva ao problema de auto-valores: $Av = \lambda v$ onde $\lambda = -\omega^2$. Os possíveis valores que ω pode assumir são as frequências naturais de vibração do sistema.

c) Se $k_1 = k_2 = k_3 = 1 \text{ kg/s}^2$ e $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ determine os auto-valores e auto-vetores de A , por método numérico à sua escolha.

7.2 - Considere o seguinte sistema de equações diferenciais, com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_3}{dx} = f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}, \quad (7.17)$$

Se escrevermos (7.17), na forma:

$$Y'(t) = AY(t),$$

então a solução geral do sistema é dado por:

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} v_k ,$$

onde: c_k são constantes arbitrárias, λ_k são os auto-valores de A e v_k seus correspondentes auto-vetores.

Considere os sistemas:

$$(I) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 10y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - 3y_2 - 7y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = 2y_2 + 6y_3 \end{cases} , \quad (II) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -10y_1 - 7y_2 + 7y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 + 5y_2 - 4y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = -7y_1 - 5y_2 + 6y_3 \end{cases} ,$$

Determine a solução geral destes sistemas, usando um método numérico à sua escolha para determinar todos os auto-valores e auto-vetores. Cuidado!! O sistema (II) possui auto-valores iguais em módulo.

7.3 - A curvatura de uma coluna delgada sujeita a uma carga P pode ser modelada por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} , \quad (7.18)$$

onde $\frac{d^2 y}{dx^2}$ especifica a curvatura, M é o momento de curvatura, E é o módulo de elasticidade, e I é o momento de inércia da seção transversal sobre o eixo neutro. Considerando o corpo livre na Figura 7.4-b é claro que o momento de curvatura em x é $M = -Py$. Substituindo esse valor na equação (7.18) resulta:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0 , \quad (7.19)$$

onde

$$p^2 = \frac{P}{EI} . \quad (7.20)$$

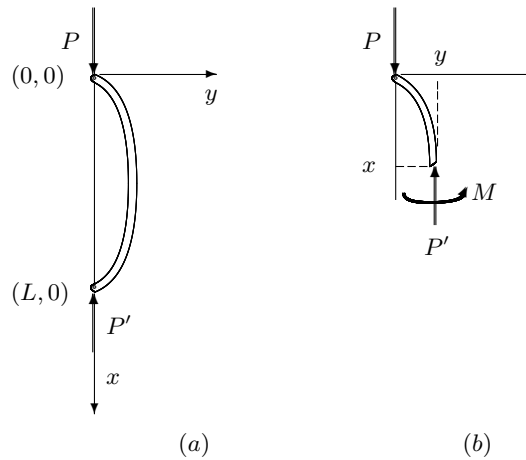


Figura 7.4

Para o sistema na Figura 7.4, sujeita às condições de contorno $y(0) = y(L) = 0$, a solução geral da equação (7.19) é:

$$y = A \sin px + B \cos px ,$$

onde A e B são constantes arbitrárias que devem ser obtidas usando-se as condições de contorno. Mostre que de $y(0) = 0$ obtêm-se $B = 0$ e de $y(L) = 0$ obtêm-se $A \sin pL = 0$. Mas desde que $A = 0$ representa a solução trivial, concluímos que $\sin pL = 0$. Assim, para que esta última igualdade seja válida devemos ter:

$$pL = n\pi , \quad n = 1, 2, \dots . \quad (7.21)$$

Portanto, existe um número infinito de valores que satisfazem as condições de contorno. A equação (7.21) pode ser resolvida para:

$$p = \frac{n\pi}{L} , \quad n = 1, 2, 3, \dots , \quad (7.22)$$

os quais são os auto-valores para a coluna. Cada auto-valor corresponde ao modo nos quais a coluna curva-se. Combinando as equações (7.20) e (7.22), segue que:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} , \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Isto pode ser entendido como uma deformação da carga porque elas representam os níveis nos quais as colunas movimentam-se em cada deformação sucessiva. Na prática, em geral, o auto-valor correspondente a $n = 1$ é o de interesse porque a quebra usualmente ocorre quando a primeira coluna se deforma. Assim, a carga crítica pode ser definida como:

$$P_{crit.} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} .$$

Uma carga sobre uma coluna de madeira possui as seguintes características: $E = 10^{10} \text{ Pa}$, $I = 1.25 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, e $L = 3 \text{ m}$. Determine o oito primeiros auto-valores, isto é, os auto-valores correspondente a $n = 1, 2, \dots, 8$ e suas correspondentes deformações das cargas. Qual o valor obtido para a carga crítica?

7.4 - No problema 7.3 foi razoavelmente fácil obter os auto-valores pois era conhecida a expressão analítica da solução, o que em geral não acontece na prática. Assim, podemos obter os auto-valores de (7.19), substituindo a derivada segunda pela diferença dividida central, isto é, substituindo $\frac{d^2 y}{dx^2}$ por:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} .$$

Fazendo isso, podemos escrever (7.20) como:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p^2 y_i = 0 ,$$

ou ainda:

$$y_{i+1} - (2 - h^2 p^2) y_i + y_{i-1} = 0 .$$

Escrevendo esta equação para uma série de nós ao longo do eixo da coluna, obtêm-se um sistema de equações homogêneas. Por exemplo, se a coluna é dividida em cinco segmentos (isto é, quatro nós interiores), o resultado é:

$$\begin{pmatrix} (2 - h^2 p^2) & -1 & & \\ -1 & (2 - h^2 p^2) & -1 & \\ & -1 & (2 - h^2 p^2) & -1 \\ & & -1 & (2 - h^2 p^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 .$$

Considerando os mesmos dados do problema 7.3 determine os auto-valores para os casos: **a)** um, **b)** dois, **c)** três e **d)** quatro nós interiores, usando método numérico à sua escolha. Lembre-se: desde que $L = 3$, segue que para um nó interior $h = \frac{3}{2}$, para dois nós interiores $h = \frac{3}{3}$, etc.

7.5 - No problema 7.4, para três nós interiores você obteve o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} (2 - 0.5625p^2) & -1 & & \\ -1 & (2 - 0.5625p^2) & -1 & \\ & -1 & (2 - 0.5625p^2) & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 .$$

a) Mostre que dividindo cada equação por h^2 , obtêm-se:

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3.556 - \lambda & -1.778 & & \\ -1.778 & 3.556 - \lambda & -1.778 & \\ & -1.778 & 3.556 - \lambda & \\ & & & \end{pmatrix}$$

onde $\lambda = p^2$, e que a expansão do determinante fornece:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 10.667\lambda^2 - 31.607\lambda + 22.487 .$$

b) Mostre que o mesmo polinômio pode ser obtido aplicando-se o método de Leverrier-Faddeev à matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 3.556 & -1.778 & & \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 & \\ & -1.778 & 3.556 & \\ & & & \end{pmatrix}$$

c) Usando o polinômio característico obtido em **b)**, determine os auto-valores de B , usando método numérico à sua escolha.

d) Usando o método de Jacobi, determine os auto-valores e auto-vetores da matriz B .