Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Centro de Tecnologia – CTEC
Departamento de Engenharia Estrutural – EES
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC

CÁLCULO VARIACIONAL

Disciplina: Métodos Matemáticos para Engenharia (EES-100)

Professor: Eduardo Nobre Lages (enl@ctec.ufal.br)

Introdução

Cálculo Diferencial *versus* **Cálculo Variacional**

Cálculo Diferencial

Busca pontos estacionários de **<u>funções</u>**

Domínio: $\Re^N$

$$\boxed{z = 3\,x\,y + \sin x}$$

Cálculo Variacional

Busca "pontos" estacionários de **<u>funcionais</u>**

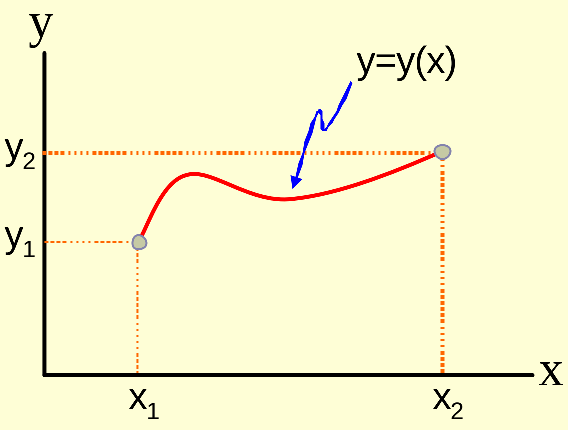
Domínio: Espaço de funções

$$\boxed{I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx}$$

Problemas Variacionais Clássicos

- **Determinação de geodésica no plano**

Qual a curva plana, descrita por uma função y(x), de menor comprimento no domínio $[x_1,x_2]$?



Funcional

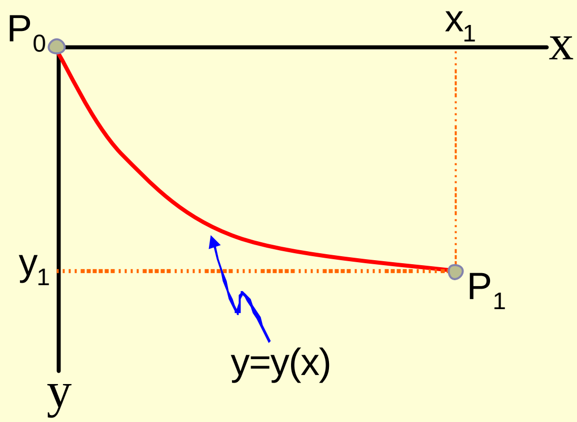
$$\boxed{L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx}$$

Solução: a reta que une os pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2).

Problemas Variacionais Clássicos

- **Problema da Braquistócrona (do grego significa *tempo mínimo*)**

Problema proposto por John Bernoulli (1696).
Sejam P_0 e P_1 dois pontos dados sobre um plano vertical. Deve ser encontrada uma curva unindo esses dois pontos de sorte que um ponto de massa **m** partindo de P_0, que a percorra sob a influência de seu peso próprio, alcance P_1 no menor tempo possível. Considere ainda a velocidade inicial v_0 conhecida.



Funcional

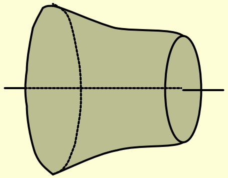
$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x) + v_0^2}}\,dx$$

Solução: ciclóide

Histórico

- Newton
  - Artigo escrito em 1671 (publicado em 1736)
  - pontos extremos – razão de mudança de f(x) é nula
  - Leibnitz (1684) – reta tangente é horizontal
- Newton
  - Estudando o arrasto em corpos axissimétricos, chegou ao funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y(x)y'(x)^3}{1+y'(x)^2}\,dx$$



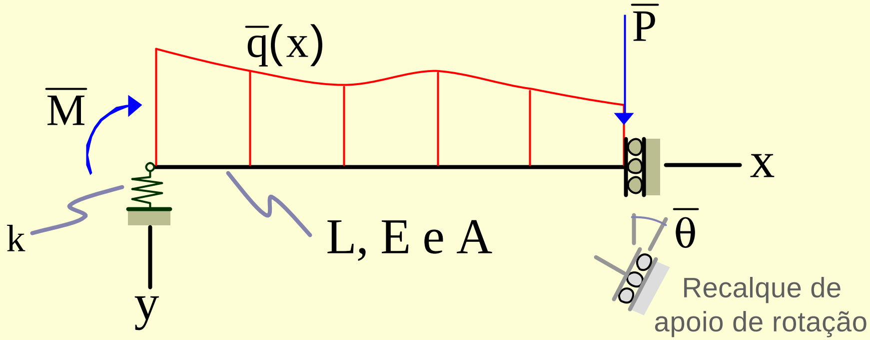
que em seu modelo físico simplificado era proporcional ao arrasto, deveria ser mínima.
  - Newton encontrou a solução, porém não fez a formalização geral para essa classe de problema.

Histórico

- John Bernoulli
  - Estabeleceu em 1696 o problema de braquistócrona
  - Soluções apresentadas por: Newton, Leibnitz, L'Hospital, o próprio Bernoulli e seu irmão James
- Leonhard Euler (1707-1783)
  - Estudante de John Bernoulli
  - Pegou a solução de James Bernoulli e desenvolveu o Cálculo Variacional como é conhecido hoje em dia.

Exemplo de Problema Variacional na Mecânica das Estruturas

- **Viga sob flexão**



Funcional da Energia Potencial Total

$$\Pi = \int_0^L \frac{EI}{2} v_{,xx}^2 \, dx + \frac{k}{2} v(0)^2 - \int_0^L \overline{q} v \, dx - \overline{M} v_{,x}(0) - \overline{P} v(L)$$

Condição da estacionariedade do funcional (P.E.P.T.E.)

$$\delta^{(1)} \Pi = 0$$

$$\int_0^L EI v_{,xx} \delta v_{,xx} \, dx + k v(0) \delta v(0) - \int_0^L \overline{q} \delta v \, dx - \overline{M} \delta v_{,x}(0) - \overline{P} \delta v(L) = 0$$

Exemplo de Problema Variacional na Mecânica das Estruturas

Integrando por partes o termo envolvendo a derivada segunda da variação do campo de deslocamento transversal

$$EIv_{,xx}\,\delta v_{,x}\Big|_0^L - \int_0^L EIv_{,xxx}\,\delta v_{,x}dx + kv(0)\delta v(0) - \int_0^L \overline{q}\delta v dx - \overline{M}\delta v_{,x}(0) - \overline{P}\delta v(L) = 0$$

Integrando por partes agora o termo envolvendo a derivada primeira da variação do campo de deslocamento transversal

$$EIv_{,xx}\,\delta v_{,x}\Big|_0^L - EIv_{,xxx}\,\delta v\Big|_0^L + \int_0^L \left(EIv_{,xxxx} - \overline{q}\right)\delta v dx + kv(0)\delta v(0) - \overline{M}\delta v_{,x}(0) - \overline{P}\delta v(L) = 0$$

Conclusão

(E.D.E.) $EIv_{,xxxx} - \overline{q} = 0$

(C.C.)
$$\begin{cases} x = 0 \quad \delta v \text{ livre} \Rightarrow EIv_{,xxx}(0) + kv(0) = 0 \text{ ou } Q(0) = kv(0) \\ x = 0 \quad \delta v_{,x} \text{ livre} \Rightarrow EIv_{,xx}(0) + \overline{M} = 0 \text{ ou } M(0) = \overline{M} \\ x = L \quad \delta v \text{ livre} \Rightarrow EIv_{,xxx}(0) + \overline{P} = 0 \text{ ou } Q(L) = \overline{P} \\ x = L \quad \delta v_{,x} \text{ impedido} \Rightarrow v_{,x}(L) = \overline{\theta} \end{cases}$$