Introdução às Equações Diferenciais

Prof. Eduardo Nobre Lages - EES/CTEC/UFAL

Contatos:

enl@ctec.ufal.br enlages@hotmail.com edunol

UFAL

Promoção: PEC/Engenharia Civil/UFAL

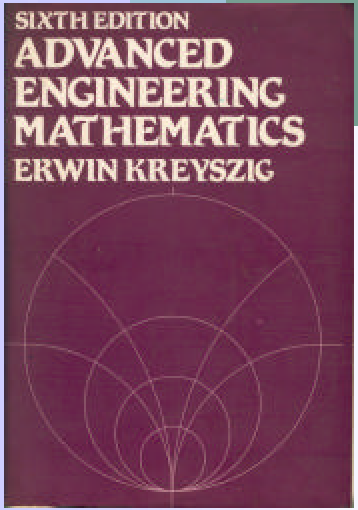
Maceió/AL

Novembro-Dezembro/2004

PEC UFAL Engenharia Civil

Programa Especial de Capacitação Discente

Introdução às Equações Diferenciais



Referência:

Advanced Engineering Mathematics

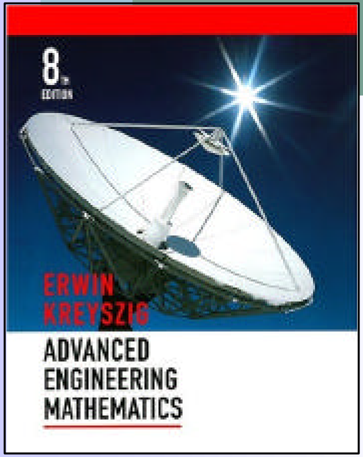
Erwin Kreyszig

6th Edition

John Wiley & Sons - New York

1988

Introdução às Equações Diferenciais



Referência:

Advanced Engineering Mathematics

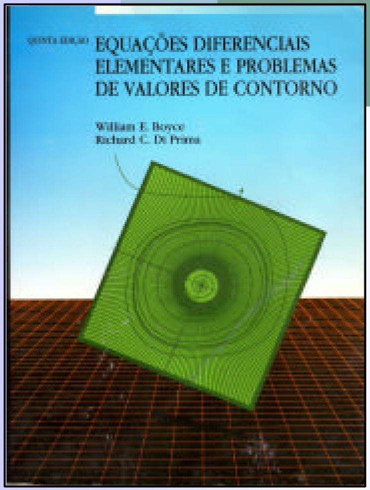
Erwin Kreyszig

8th Edition

John Wiley & Sons - New York

1998

Introdução às Equações Diferenciais



Referência:

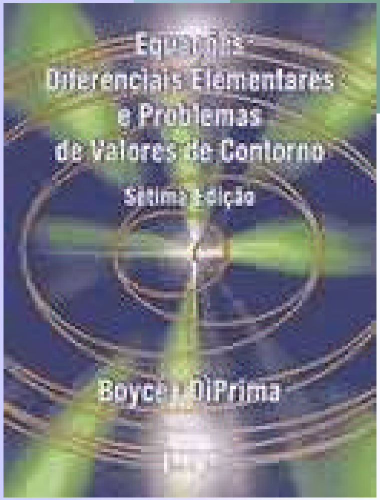
Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

William E. Boyce & Richard C. Di Prima

5ª Edição – Guanabara Koogan

1994

Introdução às Equações Diferenciais



Referência:

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

William E. Boyce & Richard C. Di Prima

7ª Edição – LTC

2002

Equações Diferenciais

- Definição: Tratam-se de equações envolvendo uma função incógnita e suas derivadas, além de variáveis independentes.

- Exemplos:

  - $9y(x)y'(x) + 4x = 0$
    - x é a variável independente
    - y(x) é a função incógnita

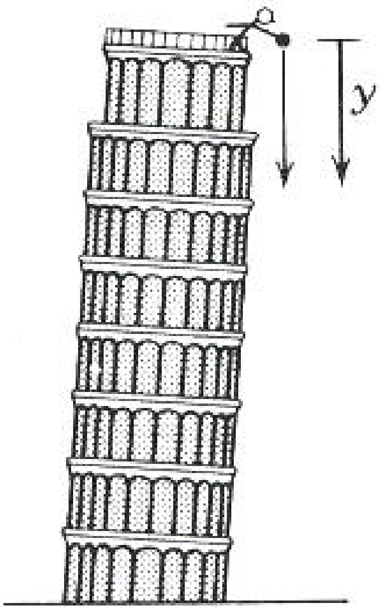
  - $\ddot{u}(x,t) = \dfrac{E}{\rho} u_{,xx}(x,t)$
    - x e t são as variáveis independentes
    - u(x,t) é a função incógnita

- Qual a motivação para se estudar equações diferenciais?

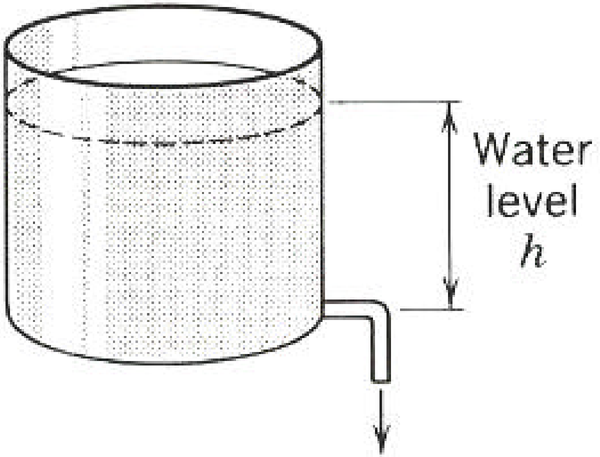
  As equações diferenciais estão presentes na formulação diferencial dos modelos representativos dos fenômenos estudados nas ciências físicas, biológicas e socias.

Equações Diferenciais

- Algumas aplicações das equações diferenciais:



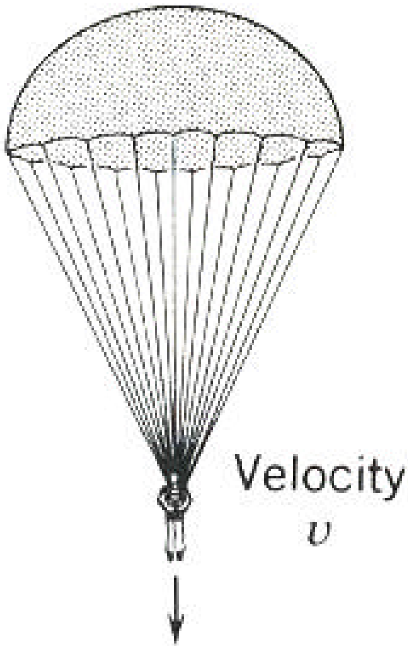
Falling stone
$y'' = g = \text{const}$



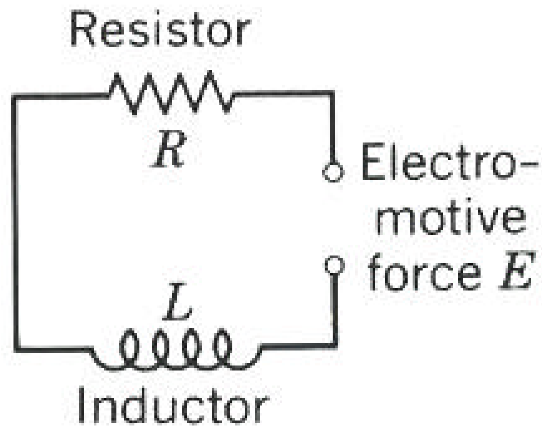
Outflowing water
$h' = -k\sqrt{h}$

Equações Diferenciais

- Algumas aplicações das equações diferenciais (continuação):



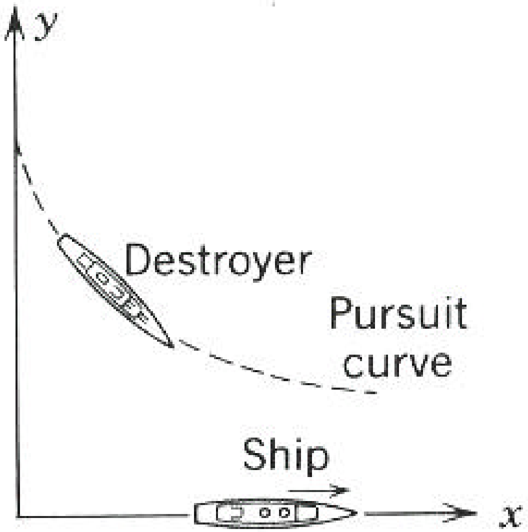
Parachutist
$mv' = mg - bv^2$



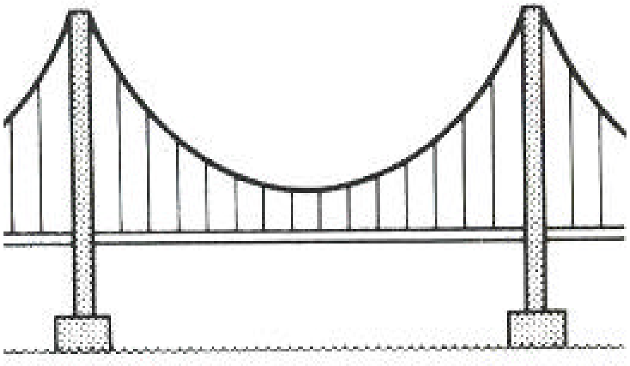
Current I in an
RL – circuit
$LI' + RI = E$

Equações Diferenciais

- Algumas aplicações das equações diferenciais (continuação):



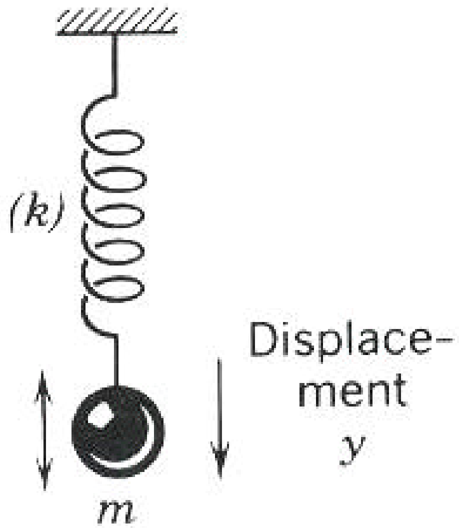
Pursuit problem
$y' = y/\sqrt{a^2 - y^2}$



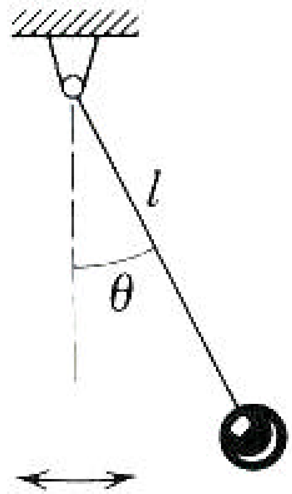
Cable of a
suspension bridge
$y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$

Equações Diferenciais

- Algumas aplicações das equações diferenciais (continuação):



Vibrating mass on a spring
$$my'' + ky = 0$$



Pendulum
$$l\theta'' + g \sin \theta = 0$$

Equações Diferenciais

- O que desejamos quando encontramos uma equação diferencial?

  Encontrar uma função incógnita que satisfaça identicamente a equação diferencial. Quando essa função é a mais geral possível, associada a constantes de integração, ela é dita <u>solução geral</u>. Quando a solução é apresentada para alguns valores específicos das constantes de integração essa é dita <u>solução particular</u>. Certas equações diferenciais possuem ainda solução que foge ao formato geral, denominada de <u>solução singular</u>.

Equações Diferenciais

- Exemplificando os tipos de solução:

$$y'(x) = y(x)$$

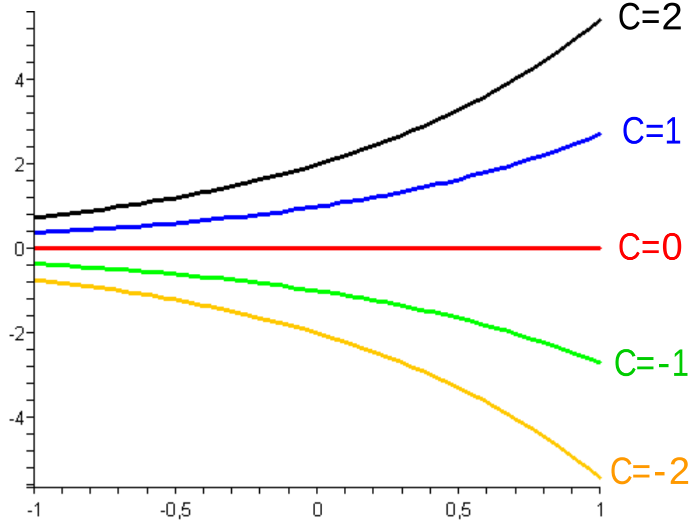
$$y(x) = Ce^{x}$$

Solução geral

$$y(x) = e^{x}$$

$$y(x) = -3e^{x}$$

Soluções particulares



Equações Diferenciais

- Exemplificando os tipos de solução (continuação):

$$y'(x)^2 - xy'(x) + y(x) = 0$$

$$y(x) = Cx - C^2$$

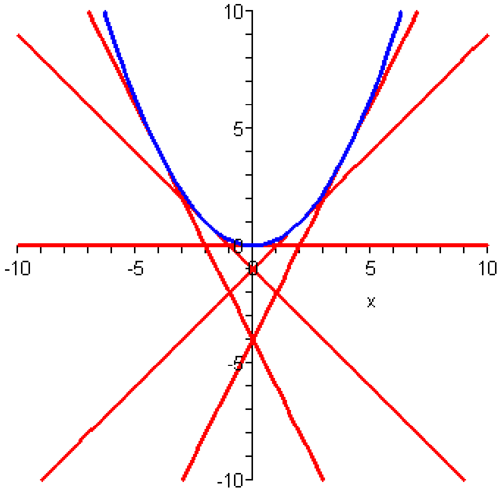
Solução geral

$$y(x) = x - 1$$
$$y(x) = 3x - 9$$

Soluções particulares

$$y(x) = \frac{x^2}{4}$$

Solução singular



Soluções particulares

Solução singular

Equações Diferenciais

- Será que nós sabemos resolver equações diferenciais?

Simmmm!!!! No curso de Cálculo Diferencial e Integral, a cada integral resolvida tinha-se uma equação diferencial solucionada.

Equações Diferenciais

- Classificações:
  - Ordinária (EDO) *versus* Parcial (EDP) – a depender se a equação diferencial apresenta uma ou mais variáveis independentes.
  - Linear *versus* Não Linear – a depender se os termos envolvendo a função incógnita e suas derivadas se apresentam na forma linear.
  - Homogênea *versus* Não Homogênea – a depender se o termo que independe da função incógnita e suas derivadas é identicamente nulo.
- Ordem de uma equação diferencial: Ordem da mais alta derivada da função incógnita presente à equação diferencial.
- Exemplos:
  - $9y(x)y'(x) + 4x = 0$ **EDO de 1ª ordem, não linear e não homogênea**
  - $\ddot{u}(x,t) = \dfrac{E}{\rho} u_{,xx}(x,t)$ **EDP de 2ª ordem, linear e homogênea**
  - $\ddot{\theta}(t) + \dfrac{L}{g} \operatorname{sen} \theta(t) = 0$ **EDO de 2ª ordem, não linear e homogênea**

EDO's – 1ª Ordem

- Formas de apresentação da equação diferencial:
  - Forma Normal $y'(x) = f(x, y(x))$

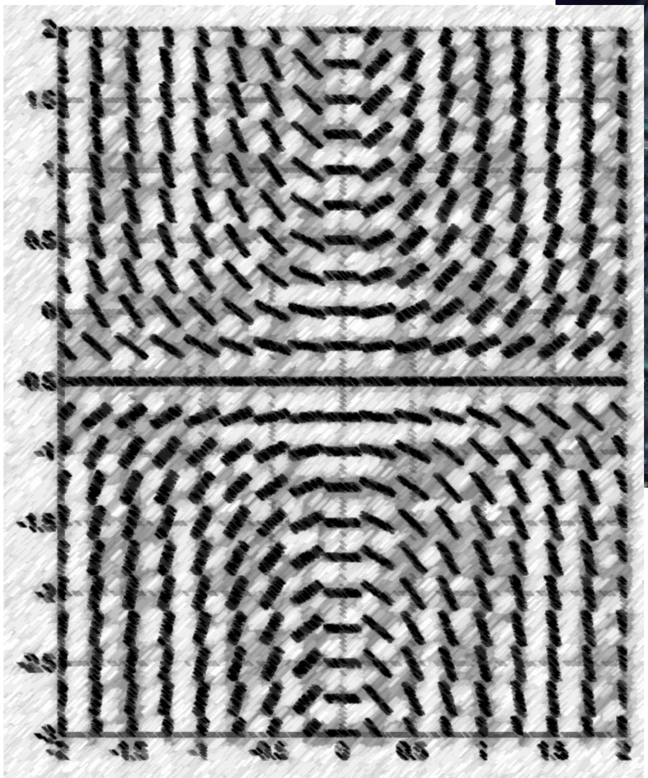
    Ex: y'=x+2xy
  - Forma Diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

    Ex: (1+2y)dx-(1/x)dy=0

- Campo de direções:
  - Baseia-se na apresentação da equação diferencial na forma normal.
  - Geometricamente a forma normal estabelece, em qualquer ponto (x,y), o valor do coeficiente angular (y'=dy/dx) da reta tangente à solução da equação diferencial neste ponto.
  - O campo de direções pode ser visualizado pelo desenho de pequenos segmentos de reta num conjunto representativo de pontos no plano xy.

EDO's – 1ª Ordem

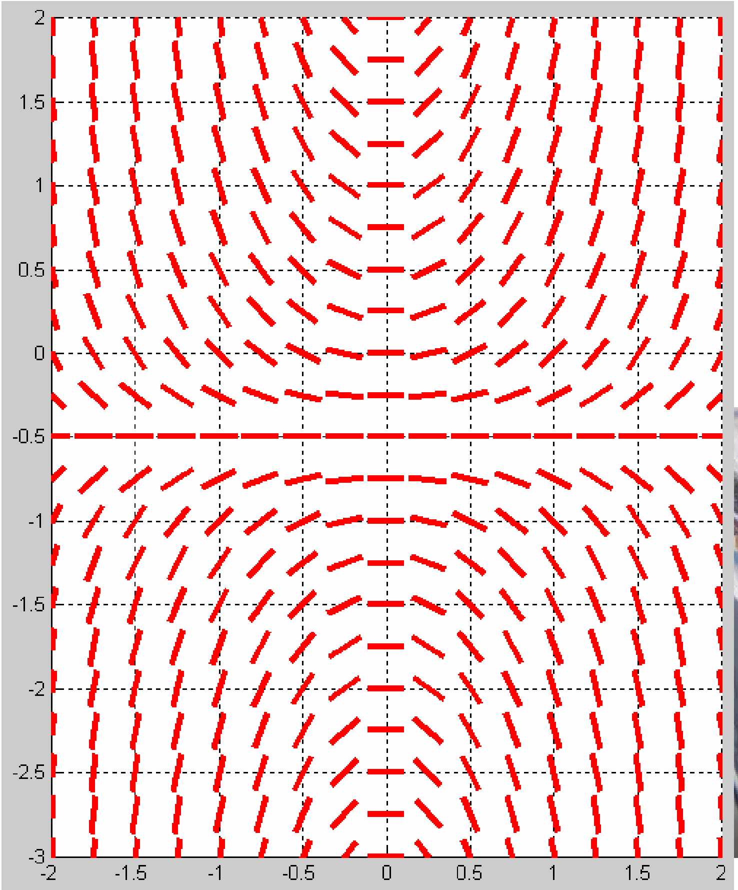
- Campo de direções (continuação):



$y' = f(x,y) = x + 2xy$

EDO's – 1ª Ordem

- Campo de direções (continuação):



y'=f(x,y)=x+2xy

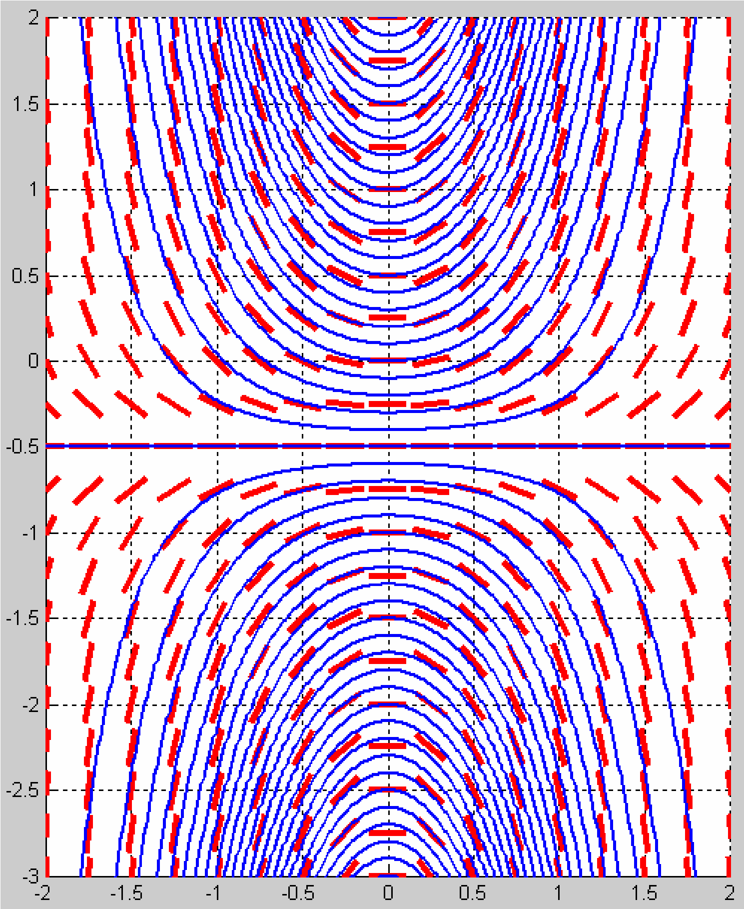
EDO’s – 1ª Ordem

- Campo de direções (continuação):

Qual a relação entre os campos de direções e as soluções das equações diferenciais?

EDO's – 1ª Ordem

- Campo de direções (continuação):



y'=f(x,y)=x+2xy

campo de direções

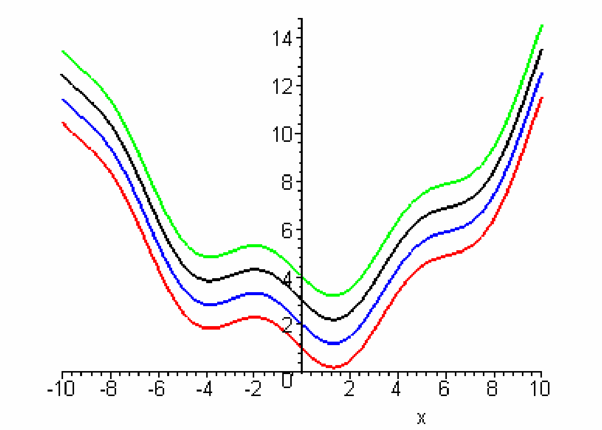
soluções

EDO's – 1ª Ordem

- Métodos de Solução:
  - Situação elementar na forma normal

$$y'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int f(x)dx + C$$

Exemplo: $y'(x) = -\cos(x) + \frac{x}{5} \Rightarrow y(x) = -\text{sen}(x) + \frac{x^2}{10} + C$



A solução representa uma família de curvas

Obs: Esta mesma sequência pode ser empregada para y'(x)=f(y), só que, neste caso, determina-se x em função de y.

EDO's – 1ª Ordem

- Métodos de Solução (continuação):
  - Situação elementar na forma diferencial

$$\underline{M(x)dx + N(y)dy = 0} \quad \Rightarrow \quad \int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

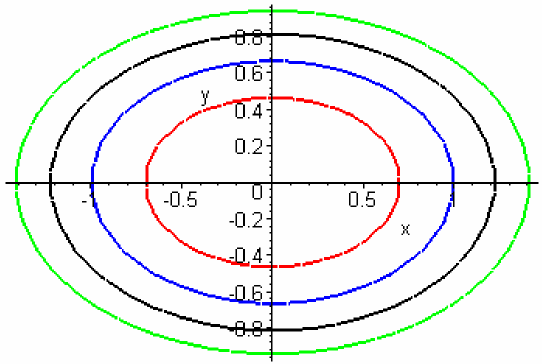
Conhecida como equação diferencial com variáveis separáveis

Exemplo: $4x + 9y(x)y'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 4x + 9y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$4xdx + 9ydy = 0 \therefore \int 4xdx + \int 9ydy = 0$$

$$\Rightarrow \underline{2x^2 + \frac{9}{2}y^2 = C}$$

A solução representa uma família de elipses centradas na origem



EDO's – 1ª Ordem

- Métodos de Solução (continuação):
  - Situação particular na forma normal que pode ser reduzida a uma equação diferencial com variáveis separáveis

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mudança de variável: $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

$$\therefore\ y(x) = u(x)x \Rightarrow y'(x) = u'(x)x + u(x)$$

Fazendo a substituição na equação original tem-se que

$$u'(x)x + u(x) = f(u) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x}dx + \frac{1}{u - f(u)}du = 0$$

Com variáveis separáveis

$$\ln(x) + \int \frac{1}{u - f(u)}du = C$$

Ao se determinar a solução implícita da ED, faz-se a substituição de u(x) por y(x)/x, definindo-se a solução em termos das variáveis originais.

EDO's – 1ª Ordem

Exemplo: $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ ou $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$

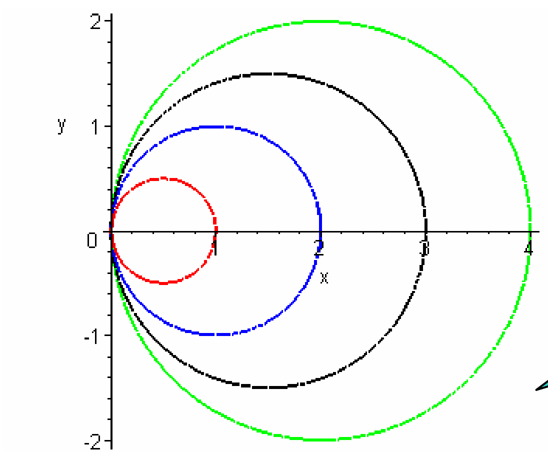
$$\therefore f(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \therefore \ln(x) + \int \frac{2u}{u^2+1} du = C$$

$$\therefore \ln(x) + \ln\left(u^2+1\right) = C \text{ ou } x\left(u^2+1\right) = K$$

Retornando às variáveis originais e arrumando a expressão tem-se que

$$x^2 + y^2 = Kx$$

A solução representa uma família de circunferências



EDO's – 1ª Ordem

- Métodos de Solução (continuação):
  - Equação diferencial exata

Definição: A equação diferencial é dita exata quando as funções M(x,y) e N(x,y) da forma diferencial gozam da propriedade

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Quando um equação diferencial é exata, então existe uma função u(x,y) tal que o seu diferencial total representa o membro esquerdo da equação diferencial, ou seja,

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ e } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

É sabido que para as funções "suaves" a derivada cruzada de segunda ordem independe da seqüência de derivação, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) \text{ ou } \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

Condição já garantida

EDO's – 1ª Ordem

- Equação diferencial exata (continuação)

Solução: Partimos de uma das igualdades entre as derivadas parciais da função u(x,y) e as funções M(x,y) e N(x,y). Considerando a primeira delas,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int M(x,y)dx + f(y)$$

Substituindo agora esse resultado na segunda igualdade tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx + f(y)\right) = N(x,y)$$

$$\therefore \frac{df(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$$

$$\Rightarrow f(y) = \int N(x,y)dy - \boxed{\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy}$$

Como du(x,y) também é igual a zero, tem-se que a função u(x,y) é uma constante, de onde se conclui que a solução implícita da equação diferencial exata é dada por

$$\int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy = C$$

EDO's – 1ª Ordem

- Equação diferencial exata (continuação)

Exemplo: $2x\,\mathrm{sen}(3y)dx + \left[3x^2\cos(3y) + 2y\right]dy = 0$

Verificando se a equação diferencial é exata

$$M(x,y) = 2x\,\mathrm{sen}(3y) \;\text{ e }\; N(x,y) = 3x^2\cos(3y) + 2y$$

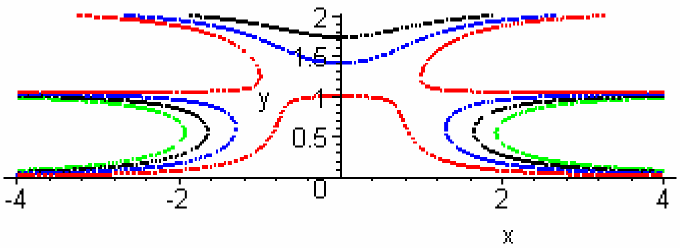
$$\text{Como } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 6x\cos(3y) \;\text{ a ED é exata.}$$

Desenvolvendo as parcelas temos

$$\int M dx = x^2\,\mathrm{sen}(3y) \;\text{ e }\; \int N dy = x^2\,\mathrm{sen}(3y) + y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) = 3x^2\cos(3y) \;\therefore\; \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right)\right]dy = x^2\,\mathrm{sen}(3y)$$

chegando-se à solução implícita: $\underline{x^2\,\mathrm{sen}(3y) + y^2 = C}$



EDO's – 1ª Ordem

- Fator de integração de uma ED não exata:
  - Motivação - É possível transformar uma ED exata em uma não exata multiplicando-a por uma certa função.

Exemplo:

$$xydx + \frac{x^2}{2}dy = 0 \text{ é } \underline{\text{exata}}\text{, porém } ydx + \frac{x}{2}dy = 0 \text{ é } \underline{\text{não exata}}.$$

  - Idéia – Encontrar uma certa função (*fator de integração*) que transforme uma ED não exata em um exata.

$$\text{Considerar que } M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{ seja não exata.}$$

Problema

$$F(x,y) = ? \mid FMdx + FNdy = 0 \text{ seja exata} \therefore \underline{\frac{\partial}{\partial y}(FM) = \frac{\partial}{\partial x}(FN)}$$

Este problema é mais complicado que o original. Troquei uma EDO por uma EDP.

EDO's – 1ª Ordem

- Fator de integração de uma ED não exata (continuação):

Vamos supor que o fator de integração seja função apenas de uma das variáveis, ou seja, F=F(x) ou F=F(y).

EDO's – 1ª Ordem

- Fator de integração de uma ED não exata (continuação):

$$\text{Se } F = F(x)\text{, então } \frac{\partial}{\partial y}(FM) = \frac{\partial}{\partial x}(FN) \Rightarrow F\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{dF}{dx}N + F\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

F=F(x) só existirá se o membro à direita for independente da variável y.

Possibilidades:

• O membro à direita independe de y – Determinamos o fator de integração, reescrevemos a ED (agora exata) e solucionamos com o método já apresentado.

• Caso contrário – Tentamos encontrar um fator de integração que só dependa da variável y, ou seja, F=F(y).

$$\Rightarrow \frac{1}{F}\frac{dF}{dy} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

F=F(y) só existirá se o membro à direita for independente da variável x.

EDO's – 1ª Ordem

- Fator de integração de uma ED não exata (continuação):

Exemplo: $(4x+3y^2)dx+2xydy=0$

$$M(x,y)=4x+3y^2 \;\text{ e }\; N(x,y)=2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=6y \neq \frac{\partial N}{\partial x}=2y \;\therefore\; \underline{\text{ED não exata}}$$

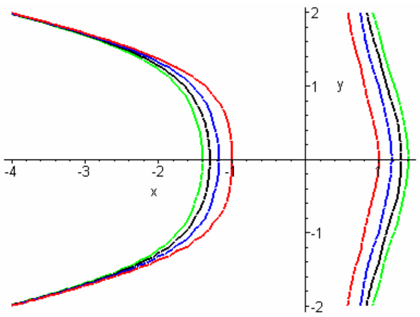
Existe algum fator de integração do tipo F=F(x)?

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{2xy}(6y-2y)=\frac{2}{x} \;\therefore\; F=F(x) \;\; \underline{\text{é possível}}$$

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=\frac{2}{x} \;\therefore\; \frac{1}{F}dF=\frac{2}{x}dx \;\therefore\; \ln(F)=2\ln(x) \Rightarrow \underline{F(x)=x^2}$$

Trabalhando as etapas posteriores chegamos a seguinte solução implícita da equação diferencial

$$\underline{x^4+x^3y^2=C}$$



EDO's – 1ª Ordem

- Equação diferencial ordinária linear:
  - Formato $y'(x)+p_0(x)y(x)=q(x)$
  - Homogênea $y'(x)+p_0(x)y(x)=0$

    Solução:

    Na forma diferencial $p_0(x)dx+\frac{1}{y}dy=0$

    Variáveis separáveis

    Empregando o procedimento já apresentado

$$\int p_0(x)dx+\int\frac{1}{y}dy=C$$

$$\int p_0(x)dx+\ln(y)=C$$

$$\ln(y)=C-\int p_0(x)dx$$

$$y(x)=e^{C-\int p_0(x)dx}$$

$$y(x)=e^{C}e^{-\int p_0(x)dx}$$

$$y(x)=Ke^{-\int p_0(x)dx}$$

Solução geral

EDO's – 1ª Ordem

- Equação diferencial ordinária linear (continuação):
  - Não Homogênea $y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x)$

Solução:

Na forma diferencial $\left(p_0(x)y - q(x)\right)dx + dy = 0$

Não exata

Procurando um fator de integração no formato F=F(x)

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = p_0(x) \therefore \text{é possível}$$

$$\frac{1}{F}dF = p_0(x)dx \therefore \ln(F) = \int p_0(x)dx \Rightarrow F(x) = e^{\int p_0(x)dx}$$

Desenvolvendo o procedimento já apresentado

$$e^{\int p_0(x)dx}\left(p_0(x)y - q(x)\right)dx + e^{\int p_0(x)dx}dy = 0$$

$$\int M(x,y)dx = \int e^{\int p_0(x)dx}p_0(x)ydx - \int e^{\int p_0(x)dx}q(x)dx \quad \text{e} \quad \int N(x,y)dy = e^{\int p_0(x)dx}y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) = \int e^{\int p_0(x)dx}p_0(x)dx \therefore \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy = y\int e^{\int p_0(x)dx}p_0(x)dx$$

$$\cancel{\int e^{\int p_0(x)dx}p_0(x)ydx} - \int e^{\int p_0(x)dx}q(x)dx + e^{\int p_0(x)dx}y - \cancel{y\int e^{\int p_0(x)dx}p_0(x)dx} = C$$

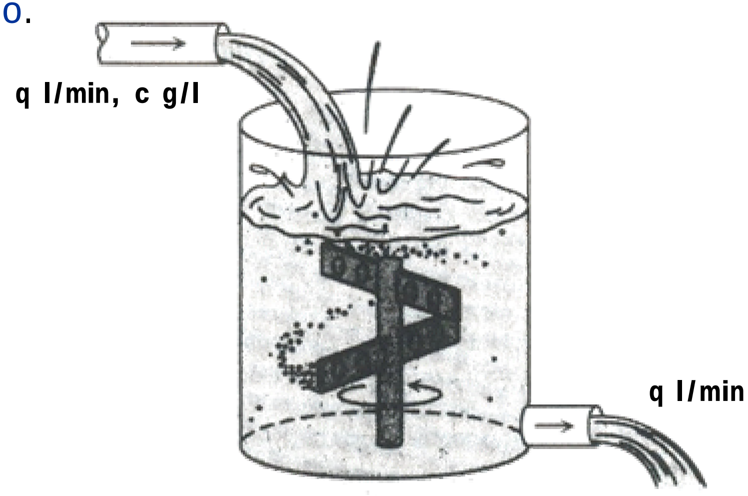
$$\therefore y(x) = e^{-\int p_0(x)dx}\left(\int e^{\int p_0(x)dx}q(x)dx + C\right)$$

Solução geral

EDO's – 1ª Ordem

- Aplicações das EDO's de primeira ordem:

Aplicação 1: Em um reservatório, armazena-se uma quantidade conhecida de um produto dissolvido em um volume de água. A partir de um dado instante, este reservatório passa a ser abastecido por uma tubulação que despeja uma solução desse produto em uma concentração de **c** g/l, a uma vazão de **q** l/min. Neste mesmo instante, abre-se um orifício na parte inferior do reservatório, permitindo-se um vazão de saída também de **q** l/min. Pede-se encontrar o histórico da quantidade do produto em pauta no reservatório.



EDO's – 1ª Ordem

Aplicação 1: Dissolução (continuação)

EDO

$$\frac{dQ(t)}{dt} = q\left(c - \frac{Q(t)}{V}\right)$$

Forma normal

$$q\,dt + \frac{V}{Q - cV}\,dQ = 0$$

Forma diferencial

Condição inicial

$$Q(0) = Q_0$$

Solução

$$Q(t) = \underbrace{cV\left(1 - e^{-\frac{q}{V}t}\right)}_{\text{Contribuição da vazão de entrada}} + \underbrace{Q_0 e^{-\frac{q}{V}t}}_{\text{Contribuição da quantidade inicial}}$$

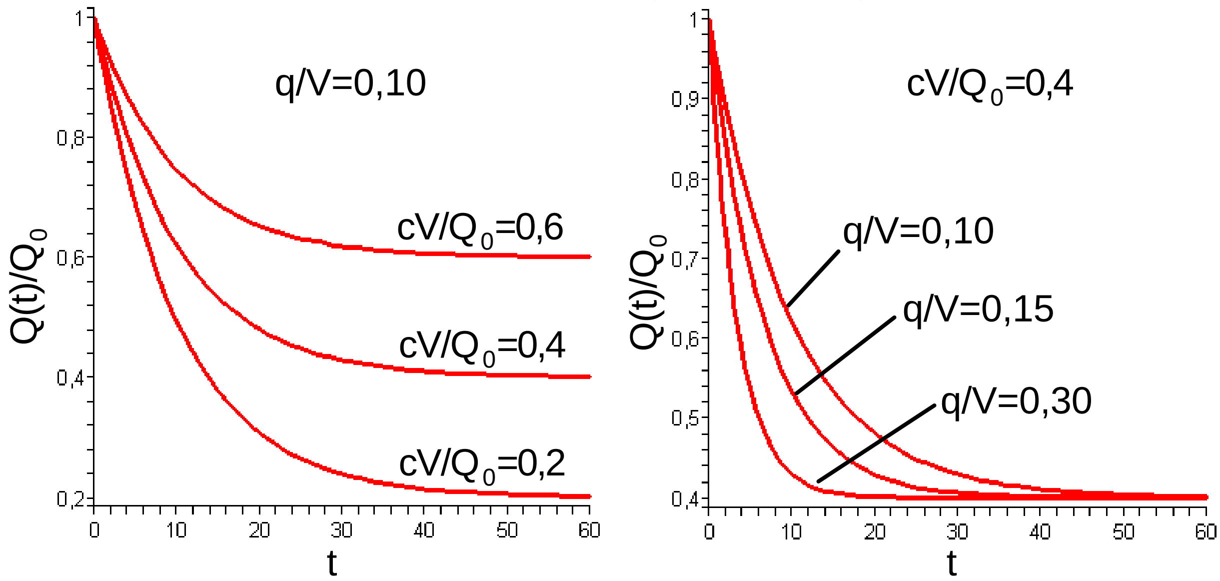
EDO's – 1ª Ordem

Aplicação 1: Dissolução (continuação)

Solução normalizada

Dois parâmetros de influência do modelo

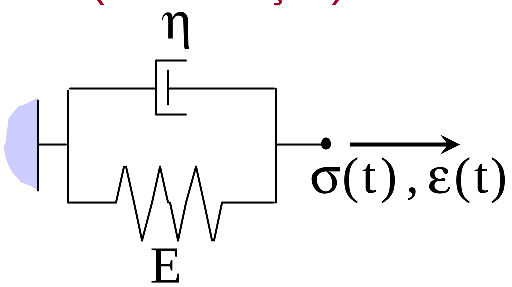
$$\frac{Q(t)}{Q_0} = \frac{cV}{Q_0}\left(1 - e^{-\frac{q}{V}t}\right) + e^{-\frac{q}{V}t}$$



EDO's – 1ª Ordem

- Aplicações das EDO's de primeira ordem (continuação):

Aplicação 2: Modelo linear de Kelvin



Por equilíbrio $\sigma(t) = \sigma_M(t) + \sigma_A(t) \therefore \sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t)$

$$\text{ou } \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\eta}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

EDO Linear Não Homogênea

Solucionando a equação diferencial resultante

$$\varepsilon(t) = e^{-\int \frac{E}{\eta}dt}\left(\int e^{\int \frac{E}{\eta}dt}\,\frac{\sigma(t)}{\eta}dt + C\right)$$

$$\therefore \varepsilon(t) = e^{-\frac{E}{\eta}t}\left(\int e^{\frac{E}{\eta}t}\,\frac{\sigma(t)}{\eta}dt + C\right)$$

Solução geral dependente da função de "carregamento"

EDO's – 1ª Ordem

Aplicação 2: Modelo linear de Kelvin (continuação)

No ensaio de fluência $\sigma(t)=\overline{\sigma}$

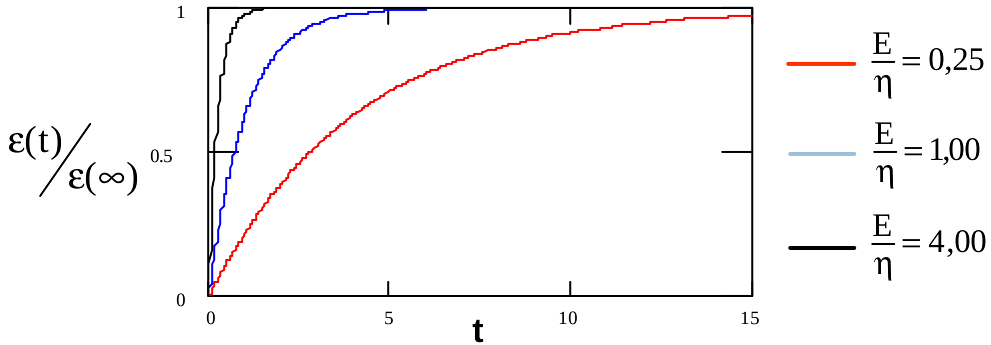
$$\varepsilon(t)=e^{-\frac{E}{\eta}t}\left(\int e^{\frac{E}{\eta}t}\frac{\overline{\sigma}}{\eta}dt+C\right)\therefore \varepsilon(t)=e^{-\frac{E}{\eta}t}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\eta}\int e^{\frac{E}{\eta}t}dt+C\right)$$

$$\therefore \varepsilon(t)=e^{-\frac{E}{\eta}t}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\eta}\frac{\eta}{E}e^{\frac{E}{\eta}t}+C\right)\therefore \varepsilon(t)=\frac{\overline{\sigma}}{E}+Ce^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Solução geral

Impondo a condição inicial do problema

$$\varepsilon(0)=0\therefore \frac{\overline{\sigma}}{E}+C=0\therefore C=-\frac{\overline{\sigma}}{E}\Rightarrow \varepsilon(t)=\frac{\overline{\sigma}}{E}\left(1-e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$$



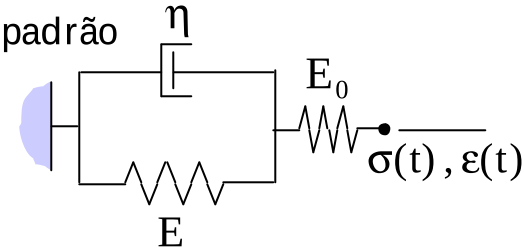
$$J(t)=\frac{\varepsilon(t)}{\overline{\sigma}}$$

Módulo de Fluência do Material

EDO's – 1ª Ordem

- Aplicações das EDO's de primeira ordem (continuação):

Aplicação 3: Modelo do sólido linear padrão



Por equilíbrio $\sigma(t)=\sigma_0(t)=\sigma_1(t)$

Das relações constitutivas $\sigma_0(t)=E_0\varepsilon_0(t)$ e $\sigma_1(t)=E\varepsilon_1(t)+\eta\dot{\varepsilon}_1(t)$

Da equação de compatibilidade $\varepsilon(t)=\varepsilon_0(t)+\varepsilon_1(t)$

$$\dot{\varepsilon}(t)+\frac{E}{\eta}\varepsilon(t)=\frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0}+\frac{\sigma(t)}{\eta}\left(1+\frac{E}{E_0}\right)$$

É necessário prescrever a tensão ou a deformação em função do tempo

No ensaio de fluência $\sigma(t)=\overline{\sigma}$

$$\dot{\varepsilon}(t)+\frac{E}{\eta}\varepsilon(t)=\frac{\overline{\sigma}}{\eta}\left(1+\frac{E}{E_0}\right)$$ + Condição inicial $\varepsilon(0)=\dfrac{\overline{\sigma}}{E_0}$

$$\varepsilon(t)=\frac{\overline{\sigma}}{E_0}+\frac{\overline{\sigma}}{E}\left(1-e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$$

EDO's – 1ª Ordem

Aplicação 3: Modelo do sólido linear padrão (continuação)

No ensaio de relaxação $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}$

$$\frac{E}{\eta}\bar{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\eta}\left(1 + \frac{E}{E_0}\right)$$

ou

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E_0 + E}{\eta}\sigma(t) = \frac{E_0 E}{\eta}\bar{\varepsilon}$$

\+

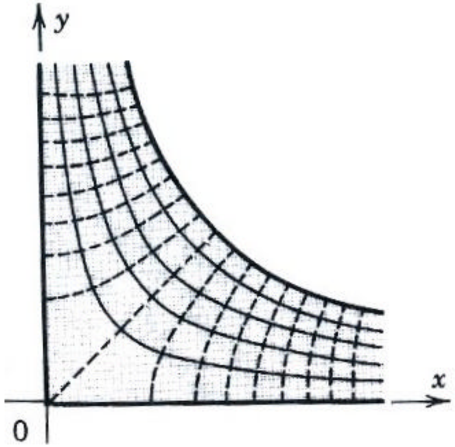
Condição inicial $\sigma(0) = E_0\bar{\varepsilon}$

$$\sigma(t) = \frac{E_0\bar{\varepsilon}}{E_0 + E}\left(E + E_0 e^{-\left(\frac{E_0+E}{\eta}\right)t}\right)$$

EDO's – 1ª Ordem

- Aplicações das EDO's de primeira ordem (continuação):

Aplicação 4: Em muitos problemas de engenharia, assim como em outras áreas, conhecida uma família de curvas, busca-se uma outra família de curvas que interceptam perpendicularmente as curvas da família inicial. As curvas dessa segunda família são denominadas trajetórias ortogonais. No escoamento de fluido, as trajetórias descritas pelas partículas fluidas chamam-se linhas de corrente, e as trajetórias ortogonais são denominadas de linhas equipotenciais. Para um escoamento em torno de um canto ortogonal as linhas de corrente são dadas por xy=c. Encontrar as expressões das linhas equipotenciais, representadas na figura abaixo pela curvas tracejadas.

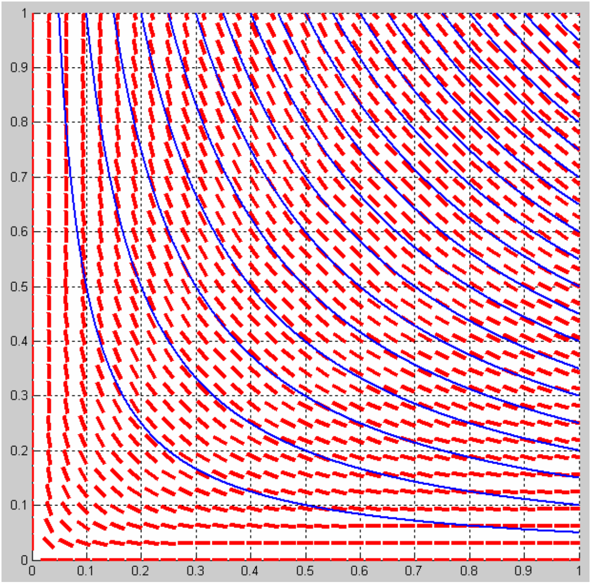


EDO's – 1ª Ordem

Aplicação 4: Determinação de trajetórias ortogonais (continuação)

Linhas de corrente

$$\boxed{xy = c} \quad \xrightarrow{\text{Derivada implícita}} \quad \boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$



campo de direções

linhas de corrente

EDO's – 1ª Ordem

Aplicação 4: Determinação de trajetórias ortogonais (continuação)

Linhas equipotenciais

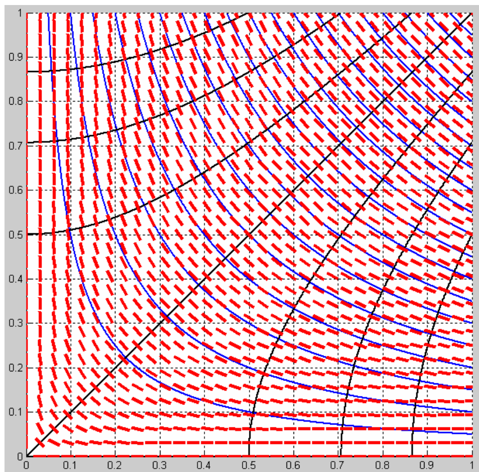
EDO

$$y' = \frac{x}{y}$$

Variáveis separáveis

Solução geral

$$y = \sqrt{C + x^2}$$



campo de direções

linhas de corrente

linhas equipotenciais

EDO's – 1ª Ordem

- Programas comerciais de matemática simbólica:

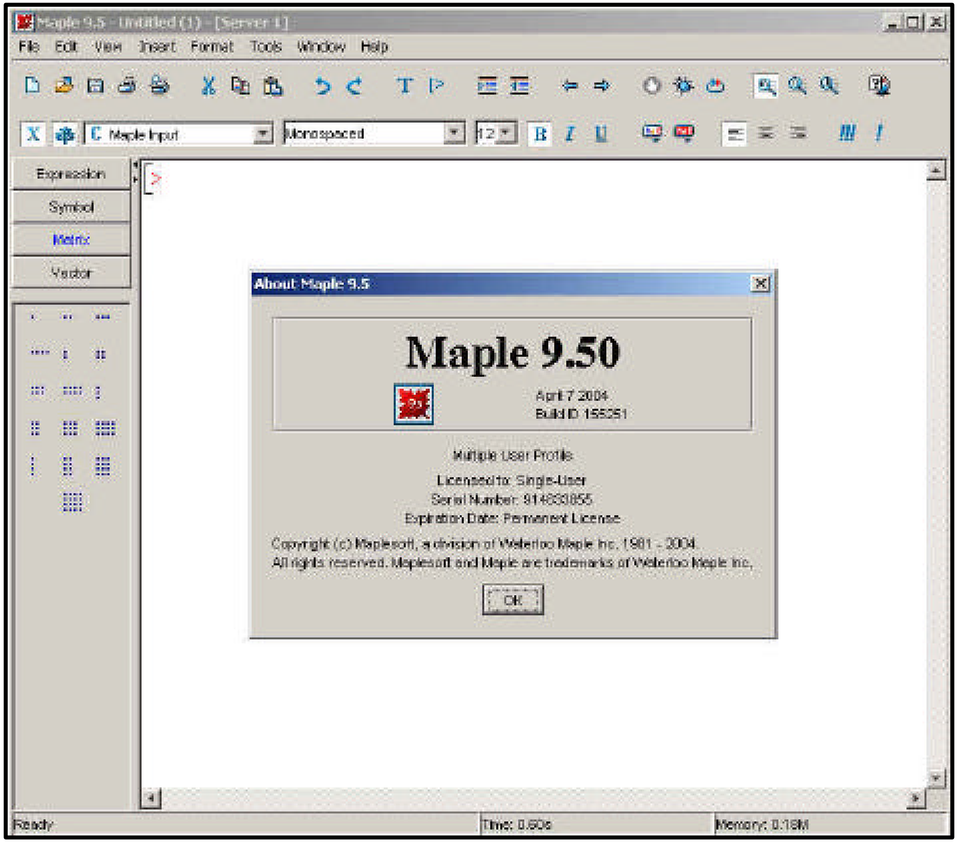
  Resolução analítica e/ou numérica

➢ Derive	(http://www.mathware.com)
➢ Mathcad	(http://www.mathcad.com)
➢ Mathematica	(http://www.wolfram.com)
➢ Matlab	(http://www.mathworks.com)
➢ Maple	(http://www.maplesoft.com)

EDO's – 1ª Ordem

- Programas comerciais de matemática simbólica (continuação):

Maple



EDO's – 1ª Ordem

- Programas comerciais de matemática simbólica (continuação):

Maple

dsolve - solve ordinary differential equations (ODEs)

Calling Sequences

dsolve(ODE)

dsolve(ODE, y(x), extra_args)

dsolve({ODE, ICs}, y(x), extra_args)

dsolve({sysODE, ICs}, {funcs}, extra_args)

Parameters

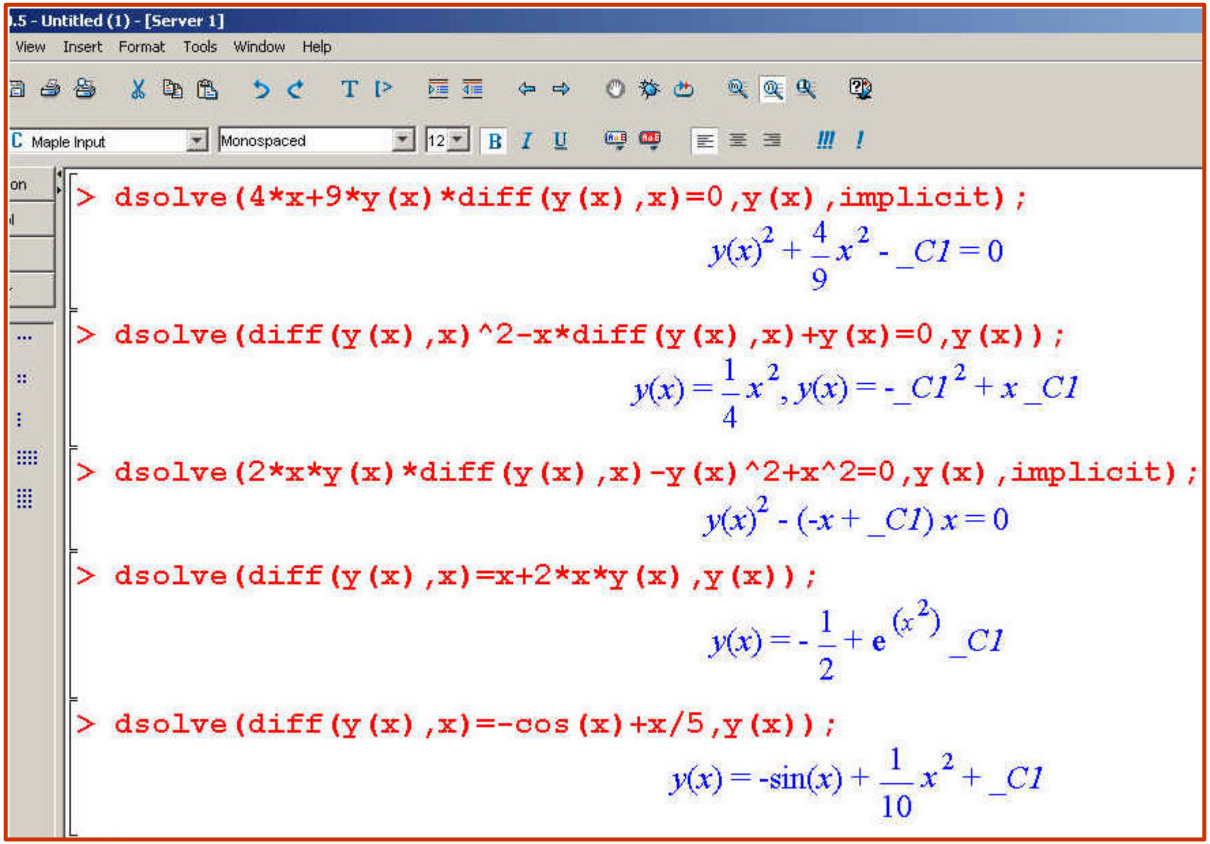
`ODE`	–	ordinary differential equation
`y(x)`	–	indeterminate function of one variable
`ICs`	–	initial conditions
`{sysODE}`	–	set with a system of ODEs
`{funcs}`	–	set with indeterminate functions
`extra_args`	–	(optional) depends on the type of problem being solved (see below)

Herein **{x, y(x)}** represent any pair of independent and dependent variables.

EDO's – 1ª Ordem

- Programas comerciais de matemática simbólica (continuação):

Maple



EDO's – 1ª Ordem

- Métodos numéricos:

Motivação: É possível empregar os conhecimentos do Cálculo Diferencial para a determinação da solução particular aproximada do problema de valor inicial (PVI) dado por

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

EDO

$$y(a) = y_0$$

Condição inicial

Métodos a serem discutidos:

- Método de Taylor
- Método de Euler
- Método do Ponto Médio

Outros métodos:

- Método de Euler Melhorado
- Método de Euler Modificado
- Método de Runge-Kutta

EDO's – 1ª Ordem

- Métodos numéricos (continuação):

  Método de Taylor:

  Baseia-se na representação da solução particular da equação diferencial em série polinomial (série de Taylor).

  Do Cálculo Diferencial, sabe-se que uma função y(x) pode ser representada, a partir de um ponto x=a, através da seguinte série polinomial:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{y^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \ldots$$

ou

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

  A série em pauta é encontrada forçando-se que esta possui o mesmo valor da função y(x) e de suas infinitas derivadas em x=a.

EDO's – 1ª Ordem

Método de Taylor (continuação):

Exemplo:

Qual a série de Taylor da função y(x)=sen(x) em relação ao ponto x=0?

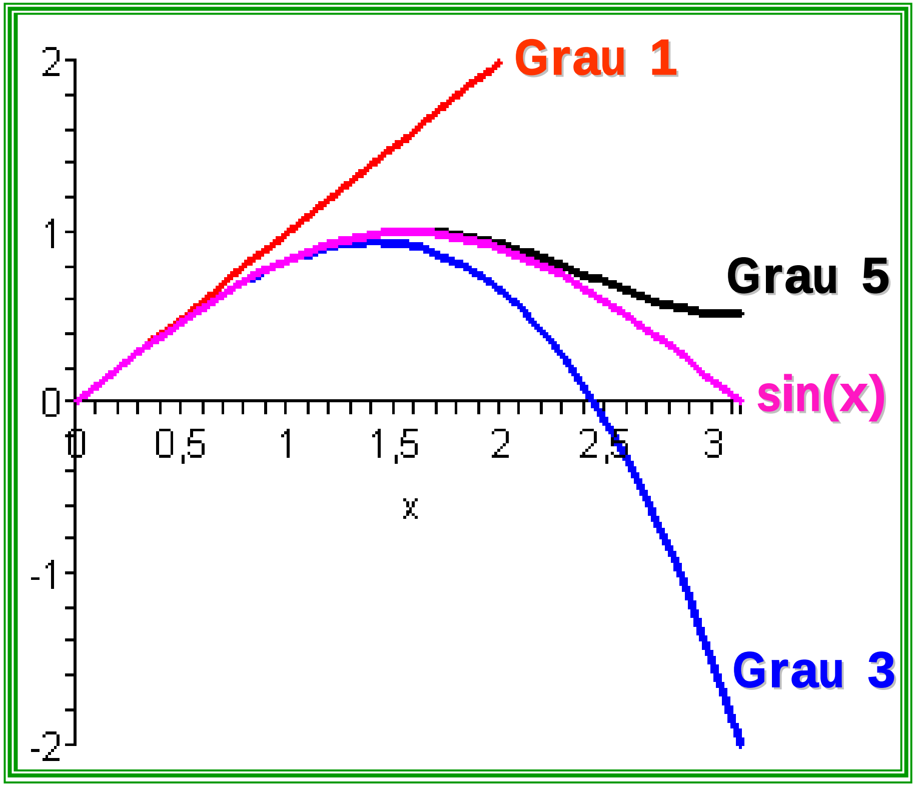
$$
\begin{aligned}
& y(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow y(0) = 0 \\
& y'(x) = \cos(x) \Rightarrow y'(0) = 1 \\
& y''(x) = -\operatorname{sen}(x) \Rightarrow y''(0) = 0 \\
& y'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow y'''(0) = -1 \\
& \ldots \\
& y(x) = \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots
\end{aligned}
$$

Se a série for truncada até um número finito de termos, passaríamos a ter uma representação aproximada para a função y(x).

EDO's – 1ª Ordem

Método de Taylor (continuação):

Exemplo (continuação):



EDO's – 1ª Ordem

Método de Taylor (continuação):

Como gerar a série de Taylor da solução particular do PVI dado por $y'(x)=f(x,y(x))$ com $y(a)=y_0$?

$$\boxed{y(a)=y_0}$$

$$\boxed{y'(a)=f(a,y(a))=f(a,y_0)}$$

$$\boxed{y''(a)=?}$$

$$\boxed{y'''(a)=?}$$

...

EDO's – 1ª Ordem

Método de Taylor (continuação):

Como gerar a série de Taylor da solução particular do PVI dado por $y'(x)=f(x,y(x))$ com $y(a)=y_0$? (continuação)

$$\boxed{y''(a)=?}$$

$$y''(x)=\left(y'(x)\right)'=\frac{d}{dx}f(x,y(x))=$$

$$f_{,x}+f_{,y}\frac{dy(x)}{dx}=f_{,x}+ff_{,y}$$

$$\therefore\quad y''(a)=f_{,x}(a,y_0)+f(a,y_0)f_{,y}(a,y_0)$$

EDO's – 1ª Ordem

Método de Taylor (continuação):

Como gerar a série de Taylor da solução particular do PVI dado por $y'(x)=f(x,y(x))$ com $y(a)=y_0$? (continuação)

$$\boxed{y'''(a)=?}$$

$$y'''(x)=\left(y''(x)\right)'=\frac{d}{dx}\left(f_{,x}+ff_{,y}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{,x}+ff_{,y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f_{,x}+ff_{,y}\right)\frac{dy}{dx}=$$

$$f_{,xx}+2ff_{,xy}+f_{,x}f_{,y}+f^{2}f_{,yy}+ff_{,y}^{2}$$

$$\therefore\quad y''(a)=f_{,xx}(a,y_0)+f_{,x}(a,y_0)f_{,y}(a,y_0)+$$
$$f(a,y_0)\left[2f_{,xy}(a,y_0)+f(a,y_0)f_{,yy}(a,y_0)+f_{,y}(a,y_0)^{2}\right]$$

EDO's – 1ª Ordem

Método de Taylor (continuação):

Exemplo:

Considere o PVI dado por

$$y'(x) = -y(x) \quad \text{com} \quad y(0) = 1$$

A solução analítica da EDO pode ser determinada considerando-a com variáveis separáveis, de onde se conclui que

$$y(x) = e^{-x}$$

De acordo com o Método de Taylor, as derivadas da solução em x=0 necessárias para a construção da respectiva série são dadas por

$$y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = -y'(0) = 1, \;\; \text{etc}$$

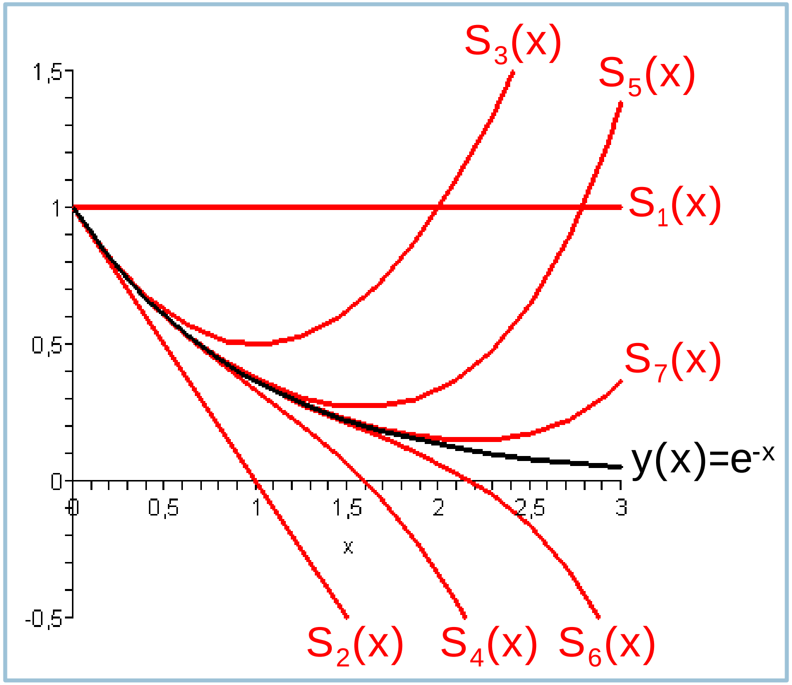
chegando-se a

$$y(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

EDO's – 1ª Ordem

Método de Taylor (continuação):

Exemplo (continuação):



- **Intervalo** *versus* **Precisão** *versus* **Termos da série**
- **Termos da série** *versus* **Derivadas parciais** *versus* **Tédio**

EDO's – 1ª Ordem

- Métodos numéricos (continuação):

  Método de Euler:

  Baseia-se na representação da solução particular da equação diferencial em série polinomial truncada (série de Taylor) até o termo linear, não sendo exigida com isso nenhuma dedução extra, porém o intervalo de interesse é subdividido em vários subintervalos.

  Se for empregado intervalos uniformes de passo *h*, este método resulta na seguinte equação de recorrência:

$$\boxed{\tilde{y}(x_{n+1}) = \tilde{y}(x_n) + y'(x_n)h}$$

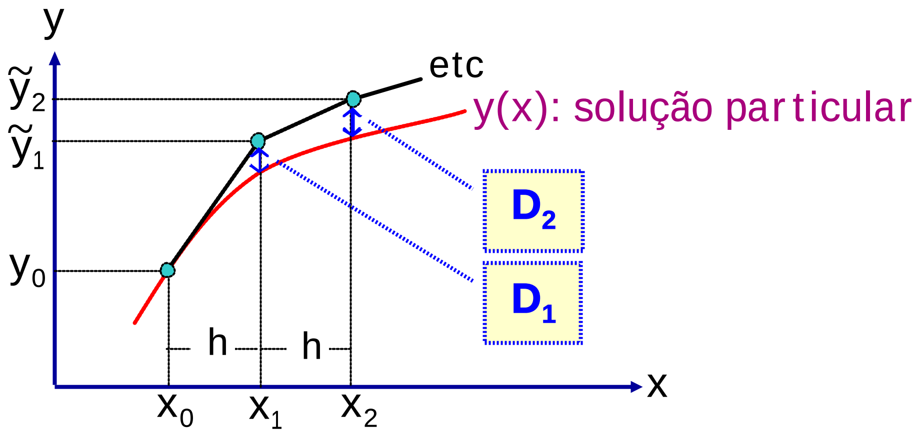
ou

$$\boxed{\tilde{y}(x_{n+1}) = \tilde{y}(x_n) + f\left[x_n, \tilde{y}(x_n)\right]h}$$

EDO's – 1ª Ordem

- Métodos numéricos (continuação):

  Método de Euler (continuação):



Supondo que y''(x) seja contínua e $|f_{,y}(x,y)| = L$ dentro do domínio de interesse, tendo ainda $|y''(x)| = M$, é possível mostrar que

$$\boxed{|D_n| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{(x_n - x_0)L} - 1\right]}$$

onde D_n representa o erro absoluto, ou seja,

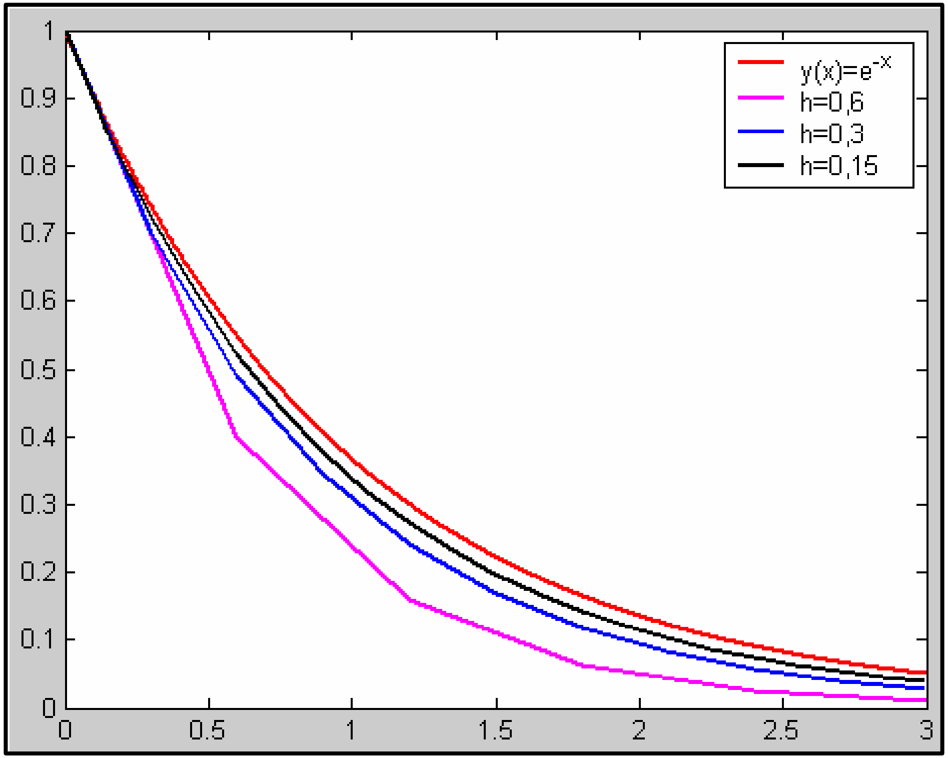
$$D_n = y(x_n) - \tilde{y}(x_n)$$

EDO's – 1ª Ordem

Método de Euler (continuação):

Exemplo:

Considere o PVI dado por $y'(x) = -y(x) \text{ com } y(0) = 1$



EDO's – 1ª Ordem

- Métodos numéricos (continuação):

  Método do Ponto Médio:

  Trata-se de um método com grau de precisão mais alto que o Método de Euler.
  Para dedução da equação de recorrência, estimam-se os valores da solução particular em vizinhanças de $x=x_n$ através da série de Taylor truncada no termo quadrático (daí apresentar uma melhor precisão). Com isso,

$$\tilde{y}(x_{n+1}) = \tilde{y}(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2$$

$$\tilde{y}(x_{n-1}) = \tilde{y}(x_n) - y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2$$

  Substraindo-se as partes acima, tem-se

$$\tilde{y}(x_{n+1}) - \tilde{y}(x_{n-1}) = 2y'(x_n)h$$

  que leva a

$$\tilde{y}(x_{n+1}) = \tilde{y}(x_{n-1}) + 2f\left[x_n, \tilde{y}_n\right]h$$

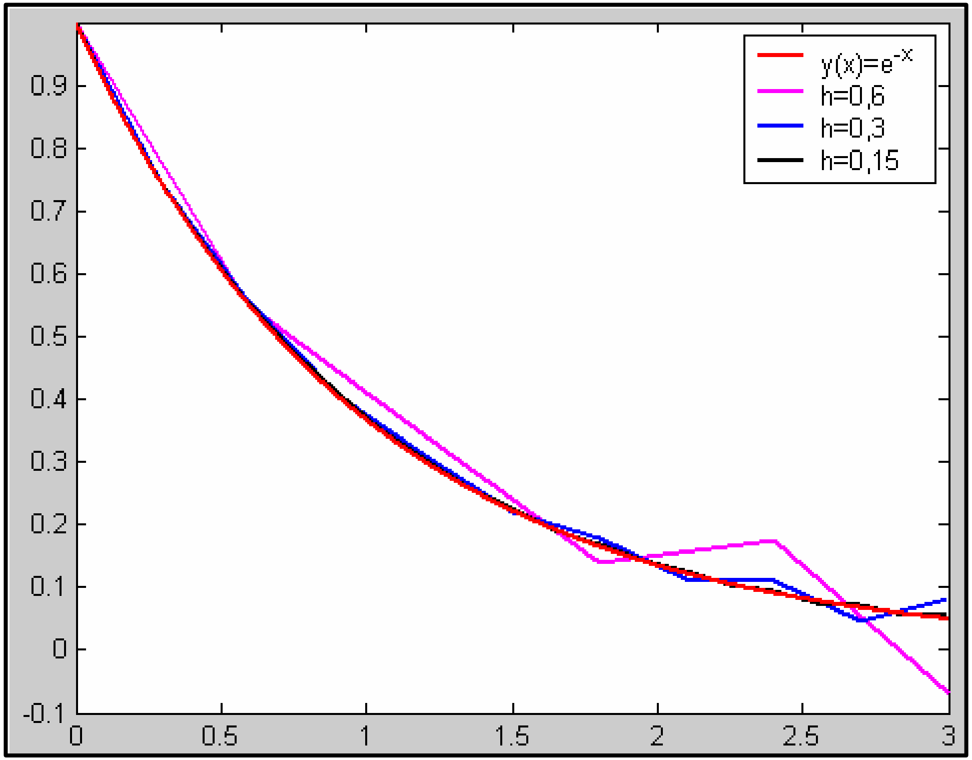
Exige um tratamento particular no 1º passo

EDO's – 1ª Ordem

Método do Ponto Médio (continuação):

Exemplo:

Considere o PVI dado por $y'(x) = -y(x)$ com $y(0) = 1$



EDOL's – 2ª Ordem

- Equação diferencial ordinária linear:
  - Formato geral $y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_0(x)y(x)=q(x)$
    - $q(x)\equiv 0 \Rightarrow$ homogênea

      caso contrário $\Rightarrow$ não homogênea
    - $p_0(x)$ e $p_1(x)$ são funções constantes $\Rightarrow$ com coeficientes constantes

      caso contrário $\Rightarrow$ com coeficientes variáveis
  - Considerando a homogênea $y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_0(x)y(x)=0$

    Princípio da superposição: se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da ED, então qualquer combinação linear dessas funções, dada por $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, também é solução.

    Com coeficientes constantes: estima-se a solução no formato $y(x)=e^{\lambda x}$, motivado pelo formato da solução da EDO linear de 1ª ordem. Substituindo-se na ED, chega-se à denominada equação característica, dada por

$$\lambda^2+p_1\lambda+p_0=0 \Rightarrow \text{raízes}\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{-p_1+\sqrt{p_1^2-4p_0}}{2}\\[2ex] \lambda_2=\dfrac{-p_1-\sqrt{p_1^2-4p_0}}{2}\end{cases}$$

EDOL's – 2ª Ordem

EDOL2OH com coeficientes constantes (continuação):

Caso 1: raízes reais e distintas

Solução geral $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Caso 2: raízes imaginárias

Solução geral $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Reformatação da solução geral

As raízes são conjugadas: $\lambda_1 = a + bi \quad \text{e} \quad \lambda_2 = a - bi$

$+$

Identidade de Euler: $e^{c+di} = e^{c}\left(\cos d + i \operatorname{sen} d\right)$

$$y(x) = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x}$$

$$y(x) = c_1 e^{ax}\left[\cos(bx) + i\operatorname{sen}(bx)\right] + c_2 e^{ax}\left[\cos(bx) - i\operatorname{sen}(bx)\right]$$

$$y(x) = e^{ax}\left[(c_1 + c_2)\cos(bx) + (c_1 - c_2) i\operatorname{sen}(bx)\right]$$

$$y(x) = e^{ax}\left[\bar{c}_1 \cos(bx) + \bar{c}_2 \operatorname{sen}(bx)\right]$$

Novo formato da solução geral

EDOL's – 2ª Ordem

EDOL2OH com coeficientes constantes (continuação):

Caso 3: raízes reais e iguais

Com os parâmetros λ_1 e λ_2 iguais, temos que procurar uma outra função da base de geração da solução geral. Assim como quando estudamos espaços vetoriais, a base deve ser formada por entidades linearmente independentes, cujo conceito pode ser facilmente adaptado quando se trata de espaço de funções.

O procedimento a seguir permitirá encontrar uma outra função da base a partir de uma já conhecida, válido inclusive para a ED com coeficientes variáveis. Em particular, esse será útil para tratar o caso em questão.

Admitir $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ para garantir que sejam LI.

Como essa nova função também deve satisfazer a ED, fazemos a substituição no intuito de determinar u(x). Portanto,

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p_1(u'y_1 + uy_1') + p_0(uy_1) = 0$$

$$y_1u'' + (2y_1' + p_1y_1)u' + \cancel{(y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1)}u = 0$$

$$u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p_1\right)u' = 0 \;\text{ ou }\; U = u' \therefore U' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p_1\right)U = 0$$

$$\Rightarrow U(x) = e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p_1\right)dx} \;\text{ de onde é possível se chegar a }\; u(x).$$

EDOL's – 2ª Ordem

Caso 3: raízes reais e iguais (continuação)

Para o caso particular em que $p_0(x)$ e $p_1(x)$ são constantes e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tem-se

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad \text{e} \quad y_1'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{onde} \quad \lambda = -\frac{p_1}{2}$$

$$U(x) = e^{\int\left(2\frac{\lambda e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} + p_1\right)dx} = e^{\int \cancel{(2\lambda + p_1)} dx} = 1 \Rightarrow u(x) = x$$

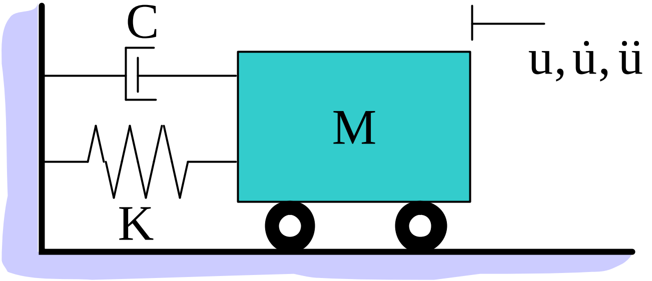
Portanto, a solução geral da equação diferencial ordinária de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes cujas raízes da equação característica são reais e iguais é dada por

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

EDOL's – 2ª Ordem

EDOL2OH com coeficientes constantes (continuação):

Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor em vibração livre



Equação de movimento

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \text{ ou } \ddot{u} + \frac{C}{M}\dot{u} + \frac{K}{M}u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \text{ onde } \omega_0^2 = \frac{K}{M} \text{ e } 2\xi\omega_0 = \frac{C}{M}$$

EDOL2OH

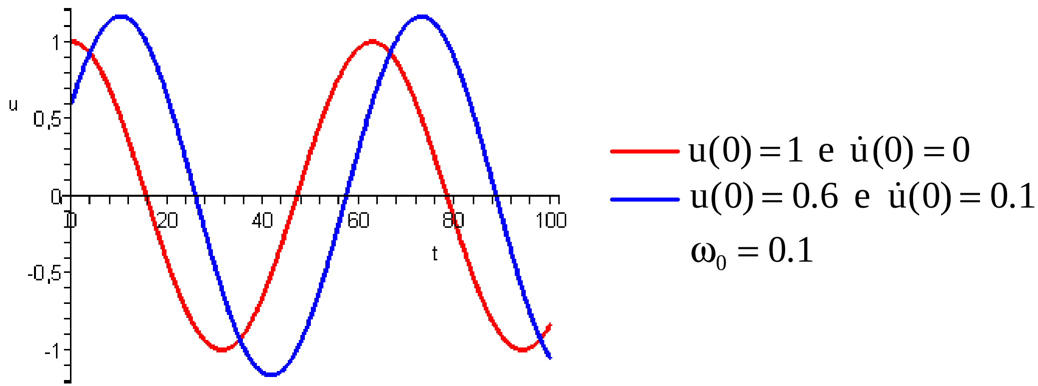
Equação característica $\lambda^2 + 2\xi\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$

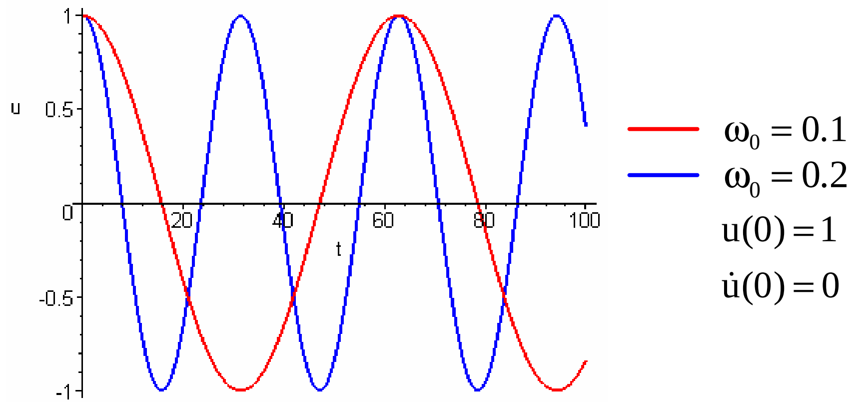
Raízes $\lambda = \omega_0\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$

EDOL's – 2ª Ordem

Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor em vibração livre (cont.)

Caso 1: Sistema harmônico não amortecido $\xi = 0$

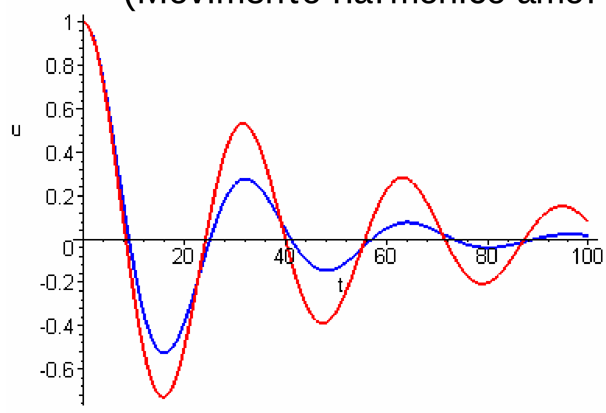




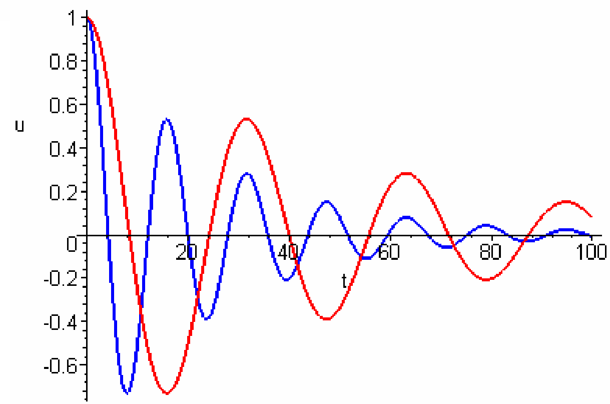
EDOL's – 2ª Ordem

Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor em vibração livre (cont.)

Caso 2: Sistema subamortecido quando $0 < \xi < 1$
(Movimento harmônico amortecido)



$\xi = 0.1$
$\xi = 0.2$
$\omega_0 = 0.2$
$u(0) = 1$
$\dot{u}(0) = 0$

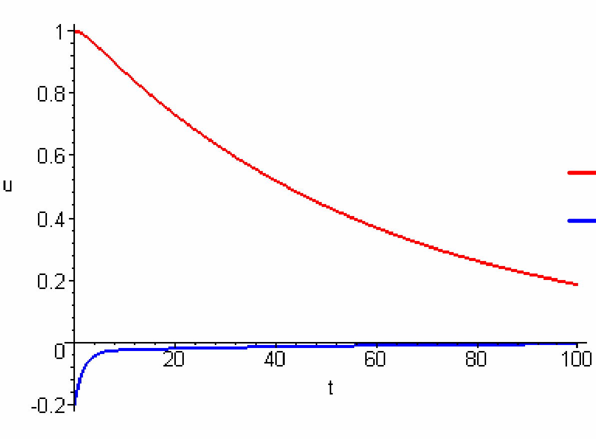


$\omega_0 = 0.1$
$\omega_0 = 0.2$
$\xi = 0.1$
$u(0) = 1$
$\dot{u}(0) = 0$

EDOL's – 2ª Ordem

Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor em vibração livre (cont.)

Caso 3: Sistema superamortecido quando $\xi > 1$



$u(0)=1$ e $\dot{u}(0)=0$

$u(0)=-0.2$ e $\dot{u}(0)=0.1$

$\xi = 3$

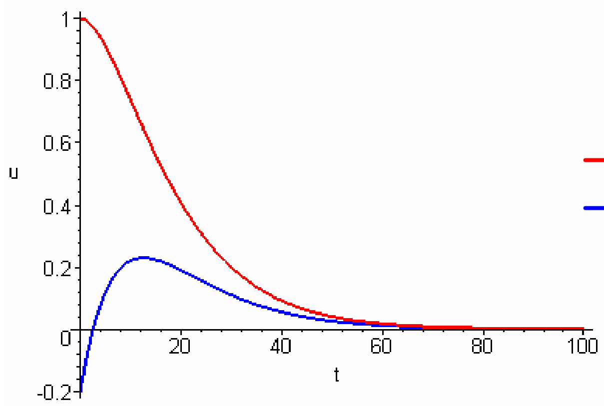
$\omega_0 = 0.1$

Não há vibração e sim um retorno lento à posição de equilíbrio.

EDOL's – 2ª Ordem

Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor em vibração livre (cont.)

Caso 4: Sistema com amortecimento crítico quando $\xi = 1$



$u(0) = 1$ e $\dot{u}(0) = 0$

$u(0) = -0.2$ e $\dot{u}(0) = 0.1$

$\xi = 1$

$\omega_0 = 0.1$

O amortecimento crítico representa o limite para o movimento não periódico e, conseqüentemente, o movimento retorna ao repouso no menor prazo, sem qualquer oscilação.

EDOL's – 2ª Ordem

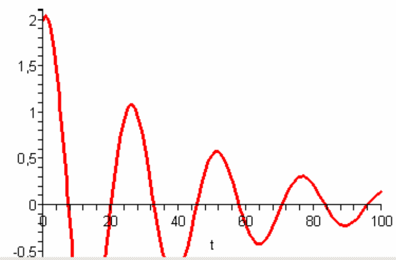
Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor em vibração livre (cont.)

Uso do Maple

```
> restart:
> ksi:=0.1: w0:=0.25:
> u0:=2: v0:=0.1:
> dsolve({diff(u(t),t$2)+2*ksi*w0*diff(u(t),t)+w0^2*u(t)=0,u(0)=u0,D(u)(0)=v0},u(t
));
```

$$u(t) = \frac{2}{11}\sqrt{11}\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{40}t\right)}\sin\left(\frac{3}{40}\sqrt{11}\,t\right) + 2\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{40}t\right)}\cos\left(\frac{3}{40}\sqrt{11}\,t\right)$$

```
> assign(%);
> plot(u(t),t=0..100);
```



Time: 13.55s Memory: 4.93M

EDOL's – Ordem N

- Equação diferencial ordinária linear:
  - Formato geral

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

▪ $q(x) \equiv 0 \Rightarrow$ homogênea

caso contrário $\Rightarrow$ não homogênea

▪ $p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ são funções constantes $\Rightarrow$ com coeficient es constantes

caso contrário $\Rightarrow$ com coeficient es variáveis

  - Considerando a equação homogênea

Solução geral: a solução geral da equação homogênea tem o formato $c_1y_1(x)+ c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$, onde as funções $y_i(x)$ formam a base da solução.

Com coeficientes constantes: Extrapolação do procedimento que foi feito para a equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem. Aqui, precisam ser determinadas raízes de polinômios de grau N. No tratamento das raízes repetidas, passa a ser considerada a função u(x) no formato x, x^2, etc, a depender do número de repetições da raiz.

EDOL's – Ordem N

- Equação diferencial ordinária linear (continuação):

  - Considerando a equação não homogênea

    Solução geral: a solução geral da equação não homogênea tem o formato $y_h(x)+ y_p(x)$, onde a primeira parcela corresponde à solução da equação homogênea e a segunda parcela representa alguma solução particular da equação não homogênea.

    Solução particular: Existem dois procedimentos para a determinação da solução particular.

    - Método dos coeficientes a determinar – Pode ser empregado quando a equação diferencial possui coeficientes constantes e a função q(x) apresenta-se no formato polinomial, exponencial e trigonométrico. A idéia principal do método consiste em admitir a solução particular como uma expressão similar a da função q(x), envolvendo coeficientes incógnitos que são determinados ao se tentar satisfazer a equação diferencial.

EDOL's – Ordem N

- Método dos coeficientes a determinar (continuação)

Existem três regras para a definição da expressão da solução particular:

Regra Básica – Se q(x) é uma das funções da coluna esquerda da tabela abaixo, a solução particular é escolhida no formato da coluna direita.

q(x)	**$y_p(x)$**
ke^{ax}	Ce^{ax}
kx^m	$C_m x^m + \ldots + C_1 x + C_0$
Kcos(wt) ou Ksen(wt)	Ccos(wt)+Dsen(wt)

Regra da Modificação – Se q(x) é uma solução da equação homogênea, então multiplique a escolha da regra anterior por x (ou por x^2, x^3, ..., etc, a depender do número de repetições das raízes da equação característica).

Regra da Soma – Se q(x) é a soma de funções da coluna esquerda da tabela acima, então escolha a solução particular como a soma dos formatos das correspondentes funções da coluna direita.

EDOL's – Ordem N

- Método dos coeficientes a determinar (continuação)

Exemplos:

1) $y'' + 4y = 8x^2$

$$y_h(x) = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$$

$$y_p(x) = C_2x^2 + C_1x + C_0 \Rightarrow C_0 = -1, C_1 = 0 \text{ e } C_2 = 2$$

$$\therefore\ y(x) = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x) + 2x^2 - 1$$

2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}$$

$$y_p(x) = Cxe^x \Rightarrow C = -1$$

$$\therefore\ y(x) = Ae^x + Be^{2x} - xe^x$$

3) $y'' - 2y' + y = e^x + x$

$$y_h(x) = Ae^x + Bxe^x$$

$$y_p(x) = Cx^2e^x + D_1x + D_0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}, D_0 = 2 \text{ e } D_1 = 1$$

$$\therefore\ y(x) = Ae^x + Bxe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$$

EDOL’s – Ordem N

Solução particular (continuação):

- Método da variação dos parâmetros – Trata-se de um método mais geral, onde a solução particular é definida como uma combinação das funções base da solução da equação homogênea na forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x)$$

onde as funções $u_i(x)$ são determinadas ao se tentar satisfazer a equação diferencial em estudo.

Para ilustrar o processo, vamos considerar uma equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem qualquer, ou seja,

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x)$$

cujas solução geral da equação homogênea é escrita na forma

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Conforme estabelece este método, vamos assumir que a solução da equação particular tem o formato

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

EDOL's – Ordem N

- Método da variação dos parâmetros (continuação)

Diferenciando a solução particular temos que

$$y_p'(x) = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

Para balancear o número de incógnitas e o número de restrições, como até o momento só temos como restrição a ED, vamos impor uma outra restrição na forma

$$\underline{u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0}$$

ficando a primeira derivada da solução particular apenas como

$$y_p'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

Diferenciando mais uma vez essa função temos que

$$y_p''(x) = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)$$

Quando impomos a equação diferencial e organizamos as parcelas encontramos que

$$u_1(x)\cancel{\left(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x)\right)} +$$
$$u_2(x)\cancel{\left(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_2(x)\right)} +$$
$$\underline{u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = q(x)}$$

EDOL's – Ordem N

- Método da variação dos parâmetros (continuação)

Arrumando as duas equações de restrição no formato matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q(x) \end{Bmatrix}$$

cuja solução nos fornece

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)q(x)}{W(x)} \quad e \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}$$

onde W(x) é conhecido como o **Wronskiano** das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, e representa o determinante da matriz dos coeficientes do sistema acima. Uma vez que essas funções são linearmente independentes, sabe-se que o Wronskiano é diferente de zero, conseqüentemente o sistema apresenta a solução acima.

Integrando-se as expressões acima chega-se às funções desejadas

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)q(x)}{W(x)}dx \quad e \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}dx$$

permitindo-se formar a solução particular.

EDOL's – Ordem N

- Método da variação dos parâmetros (continuação)

Exemplo:

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

Resolvendo a equação homogênea $y_h(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

onde $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = xe^{2x}$

Determinando o Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^{4x}$$

Resolvendo a equação particular

$$u_1(x) = -\int \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}dx = -x$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_2(x)q(x)}{W(x)}dx = \ln(x)$$

$$\therefore y_p(x) = xe^{2x}[\ln(x) - 1]$$

Solução geral $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$\therefore y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + xe^{2x}[\ln(x) - 1]$$

Sistema de EDO's de 1ª Ordem

- Solução numérica com o MATLAB:

ODE45 Solve non-stiff differential equations, medium order method.
   [T,Y] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0) with TSPAN = [T0 TFINAL] integrates the system of differential equations y' = f(t,y) from time T0 to TFINAL with initial conditions Y0. Function ODEFUN(T,Y) must return a column vector corresponding to f(t,y). Each row in the solution array Y corresponds to a time returned in the column vector T. To obtain solutions at specific times T0,T1,...,TFINAL (all increasing or all decreasing), use TSPAN = [T0 T1 ... TFINAL].

   [T,Y] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0,OPTIONS) solves as above with default integration properties replaced by values in OPTIONS, an argument created with the ODESET function. See ODESET for details. Commonly used options are scalar relative error tolerance 'RelTol' (1e-3 by default) and vector of absolute error tolerances 'AbsTol' (all components 1e-6 by default).

   [T,Y] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0,OPTIONS,P1,P2...) passes the additional parameters P1,P2,... to the ODE function as ODEFUN(T,Y,P1,P2...), and to all functions specified in OPTIONS. Use OPTIONS = [] as a place holder if no options are set.

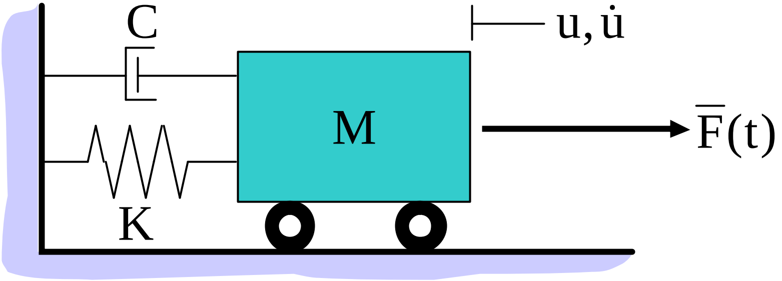
   ODE45 can solve problems M(t,y)*y' = f(t,y) with mass matrix M that is nonsingular. Use ODESET to set the 'Mass' property to a function MASS if MASS(T,Y) returns the value of the mass matrix. If the mass matrix is constant, the matrix can be used as the value of the 'Mass' option. If the mass matrix does not depend on the state variable Y and the function MASS is to be called with one input argument T, set 'MStateDependence' to 'none'. ODE15S and ODE23T can solve problems with singular mass matrices.

   See also
      other ODE solvers: ODE23, ODE113, ODE15S, ODE23S, ODE23T, ODE23TB
      options handling: ODESET, ODEGET
      output functions: ODEPLOT, ODEPHAS2, ODEPHAS3, ODEPRINT
      ODE examples: RIGIDODE, BALLODE, ORBITODE

Sistema de EDO's de 1ª Ordem

- Solução numérica com o MATLAB (continuação):

Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor em vibração forçada



Equação de movimento

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = \bar{F}(t) \quad \text{ou} \quad \ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{\bar{F}(t)}{M}$$

Já comentamos sobre estes parâmetros

Adaptação do problema à função do MATLAB

$$\dot{u}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = -2\xi\omega_0 v(t) - \omega_0^2 u(t) + \frac{\bar{F}(t)}{M}$$

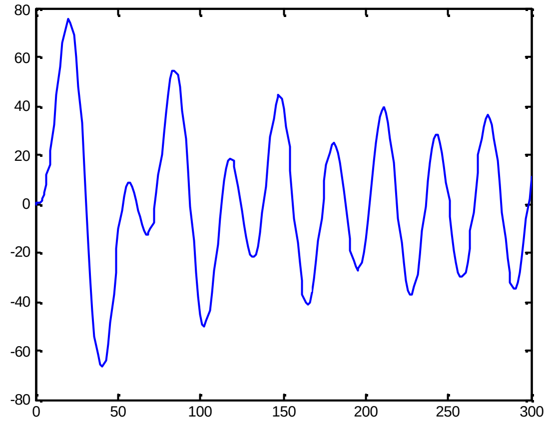
Sistema de EDO's de 1ª Ordem

- Solução numérica com o MATLAB (continuação):

```
function dydt=mmaforcado(t,y,flag,ksi,w0,fmax_m,wf)
% Adaptação à função ODE45 da equação de movimento do sistema
% massa-mola-amortecedor submetido a uma força senoidal.
% Os parâmetros do sistema são:
%   ksi = C/M (normalização do amortecimento do sistema em relação à massa)
%   w0  = K/M (normalização da rigidez do sistema em relação à massa)
% A forca aplicada, F(t)=Fmax*sen(wf*t), é descrita pelos seguintes parâmetros:
%   fmax_m = Fmax/M (normalização da forca máxima)
%   wf (freqüência da forca aplicada)

dydt(1,1)=y(2);
dydt(2,1)=-2*ksi*w0*y(2)-w0^2*y(1)+fmax_m*sin(wf*t);
```

```
>>[t,y]=ode45('mmaforcado',[0 300],[0 0],[],0.1,0.1,1,0.2);plot(t,y(:,1))
```



FIM