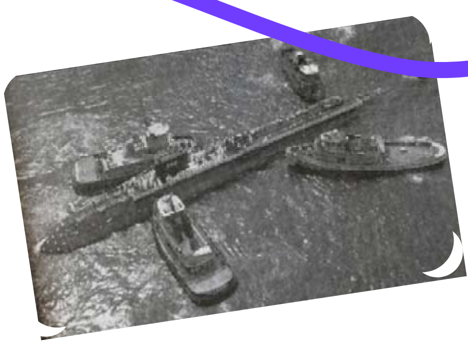
Universidade Federal de Alagoas
Centro de Tecnologia
Curso de Engenharia Civil

**Disciplina:** Mecânica dos Sólidos 1
**Código:** ECIV018
**Professor:** Eduardo Nobre Lages

# Equilíbrio de Corpos Rígidos

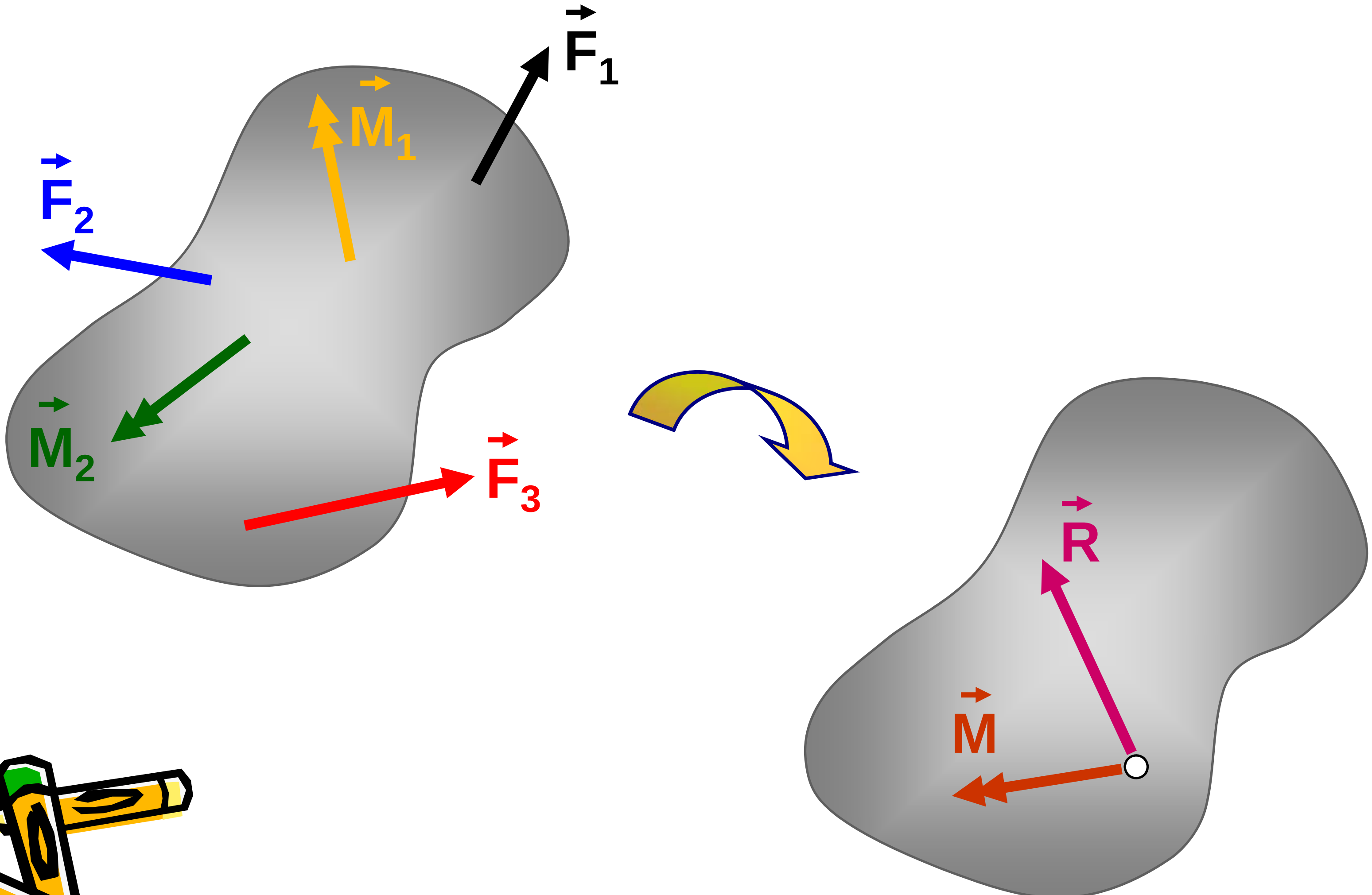


Maceió/AL

# Objetivo

Estudo do equilíbrio de sistemas de forças não concorrentes.

# Background



# Equilíbrio de um Corpo Rígido

Quando o sistema força-binário equivalente de todas as ações atuantes no corpo, em relação a qualquer ponto de referência, é nulo, o corpo está em equilíbrio.

Para um corpo em equilíbrio, o sistema de forças não causa qualquer movimento translacional ou rotacional ao corpo considerado.

Algebricamente o equilíbrio corresponde a

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{0}}$$

que em termos dos componentes retangulares pode ser expresso como

$$R_x = 0,\ R_y = 0 \ \text{ e } \ R_z = 0$$

juntamente com

$$M_x = 0,\ M_y = 0 \ \text{ e } \ M_z = 0$$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

A maioria dos problemas que tratam do equilíbrio de um corpo rígido se enquadra em duas categorias:

- **Verificação**: quando **todas** as ações que atuam no corpo rígido são conhecidas e se deseja saber se a condição de equilíbrio é ou não atendida.

- **Imposição**: quando **algumas** das ações que atuam no corpo rígido são desconhecidas, normalmente as reações de apoio, e se deseja saber quem são essas ações desconhecidas que garantem a condição de equilíbrio.

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Para identificação da situação física real do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como *diagrama espacial*.

Alguns problemas podem ser estabelecidos:

- Quão resistentes devem ser os pilares?
- Quão resistente deve ser a viga?

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Para os problemas que envolvem o equilíbrio de um corpo rígido, escolhe-se uma porção SIGNIFICATIVA e traça-se um diagrama separado, denominado de *diagrama de corpo livre*, mostrando essa porção, todas as ações que atuam sobre ela e as cotas (necessárias no cálculo dos momentos das forças).

# Equilíbrio de um Corpo Rígido em Duas Dimensões

Consideração possível quando todas as forças atuantes no corpo apresentam um plano comum para suas linhas de ação, assim como os binários, existindo, estão na direção perpendicular desse mesmo plano.

Tomando-se o plano das forças como o plano cartesiano xy, todas as forças apresentam componente z nula. Qualquer binário presente no sistema só apresenta componente z não nula.

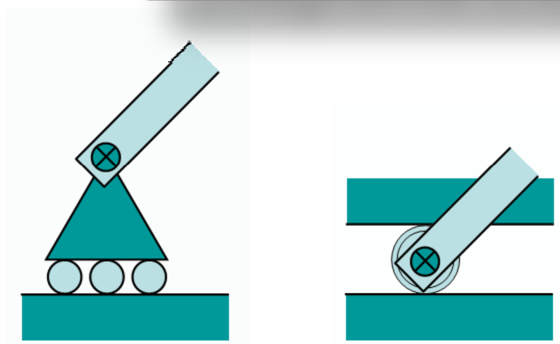
Para construção do sistema força-binário equivalente, tomando-se um ponto de referência qualquer no plano das forças, só as equações

$$R_x = 0,\ R_y = 0 \text{ e } M_z = 0$$

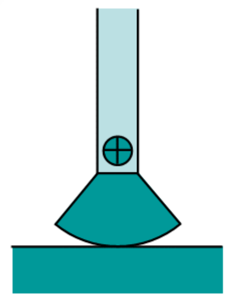
precisam ser verificadas/impostas.

# Reações de Apoio em Duas Dimensões

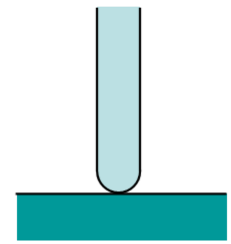
Diagrama Espacial



Roletes



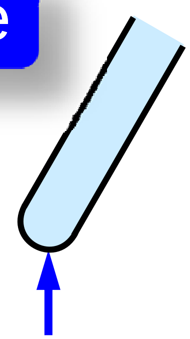
Suporte basculante



Superfície sem atrito

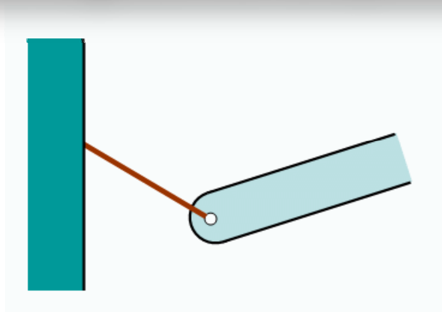
Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação conhecida (perpendicular à direção de deslizamento)

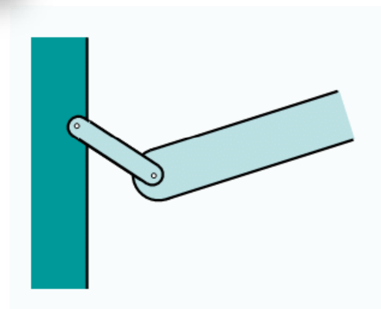


# Reações de Apoio em Duas Dimensões

Diagrama Espacial



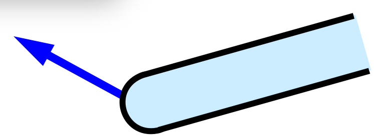
Cabo curto



Haste curta

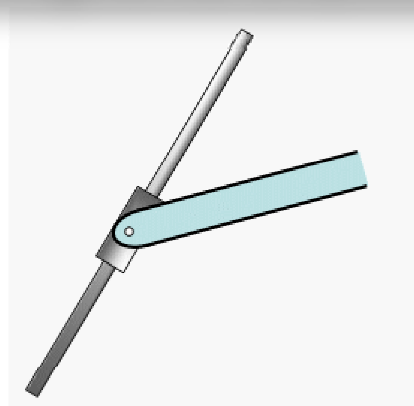
Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação conhecida (na direção do cabo/haste)

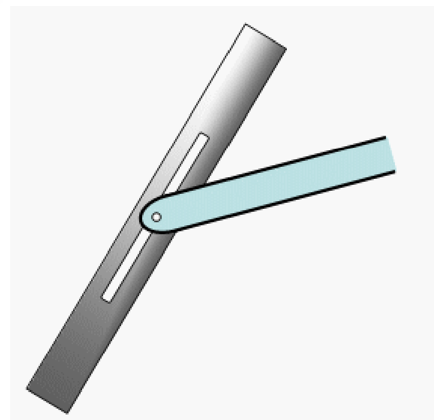


# Reações de Apoio em Duas Dimensões

## Diagrama Espacial



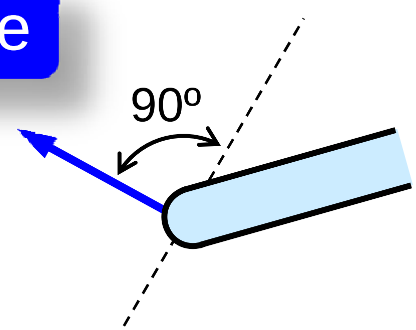
Cursor sobre haste sem atrito



Pino deslizante sem atrito

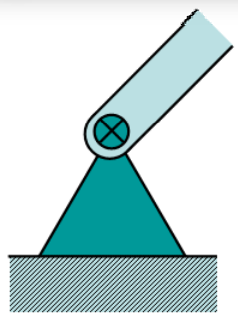
## Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação conhecida (perpendicular à direção de deslizamento)

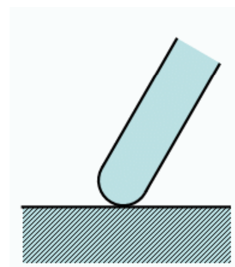


# Reações de Apoio em Duas Dimensões

Diagrama Espacial



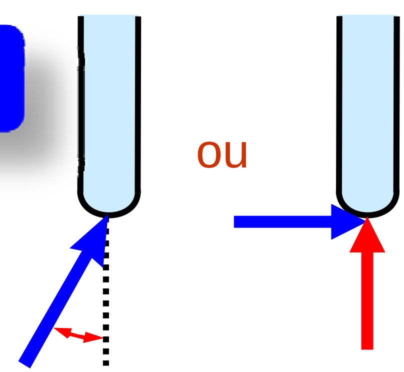
Pino sem atrito
ou articulação



Superfície
rugosa

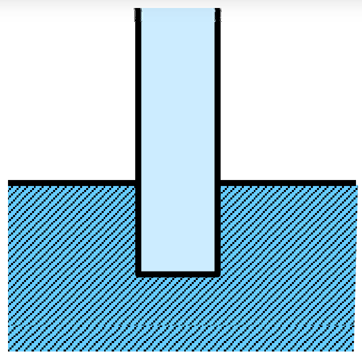
Diagrama de Corpo Livre

Força de direção
desconhecida



# Reações de Apoio em Duas Dimensões

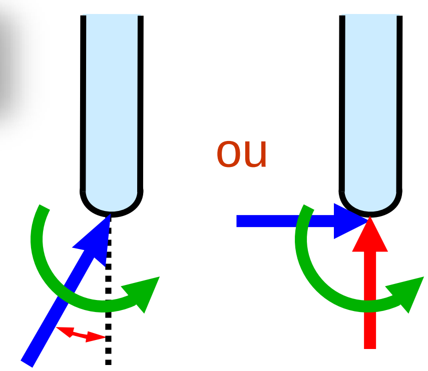
Diagrama Espacial



Engaste

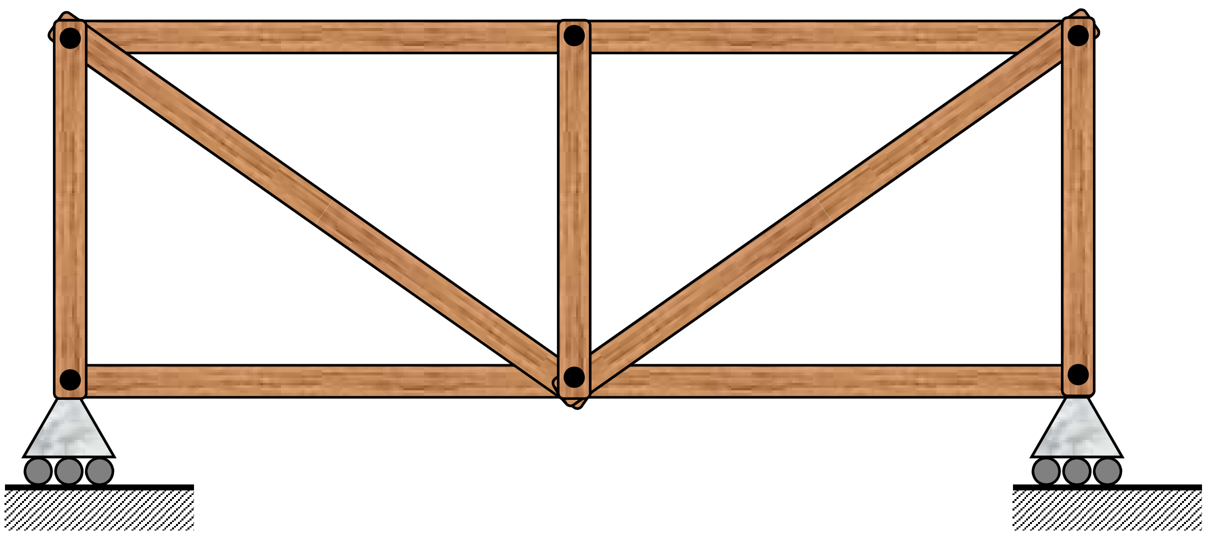
Diagrama de Corpo Livre

Força de direção desconhecida e binário



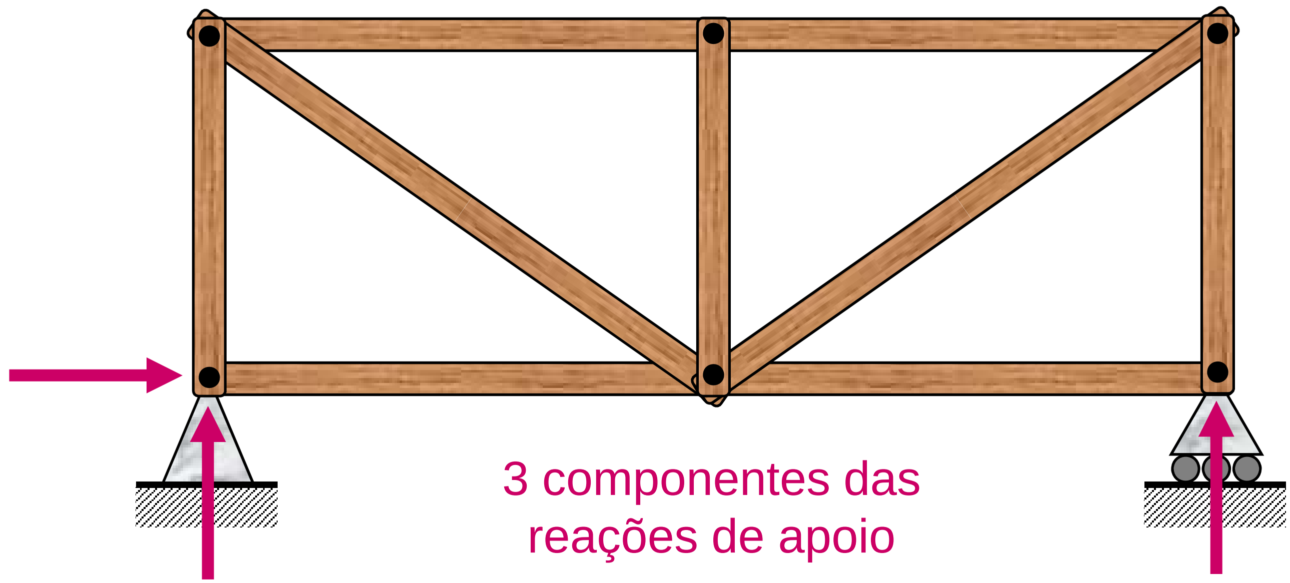
# Estaticidade de um Arranjo Estrutural

**Hipostática:** O arranjo apresenta uma insuficiência na vinculação, permitindo movimentos globais de corpo rígido, possibilitando o equilíbrio apenas de sistemas de forças particulares.



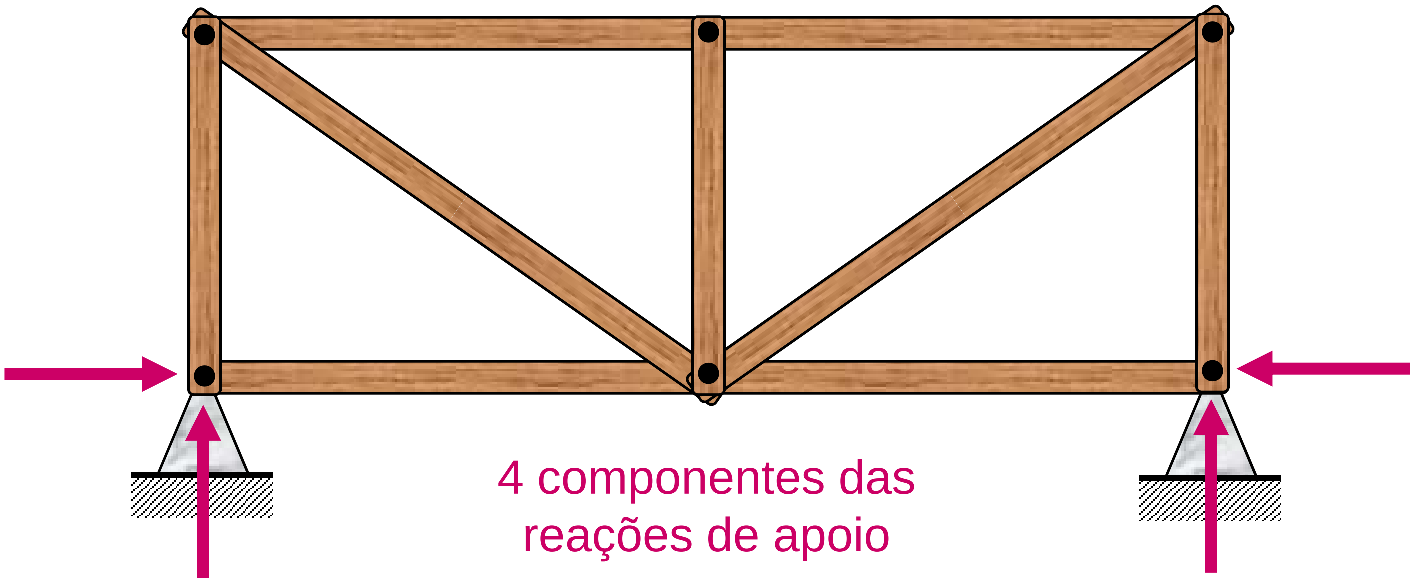
# Estaticidade de um Arranjo Estrutural

**Isostática:** O arranjo apresenta uma vinculação mínima suficiente para impedir qualquer movimento global de corpo rígido, sendo as reações de apoio determinadas exclusivamente através das equações globais de equilíbrio.



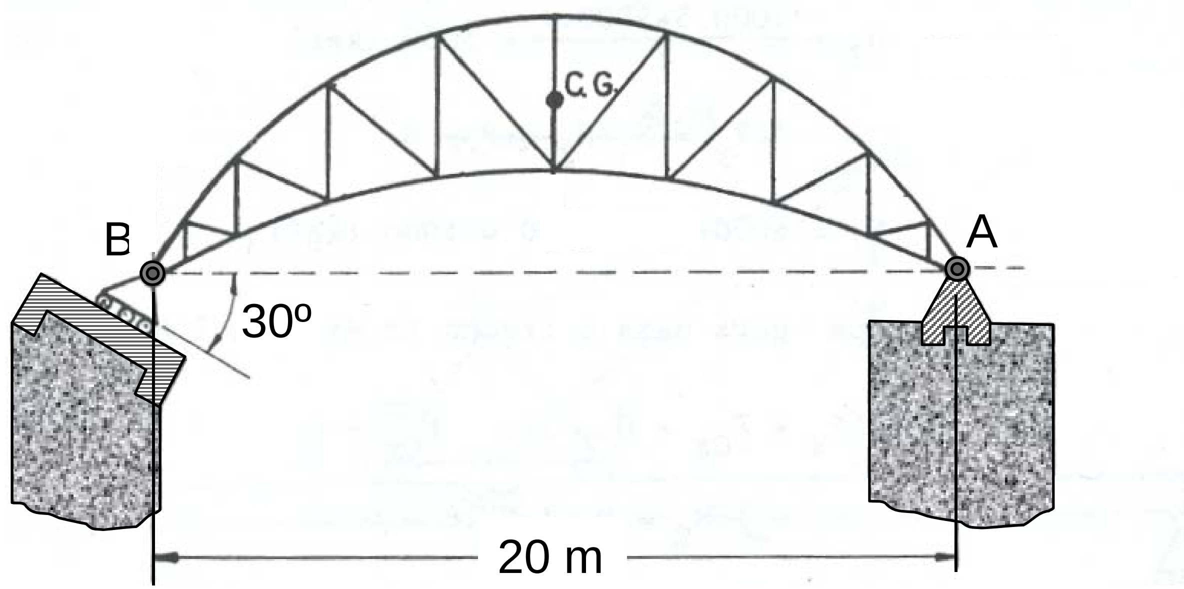
# Estaticidade de um Arranjo Estrutural

**Hiperestática:** O arranjo apresenta uma vinculação mais do que o suficiente para não permitir movimentos globais de corpo rígido, não sendo possível a determinação de todas as reações de apoio exclusivamente através das equações globais de equilíbrio.



# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

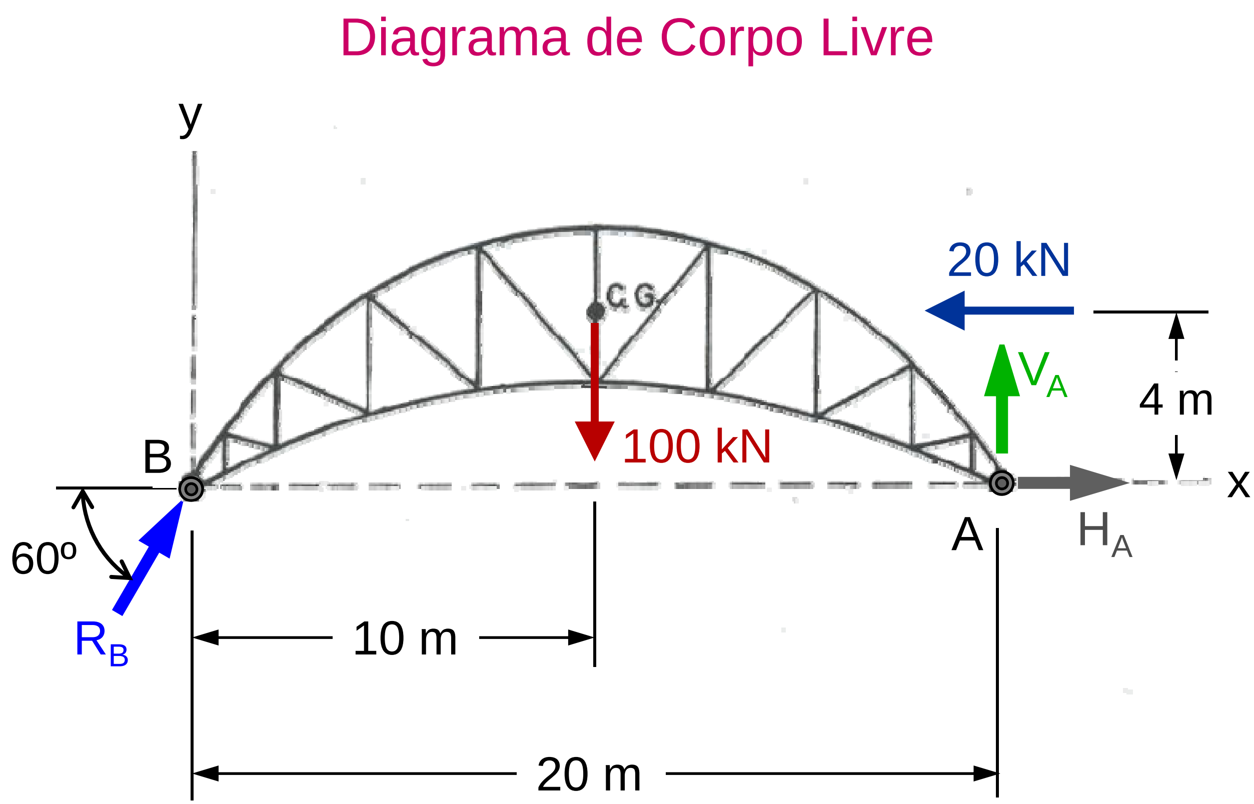
Exemplo:




Uma estrutura em arco treliçado é fixa ao suporte articulado no ponto A, e sobre roletes em B num plano de 30º com a horizontal. O vão AB mede 20 m. O peso próprio da estrutura é de 100 kN. A força resultante dos ventos é de 20 kN, e situa-se a 4 m acima de A, horizontalmente, da direita para a esquerda. Determine as reações nos suportes A e B.

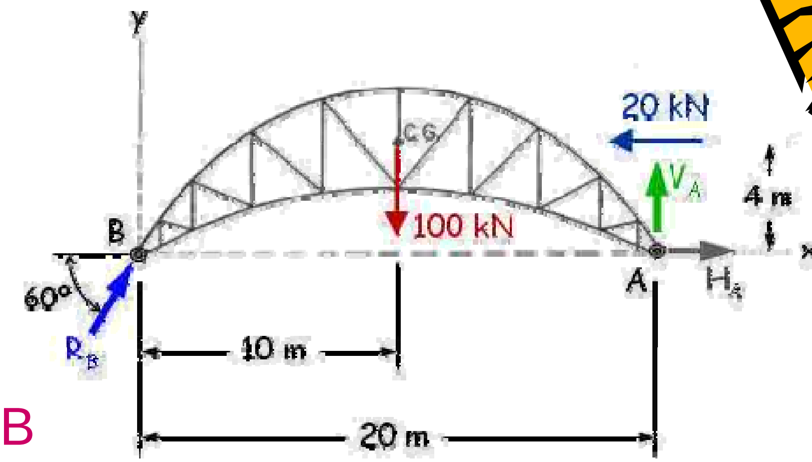
# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):



# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

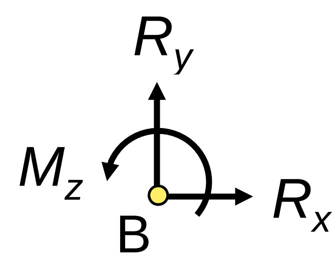



Imposição do Equilíbrio no Ponto B

$$R_x = 0 \therefore R_B \cos 60^o + H_A - 20 = 0$$

$$R_y = 0 \therefore R_B \sin 60^o - 100 + V_A = 0$$

$$M_z = 0 \therefore -100 \cdot 10 + V_A \cdot 20 + 20 \cdot 4 = 0$$




$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot R_B + H_A = 20 \\ 0{,}866 \cdot R_B + V_A = 100 \\ 20 \cdot V_A = 920 \end{cases}$$

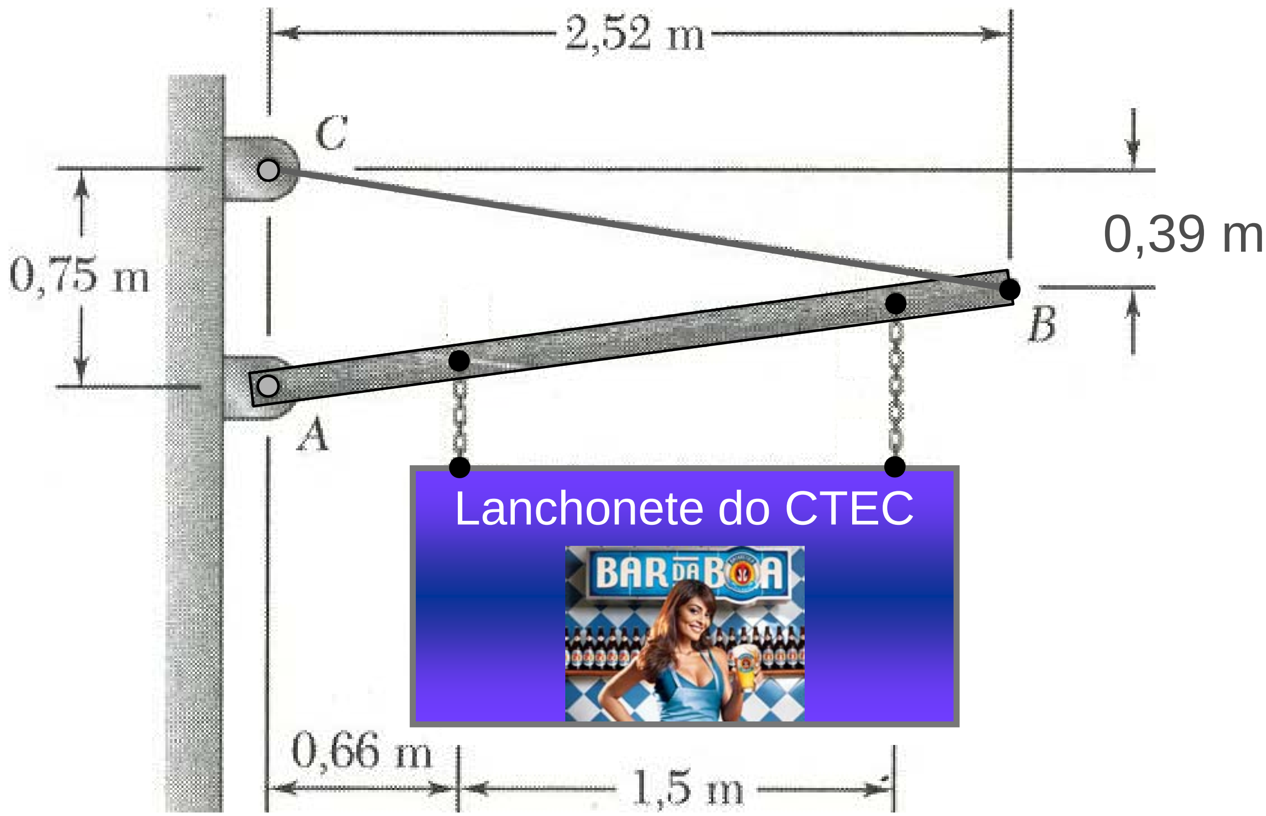
$$H_A = -11{,}2 \text{ kN}$$

$$V_A = 46{,}0 \text{ kN}$$

$$R_B = 62{,}4 \text{ kN}$$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

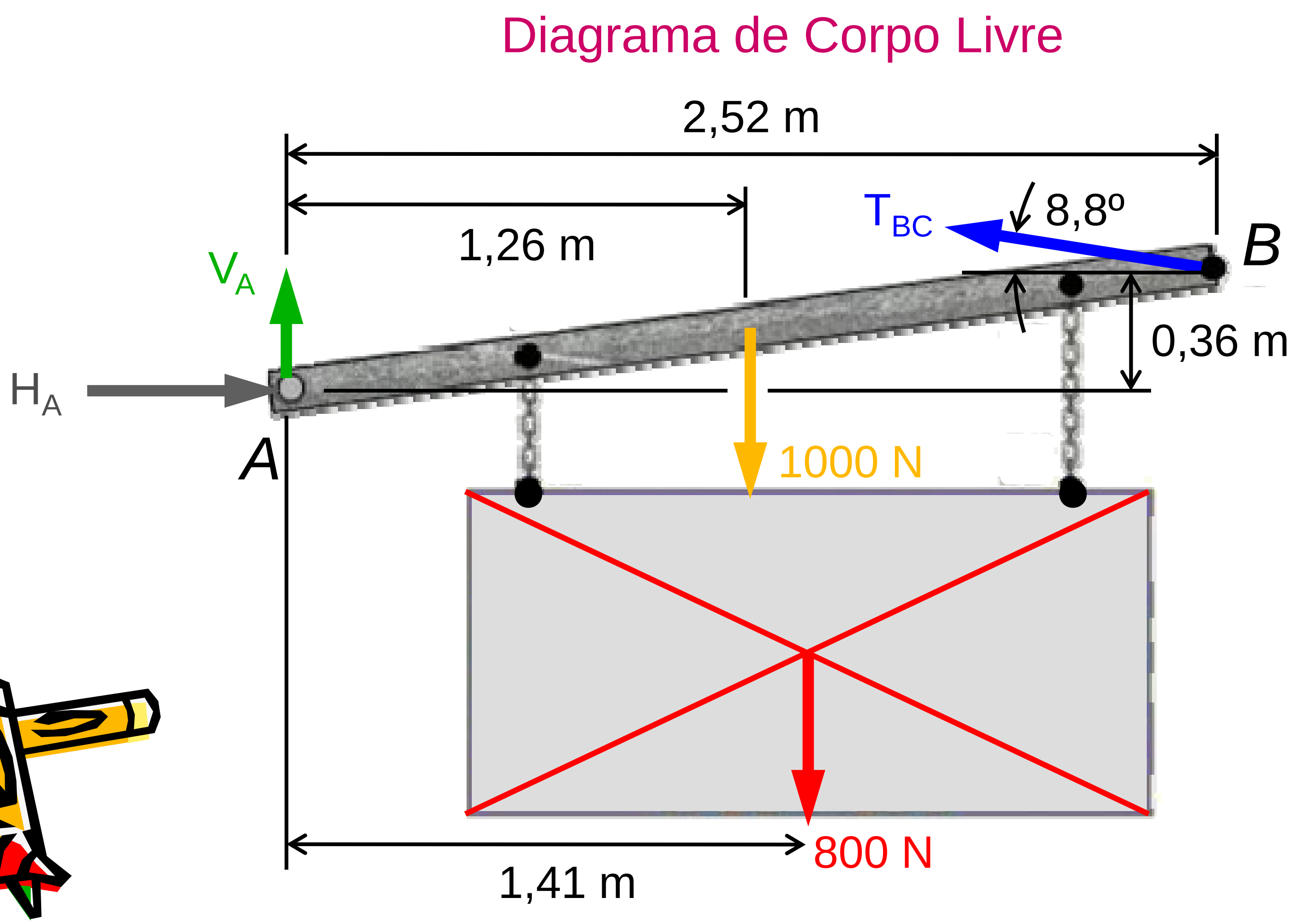
Exemplo:




Um letreiro é pendurado por duas correntes no mastro *AB*. O mastro é articulado em *A* e é sustentado pelo cabo *BC*. Sabendo que os pesos do mastro e do letreiro são 1000 N e 800 N, respectivamente, determine a tração no cabo *BC* e a reação na articulação em *A*.

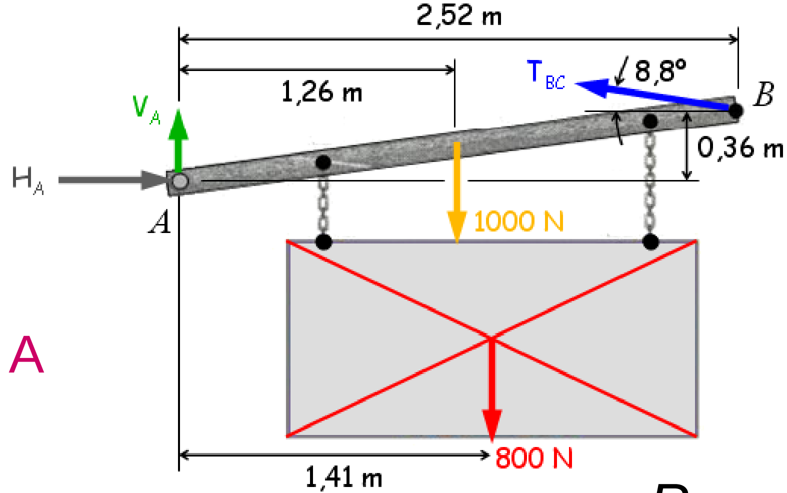
# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

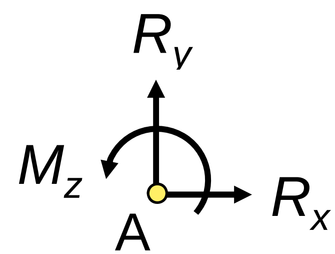


# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):




Imposição do Equilíbrio no Ponto A




$$R_x = 0 \therefore H_A + T_{BC}\cos 171{,}2^o = 0$$

$$R_y = 0 \therefore V_A - 1000 - 800 + T_{BC}\sin 171{,}2^o = 0$$

$$M_z = 0 \therefore -1000 \cdot 1{,}26 - 800 \cdot 1{,}41 + T_{BC}\cos 8{,}8^o \cdot 0{,}36 + T_{BC}\sin 8{,}8^o \cdot 2{,}52 = 0$$

$$\begin{cases} H_A - 0{,}988 \cdot T_{BC} = 0 \\ V_A + 0{,}153 \cdot T_{BC} = 1800 \\ 0{,}741 \cdot T_{BC} = 2388 \end{cases}$$

$$H_A = 3184{,}0\ \text{N}$$

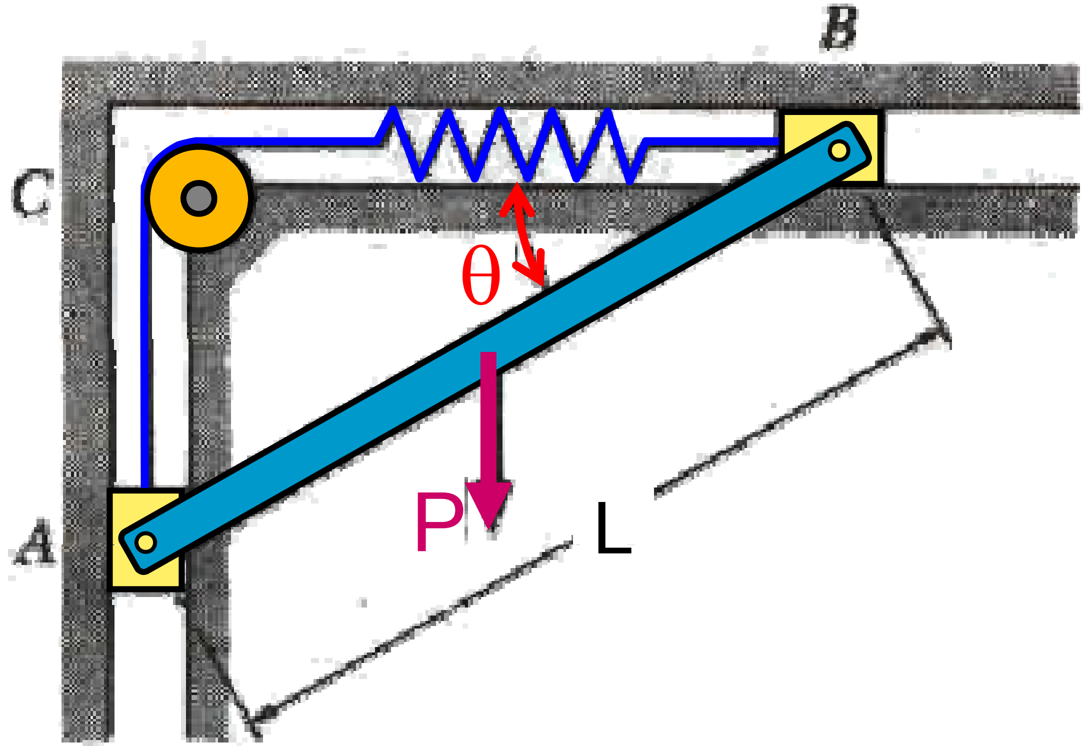
$$V_A = 1306{,}9\ \text{N}$$

$$T_{BC} = 3222{,}7\ \text{N}$$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo:

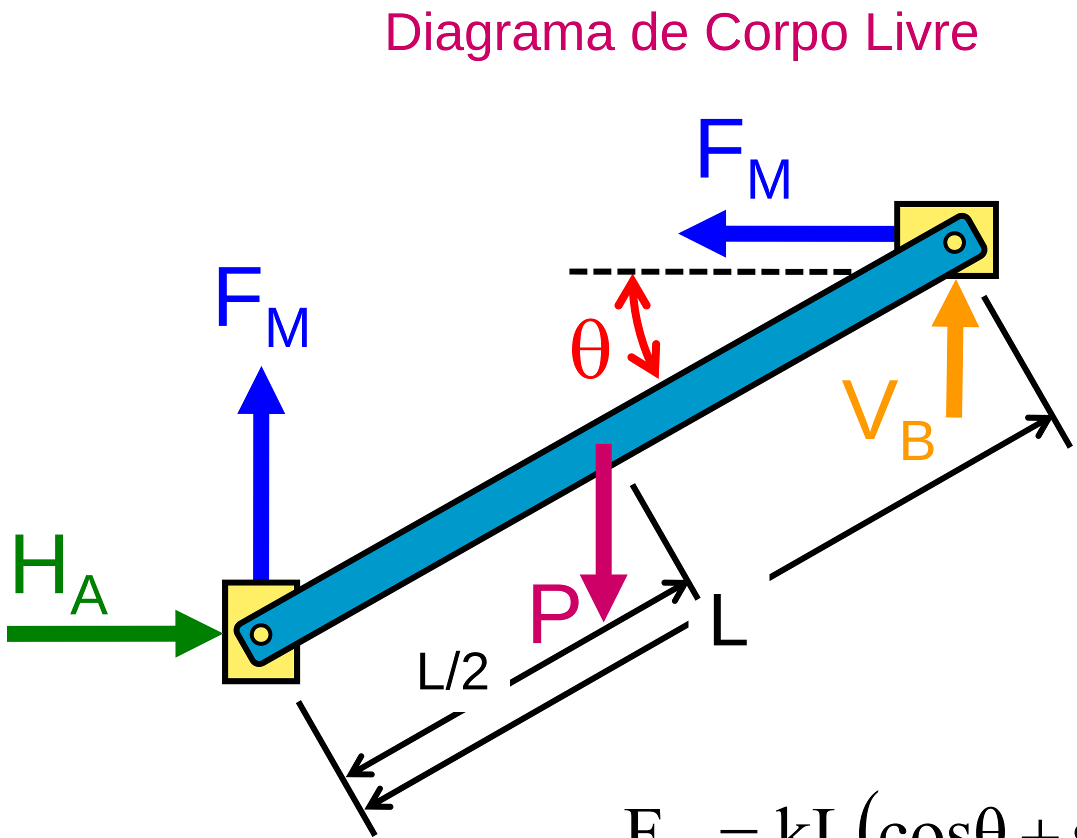
Pr. 4.39
B&J – 5ª ed. rev.




Uma barra delgada *AB*, de peso P, está presa a dois blocos *A* e *B* que se movem em guias lisas, como ilustrado. A constante da mola é k, e a mola não está esticada quando *AB* está na horizontal. Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação para θ, P, L e k que deve ser satisfeita quando a barra está em equilíbrio.

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

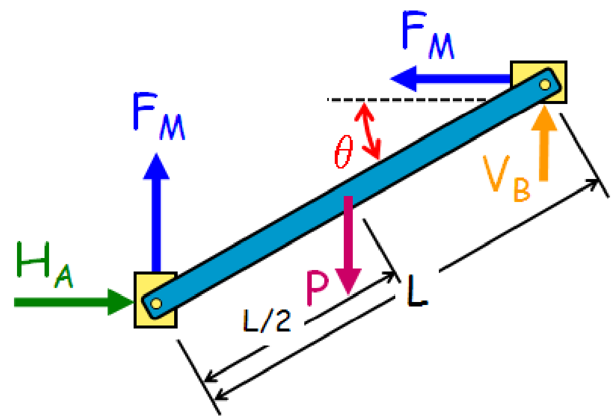
Exemplo (continuação):



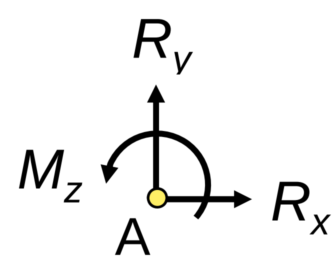

$$F_M = kL(\cos\theta + \sin\theta - 1)$$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):




Imposição do Equilíbrio no Ponto A




$$R_x = 0 \therefore H_A - F_M = 0$$

$$R_y = 0 \therefore F_M - P + V_B = 0$$

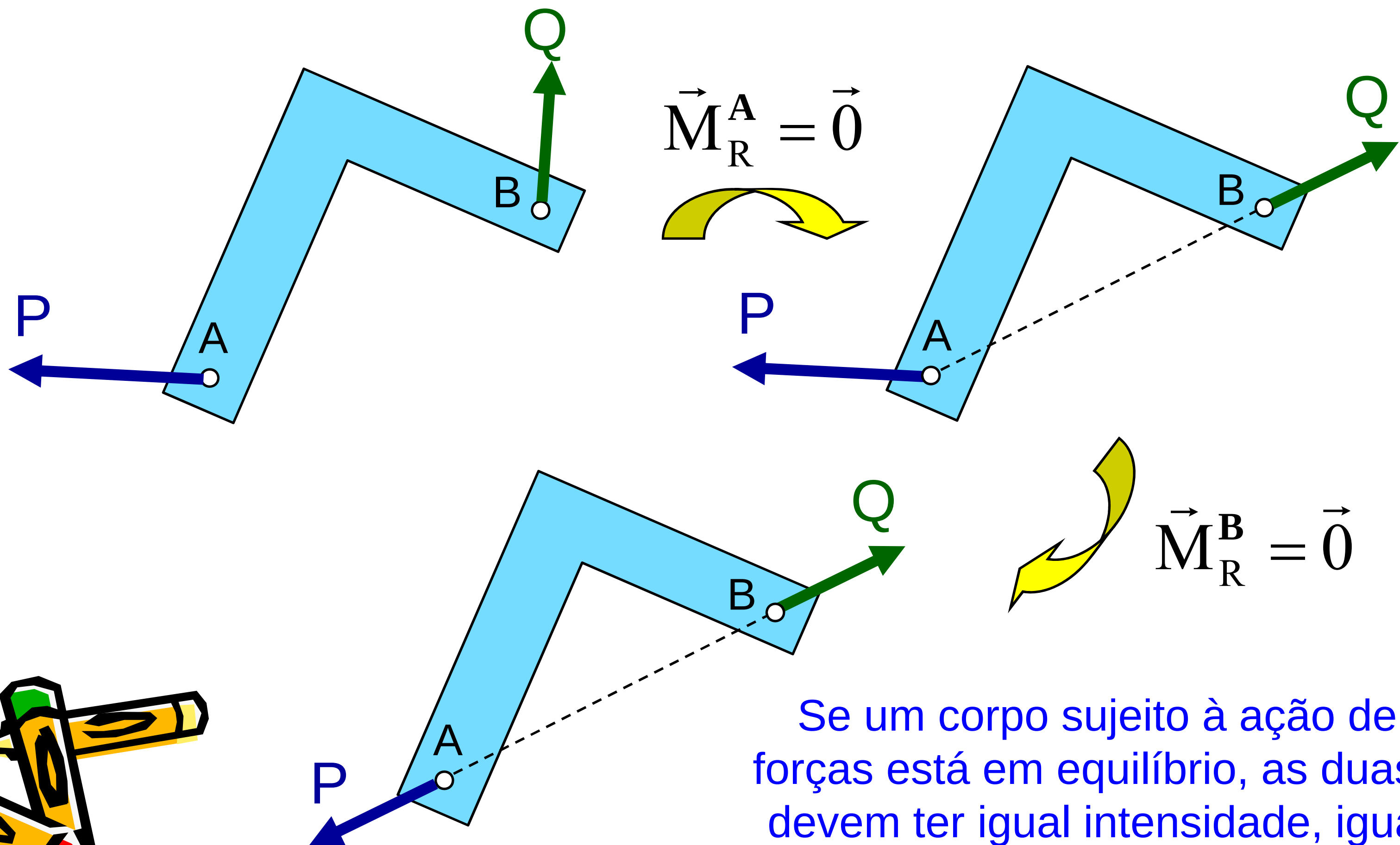
$$M_z = 0 \therefore -P\frac{L}{2}\cos\theta + F_M L\sin\theta + V_B L\cos\theta = 0$$

Isolando $V_B$ da segunda equação, substituindo o resultado na terceira e trazendo o valor de $F_M$ chega-se a

$$\frac{P}{2}\cos\theta + kL(\cos\theta + \sin\theta - 1)(\sin\theta - \cos\theta) = 0$$

# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

Corpo sujeito à ação de duas forças:



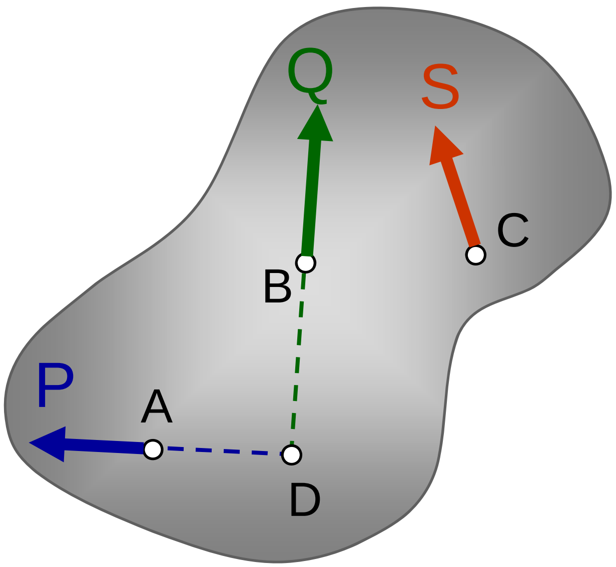

$$\vec{M}_R^{\mathbf{A}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_R^{\mathbf{B}} = \vec{0}$$

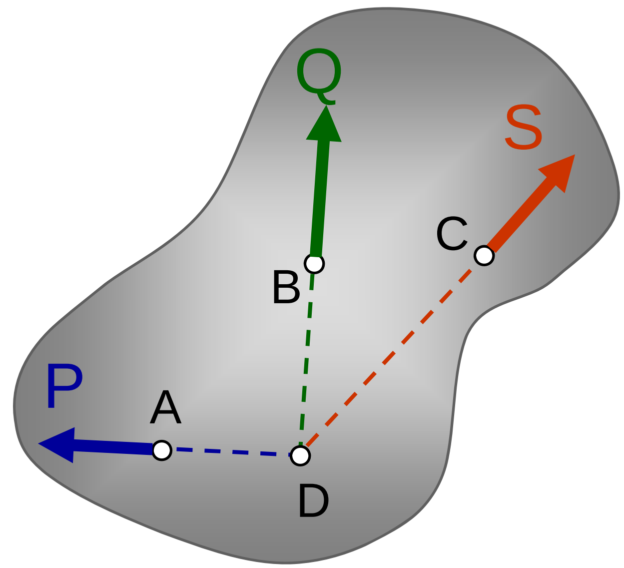
Se um corpo sujeito à ação de duas forças está em equilíbrio, as duas forças devem ter igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos.

# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

Corpo sujeito à ação de três forças:



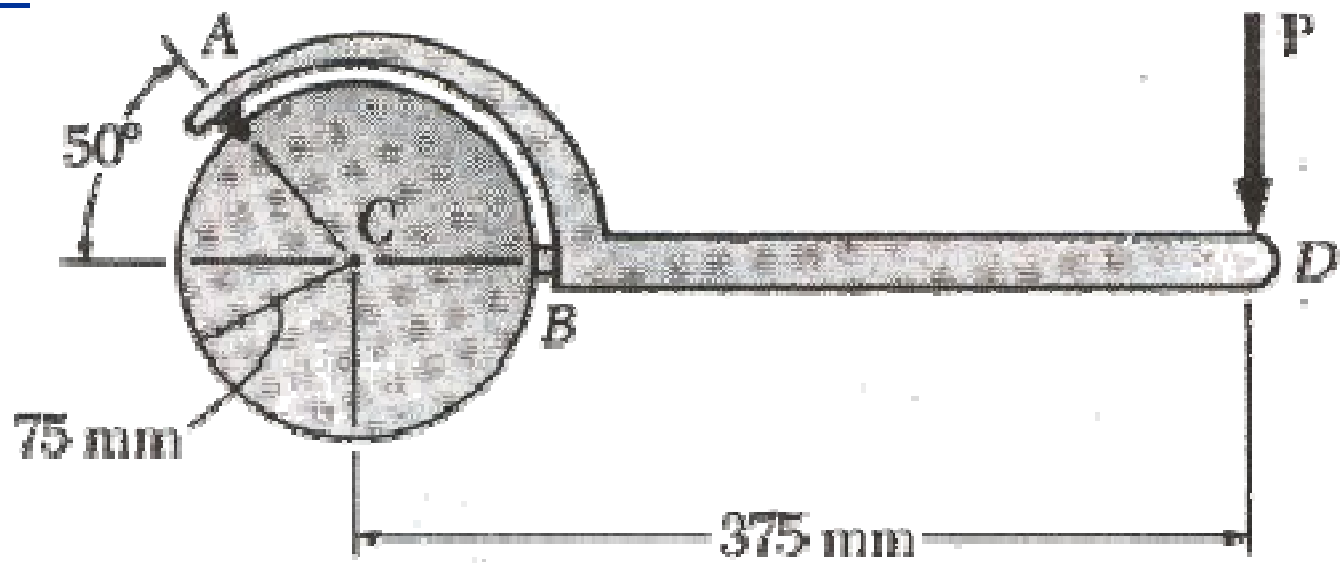

$$\vec{M}_R^D = \vec{0}$$




A condição necessária para que um corpo sujeito à ação de três forças esteja em equilíbrio é que as linhas de ação das três forças sejam concorrentes.

# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

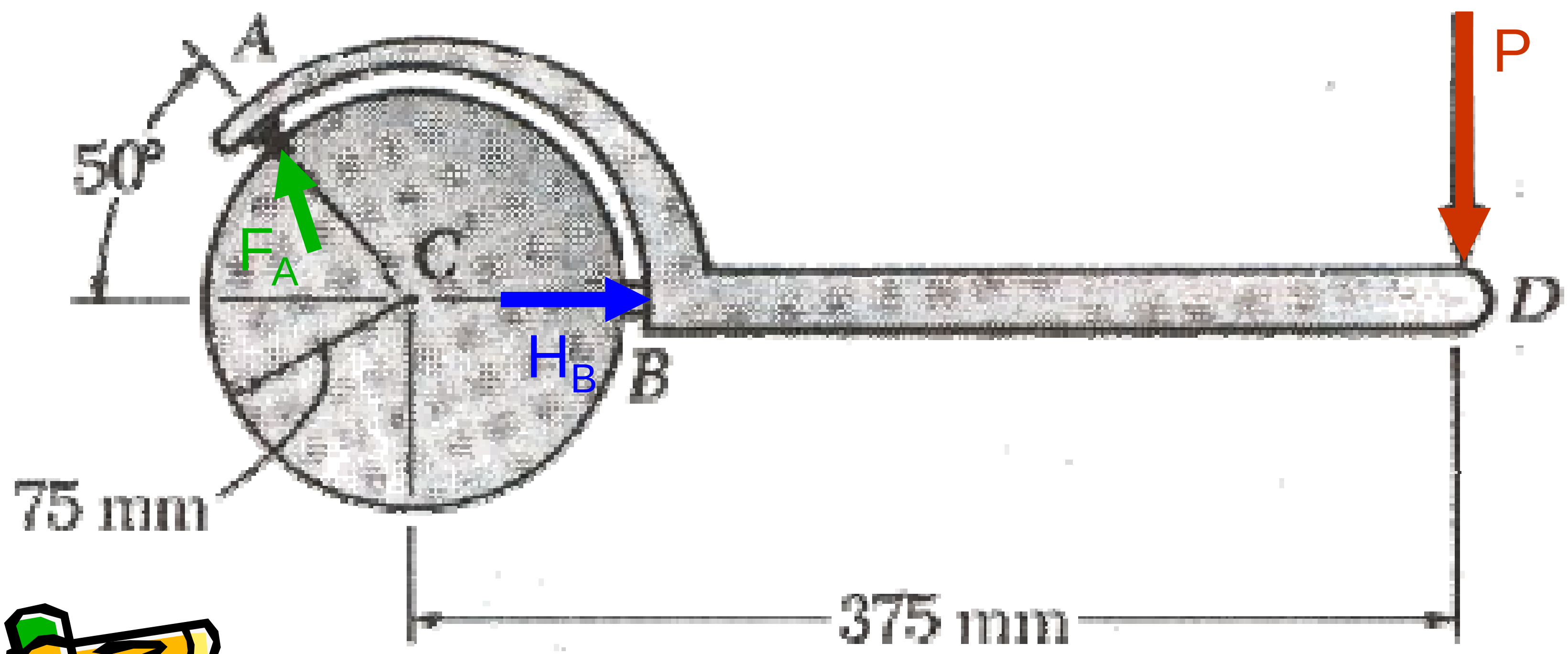
Exemplo:




Uma chave é utilizada para girar um eixo. Um pino ajusta-se no furo A, e uma superfície plana e sem atrito apóia-se no ponto B do eixo. Se uma força P de 250 N de intensidade for aplicada ao ponto D da chave, determine as reações do eixo sobre a chave nos pontos A e B.

# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

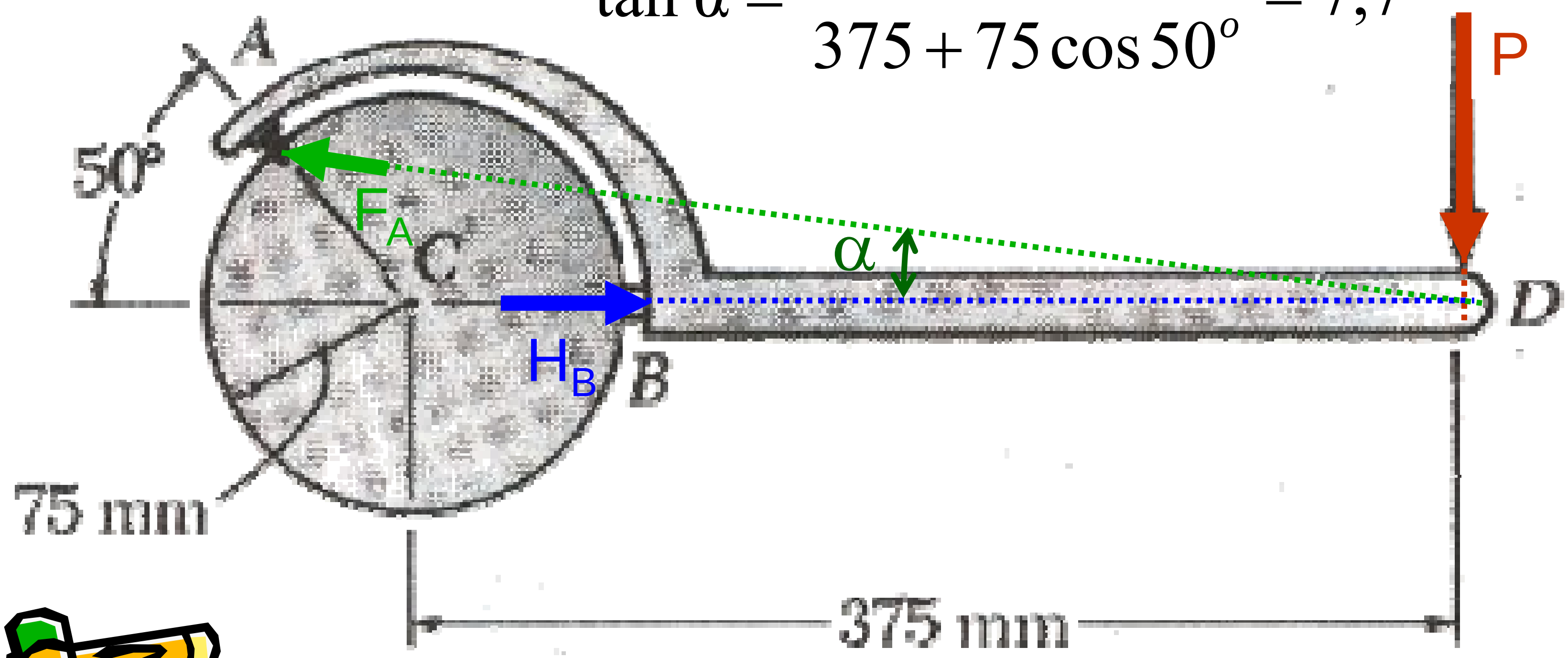
Exemplo (continuação):



# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

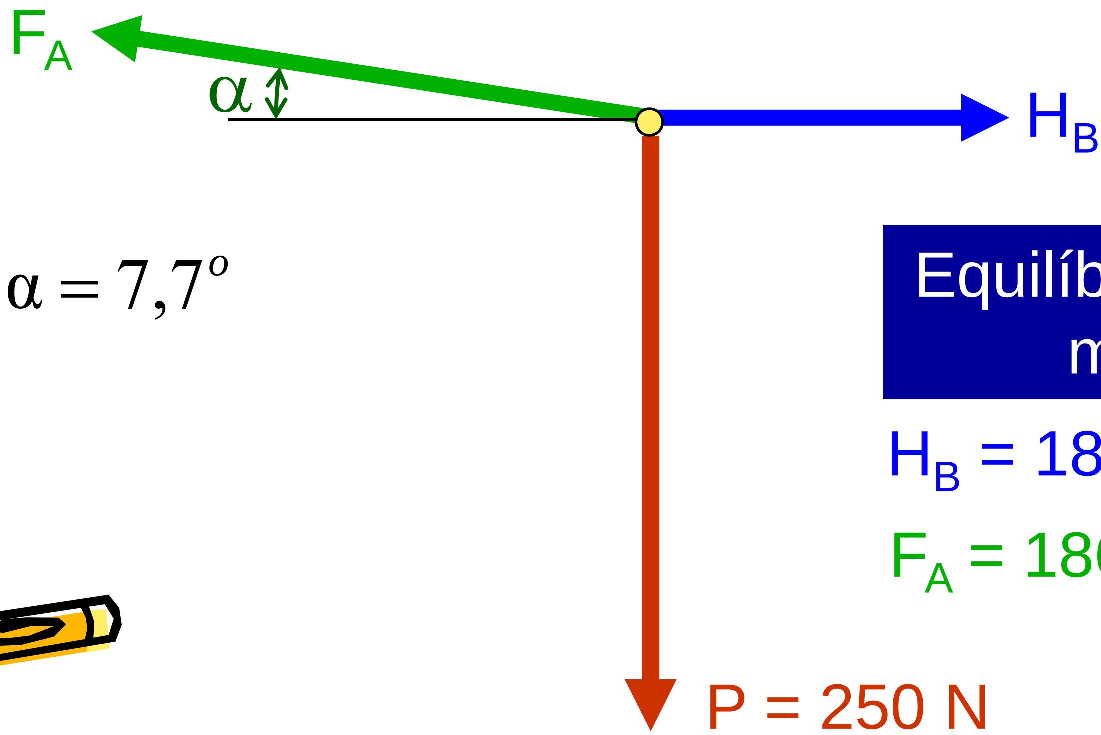
Exemplo (continuação):

$$\tan\alpha = \frac{75\sin 50^o}{375 + 75\cos 50^o} = 7{,}7^o$$



# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

Exemplo (continuação):




$$\alpha = 7{,}7^o$$

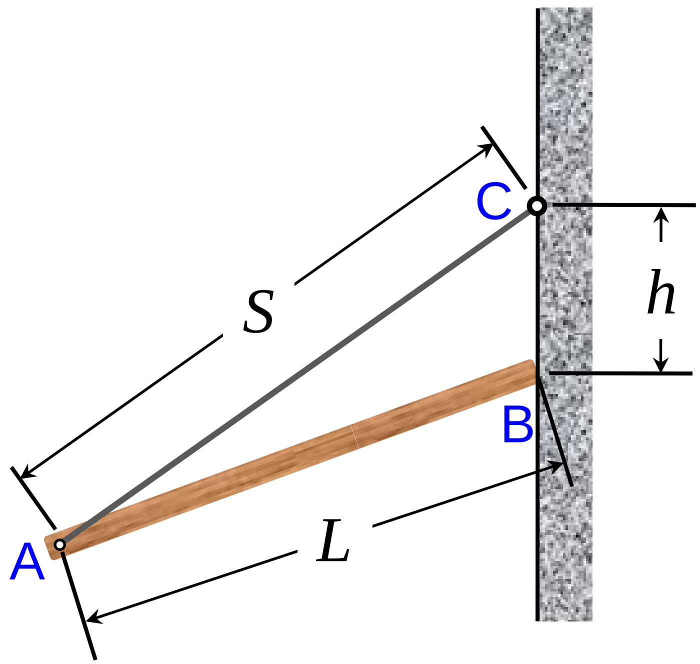
**Equilíbrio do ponto material**

$H_B$ = 1849,0 N →

$F_A$ = 1865,9 N 7,7º

# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

Exemplo:




Uma haste delgada de comprimento $L$ e peso $W$ é mantida em equilíbrio tal como mostra a figura, com uma extremidade apoiada sobre uma parede sem atrito e a outra presa a uma corda de comprimento $S$. Deduza uma expressão para a distância $h$ em termos de $L$ e $S$. Mostre que essa posição de equilíbrio não existe se $S>2L$.

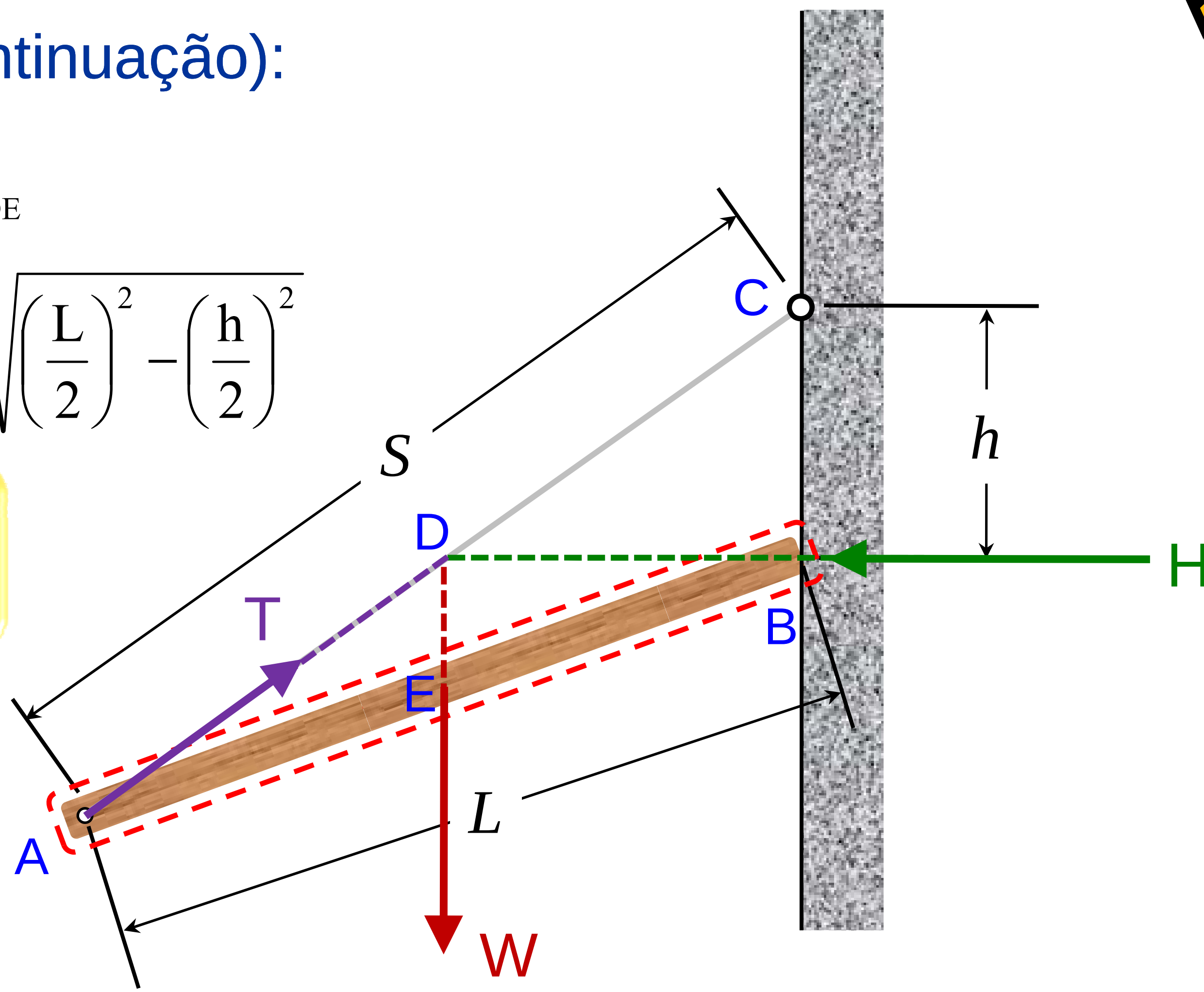
# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

Exemplo (continuação):

$$\overline{BD}_{BCD} = \overline{BD}_{BDE}$$

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{h = \sqrt{\frac{S^2 - L^2}{3}}}$$



# Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

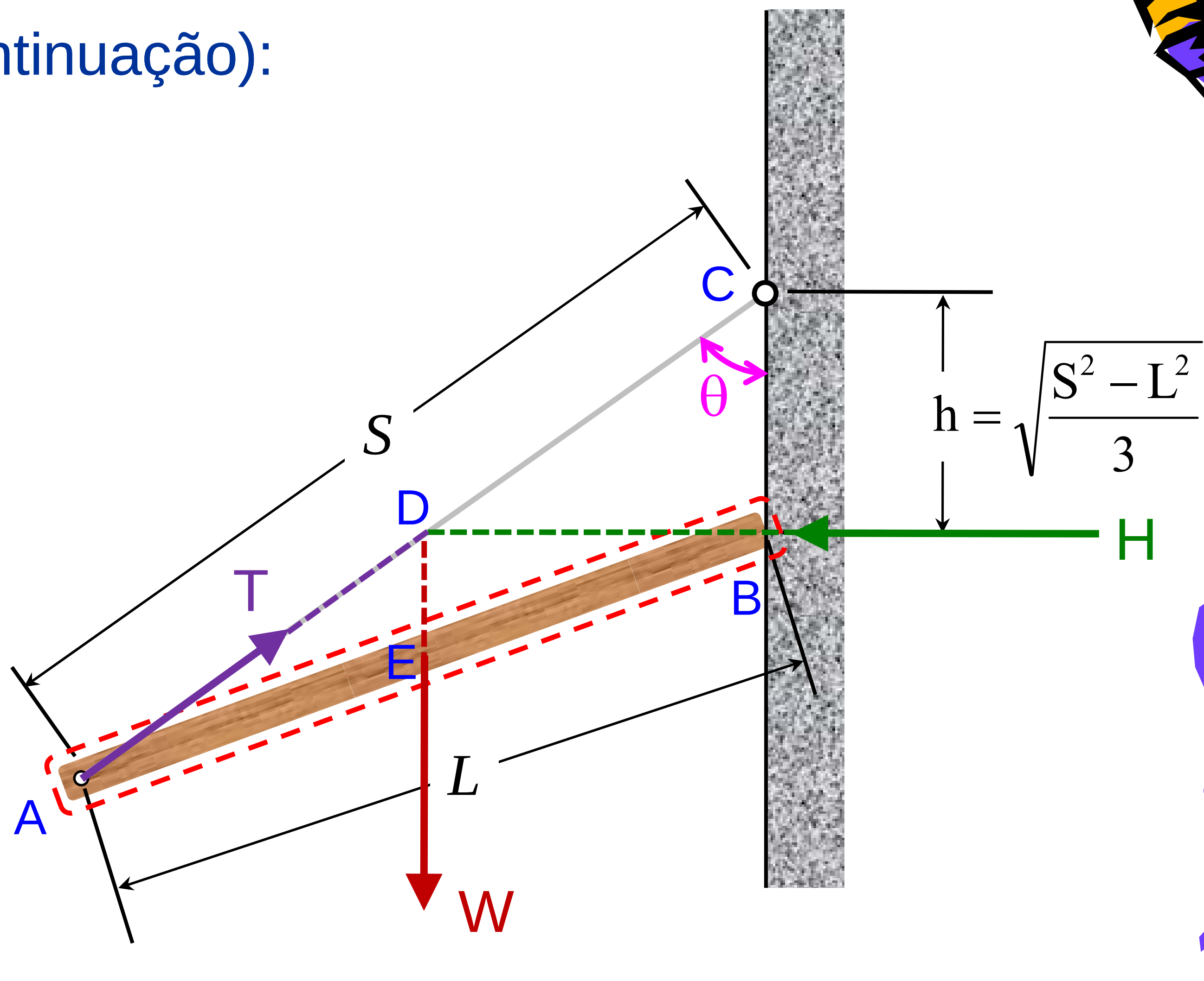
Exemplo (continuação):

$$\cos\theta \le 1$$

$$\frac{h}{S/2} \le 1$$

$$\frac{\sqrt{\dfrac{S^2 - L^2}{3}}}{S/2} \le 1$$

$$S \le 2L$$



# Equilíbrio de um Corpo Rígido em Três Dimensões

Para a verificação/imposição do equilíbrio, define-se um diagrama de corpo livre que seja objetivo com o que se deseja calcular e escolhe-se um ponto de referência para construção do sistema força-binário equivalente.

Algebricamente o equilíbrio corresponde à verificação/imposição da nulidade desse sistema força-binário equivalente, ou seja,

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{0}}$$

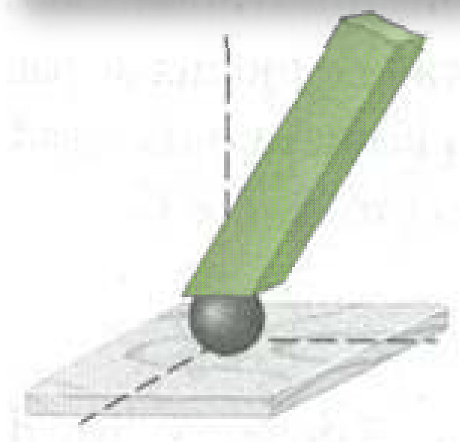
Em termos dos componentes retangulares tem-se

$$R_x = 0,\quad R_y = 0,\quad R_z = 0$$

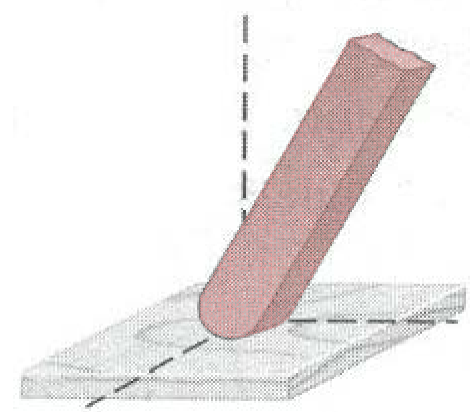
$$M_x = 0,\ M_y = 0 \text{ e } M_z = 0$$

# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

Diagrama Espacial



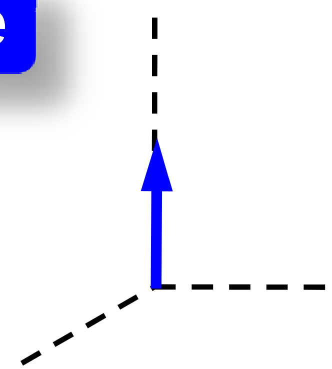
Esfera



Superfície sem atrito

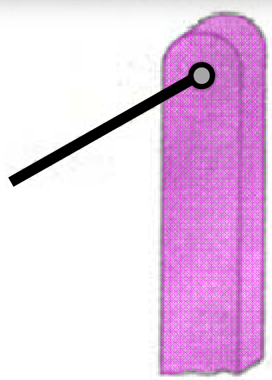
Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação conhecida (perpendicular ao plano de deslizamento)



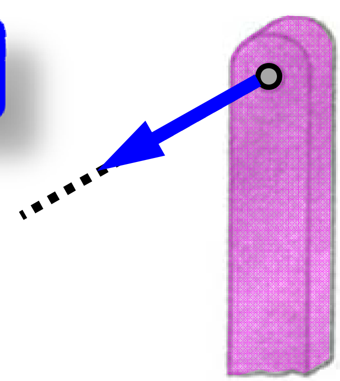
# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

Diagrama Espacial



Cabo

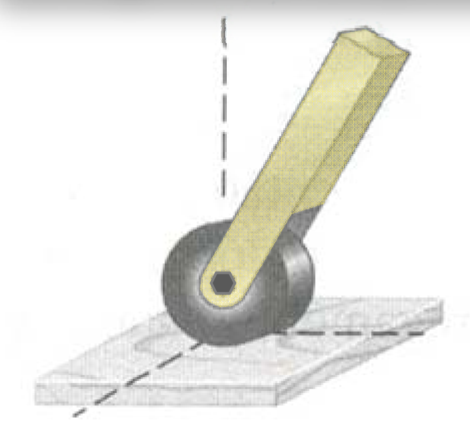
Diagrama de Corpo Livre



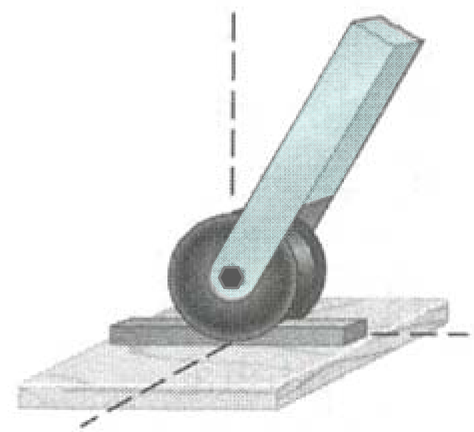
Força com linha de ação conhecida (na direção do cabo, puxando o objeto vinculado)

# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

Diagrama Espacial



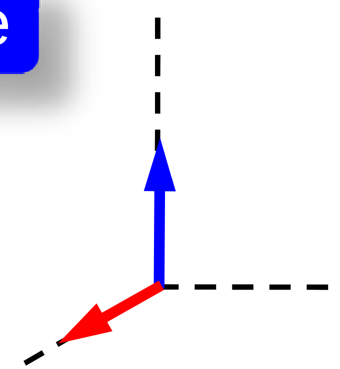
Rolete sobre superfície rugosa



Roda sobre trilho

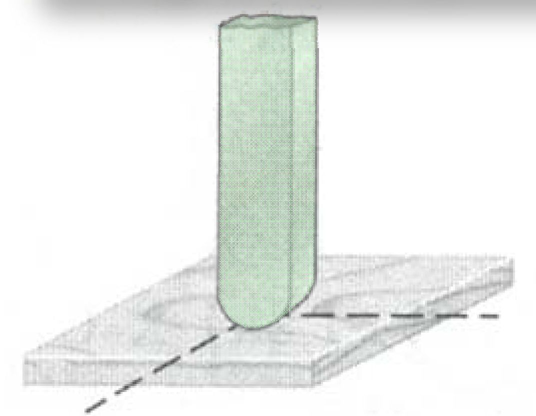
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo os movimentos nas direções perpendiculares ao plano e à direção de deslizamento

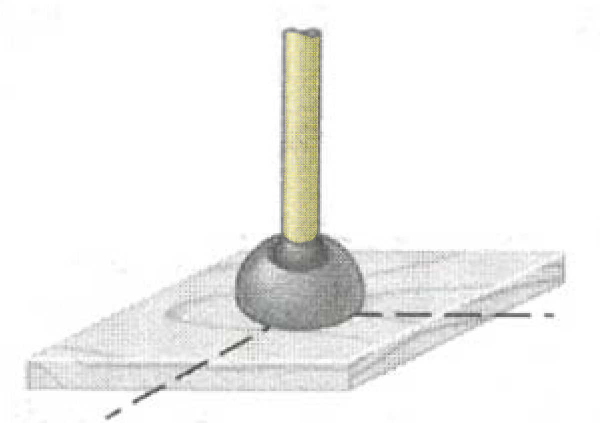


# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

Diagrama Espacial



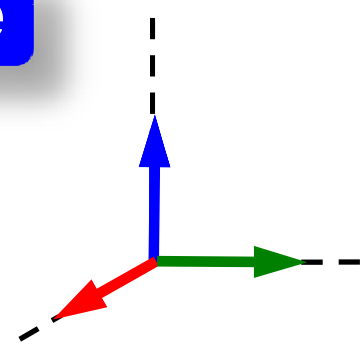
Superfície rugosa



Rótula ou junta esférica

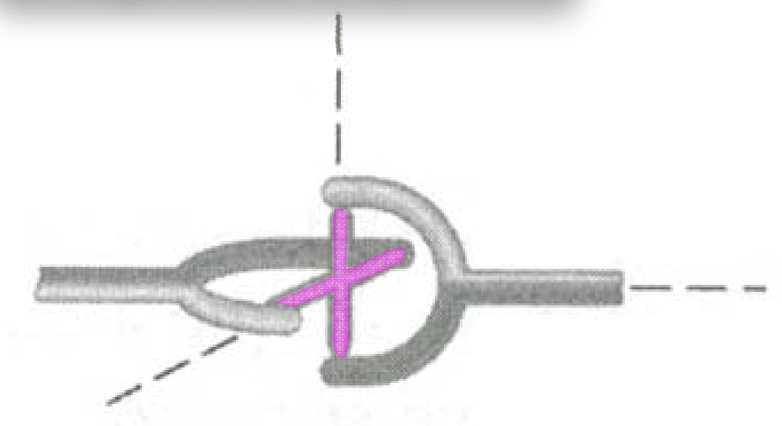
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo o movimento em todas as direções



# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

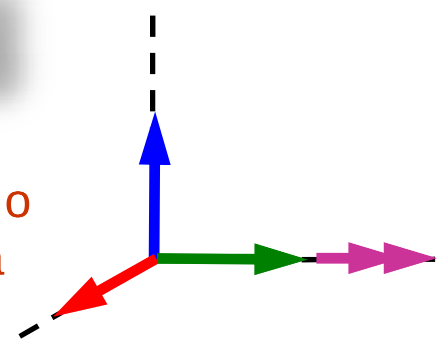
Diagrama Espacial



Junta universal

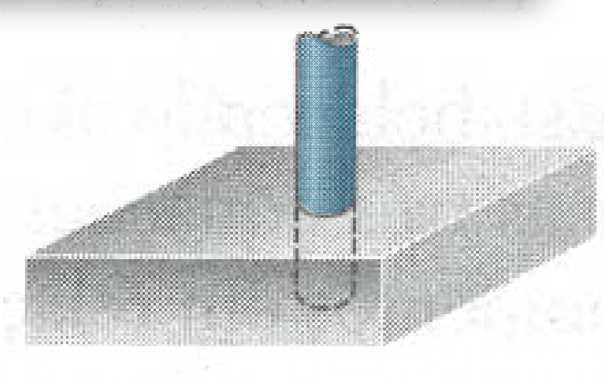
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo o movimento em todas as direções e binário impedindo o giro em torno do eixo perpendicular à cruz da conexão



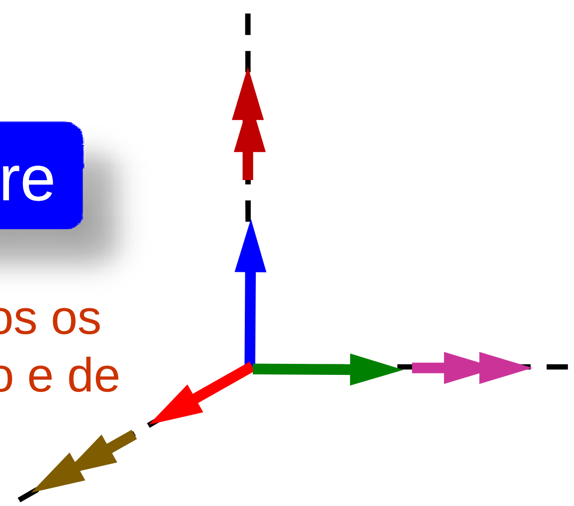
# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

Diagrama Espacial



Engaste

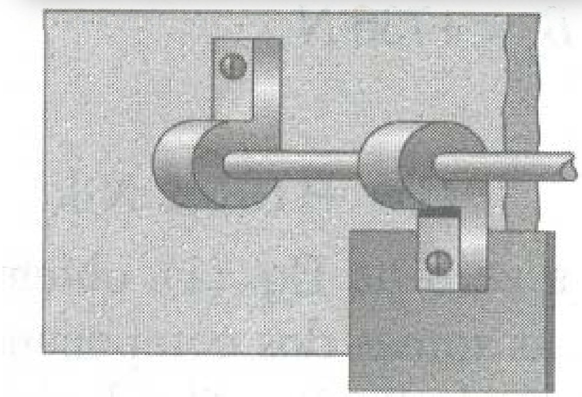
Diagrama de Corpo Livre



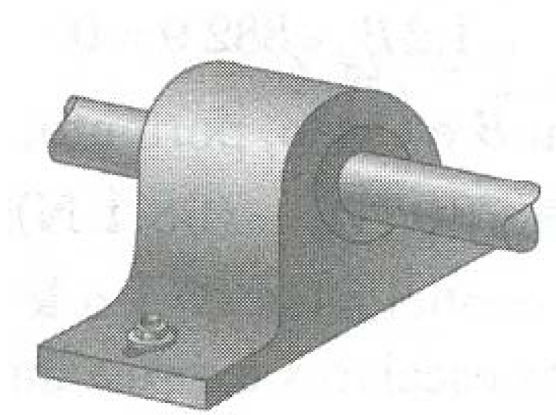
Forças e binários impedindo todos os movimento relativos de translação e de rotação

# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

Diagrama Espacial



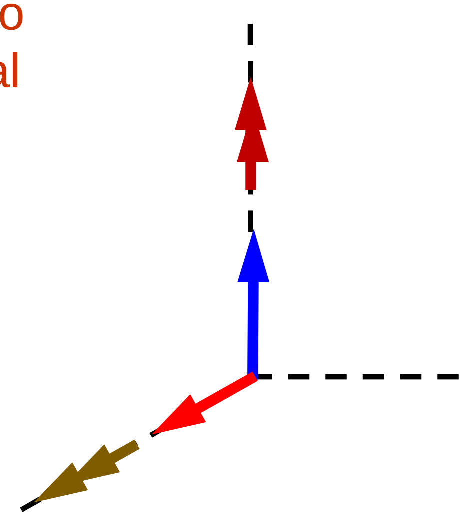
Dobradiça sustentando apenas carga radial



Mancal sustentando apenas carga radial

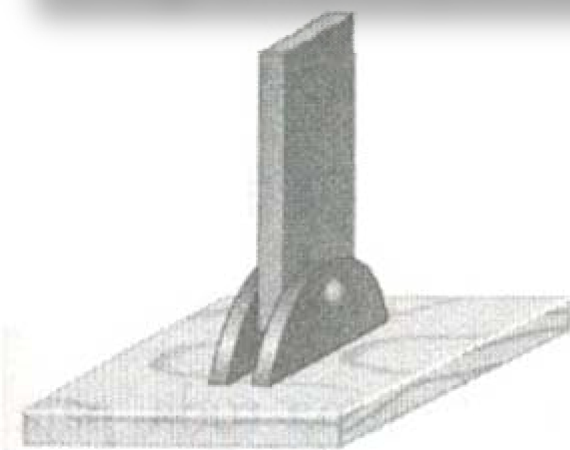
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo o movimento radial (direção perpendicular ao eixo do arranjo). Podem apresentar binários (não apreciáveis em condições normais de uso)

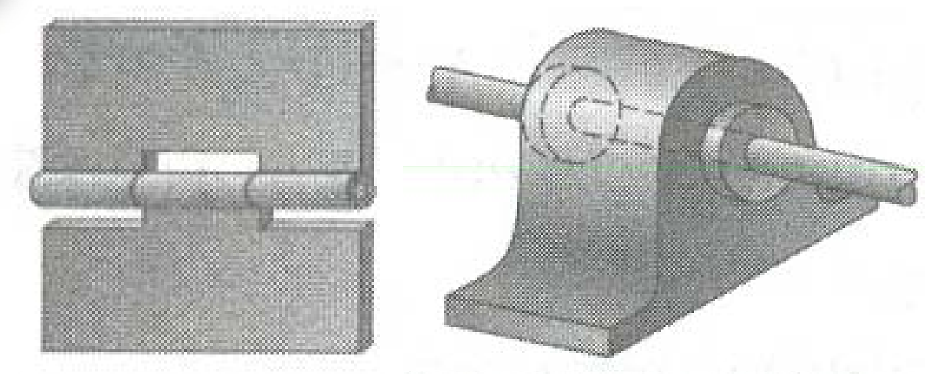


# Reações de Apoio e Conexões em Três Dimensões

## Diagrama Espacial



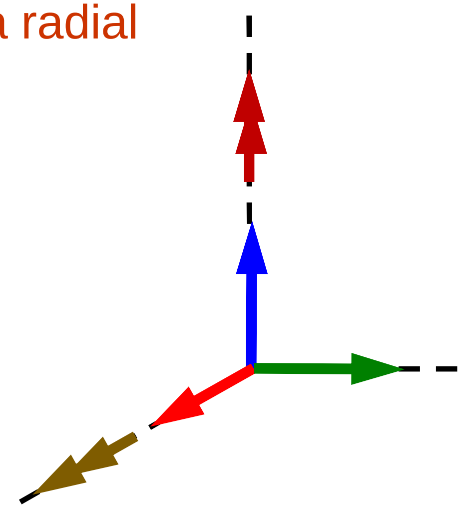
Pino e suporte



Dobradiça e mancal sustentando empuxo axial e carga radial

## Diagrama de Corpo Livre

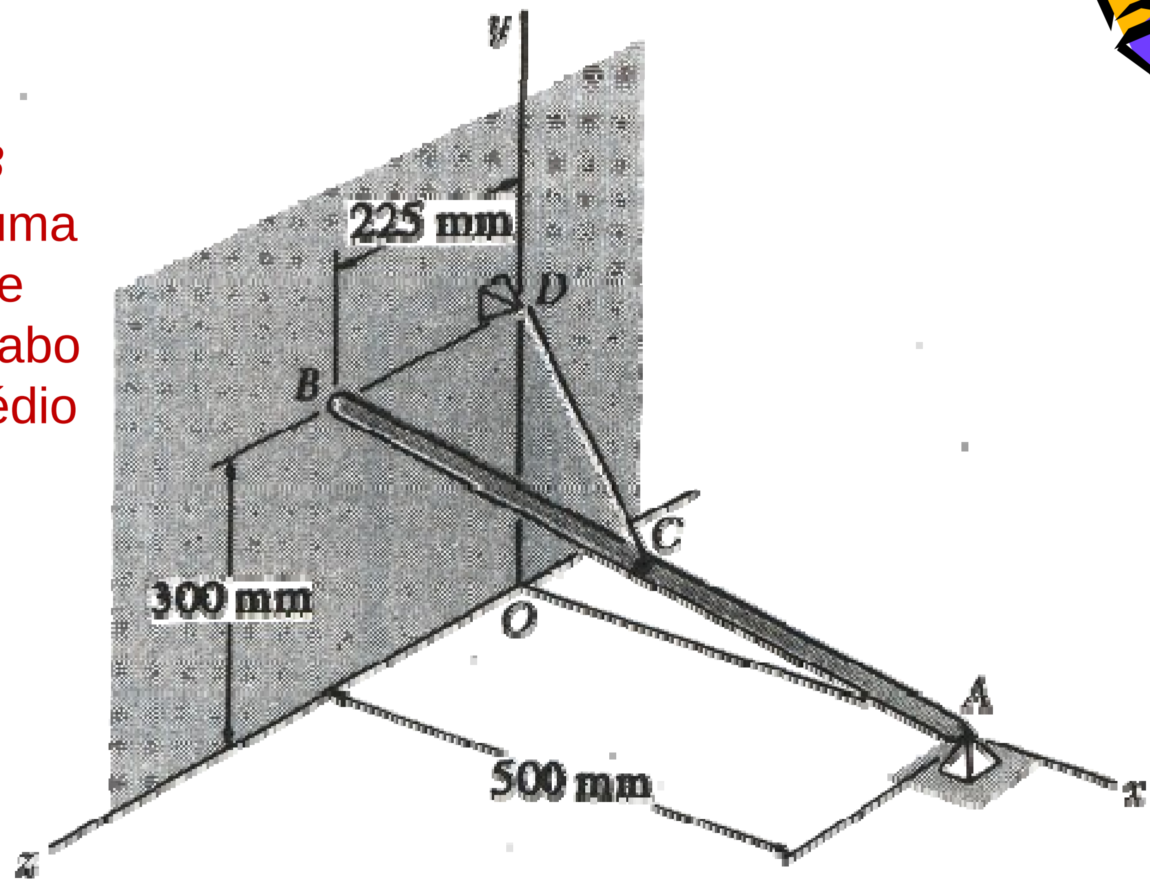
Forças impedindo todos os movimentos relativos translacionais. Podem apresentar binários (não apreciáveis em condições normais de uso)



# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo:

A barra uniforme *AB* pesa 60N. Ela tem uma junta esférica em *A* e está presa por um cabo *CD* fixo ao ponto médio *C* da barra.




Sabendo que a barra está encostada em uma parede lisa no ponto *B*, determine a força de tração no cabo e as reações em *A* e *B*.

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

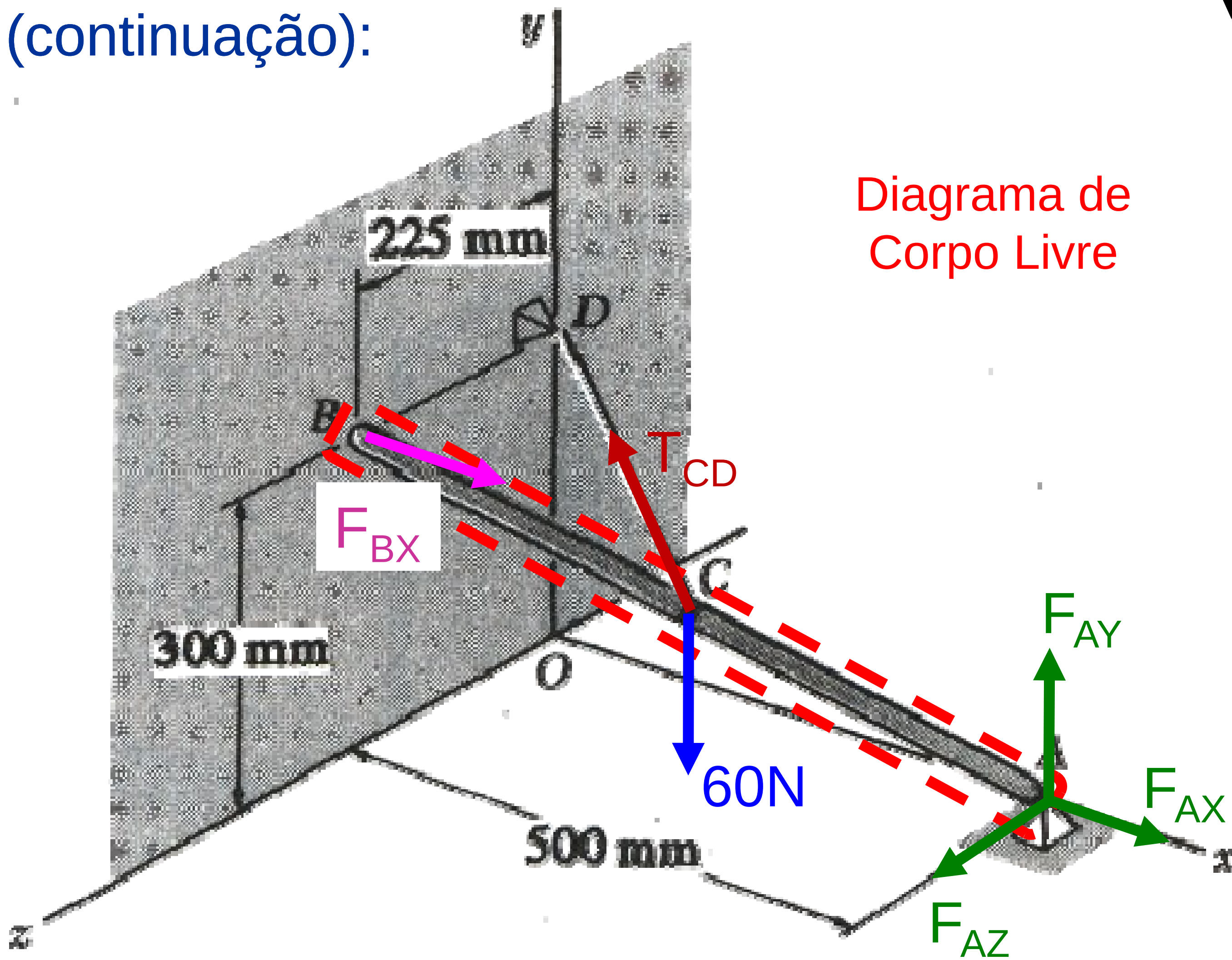
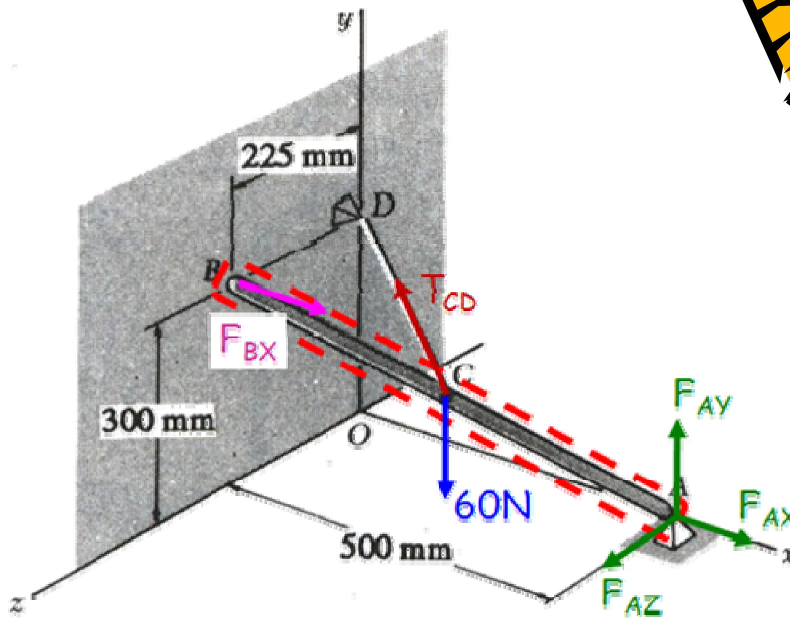



Diagrama de Corpo Livre

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):




Forças envolvidas

$$\vec{W} = (0; \quad -60; \quad 0)N$$

$$\vec{F}_A = (F_{AX}; \quad F_{AY}; \quad F_{AZ})$$

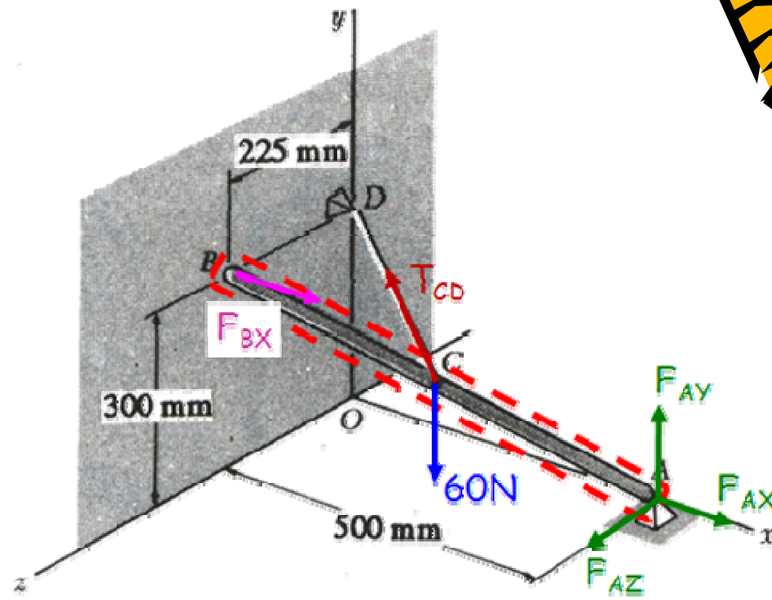
$$\vec{F}_B = (F_{BX}; \quad 0; \quad 0)$$

$$\vec{T}_{CD} = T_{CD}\hat{\lambda}_{CD} = (-0{,}8T_{CD}; \quad 0{,}48T_{CD}; \quad -0{,}36T_{CD})$$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

Sistema força-binário em relação ao ponto A



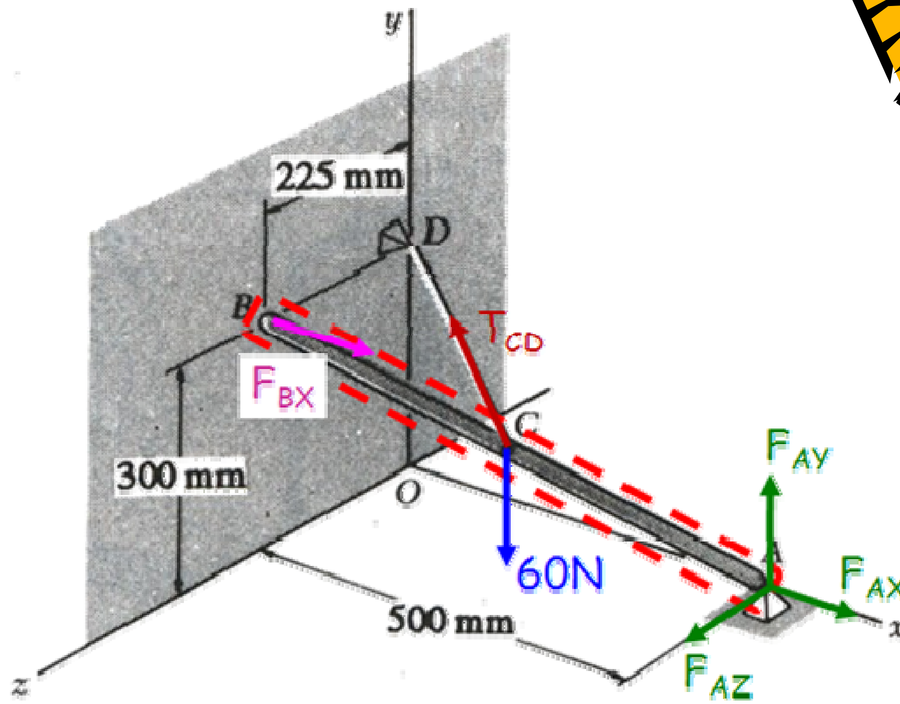

- $$\vec{R}_A = \left(F_{AX} + F_{BX} - 0{,}8T_{CD}\,;\, -60 + F_{AY} + 0{,}48T_{CD}\,;\, F_{AZ} - 0{,}36T_{CD}\right)$$

- $$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \overrightarrow{AC}\times\vec{W} + \overrightarrow{AB}\times\vec{F}_B + \overrightarrow{AC}\times\vec{T}_{CD}\\ &= \overrightarrow{AC}\times\left(\vec{W}+\vec{T}_{CD}\right) + \overrightarrow{AB}\times\vec{F}_B\\ &= \overrightarrow{AC}\times\left(\vec{W}+\vec{T}_{CD}\right) + 2\overrightarrow{AC}\times\vec{F}_B\\ &= \overrightarrow{AC}\times\left(\vec{W}+\vec{T}_{CD}+2\vec{F}_B\right)\end{aligned}$$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

Imposição do equilíbrio

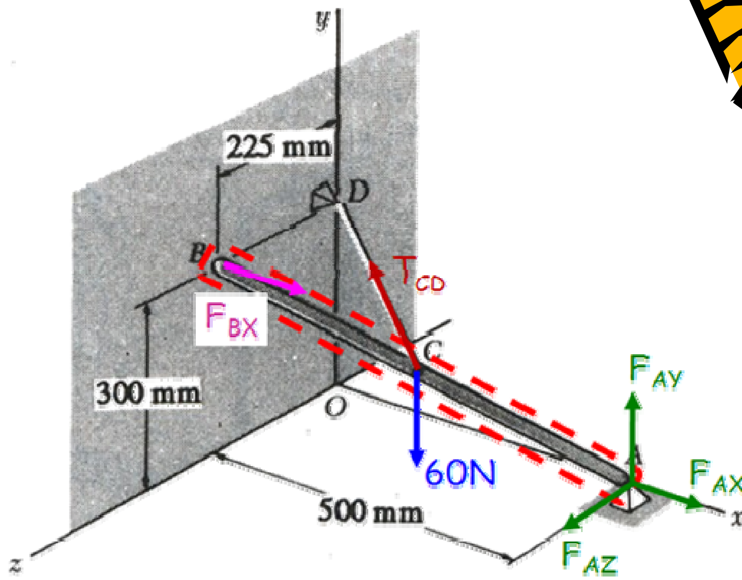



- $\vec{R}_A = \vec{0}$

- $\vec{M}_A = \vec{0}$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):




Sistema de equações resultante

- $F_{AX} + F_{BX} - 0{,}8T_{CD} = 0$
- $-60 + F_{AY} + 0{,}48T_{CD} = 0$
- $F_{AZ} - 0{,}36T_{CD} = 0$
- $-108T_{CD} + 6750 = 0$
- $225F_{BX} - 180T_{CD} = 0$
- $15000 - 300F_{BX} = 0$

# Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

Reações de apoio

$$F_{AX} = 0$$

$$F_{AY} = 30N$$

$$F_{AZ} = 22{,}5N$$

$$F_{BX} = 50N$$

$$T_{CD} = 62{,}5N$$