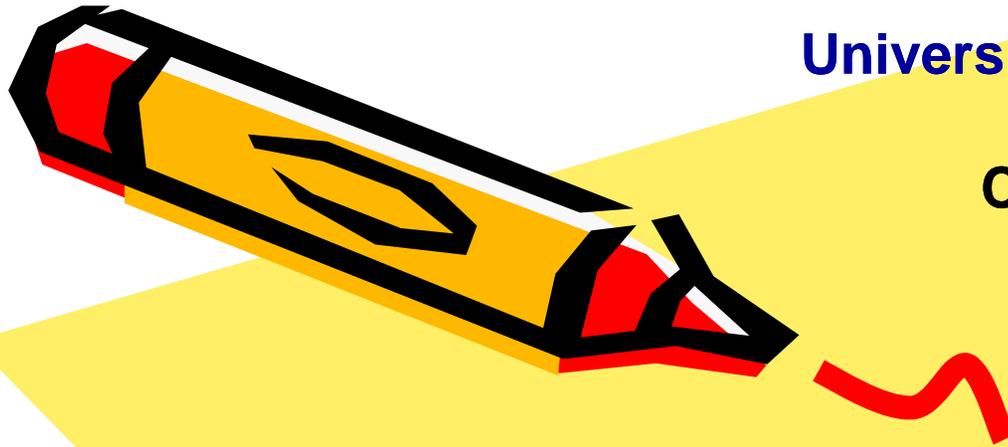
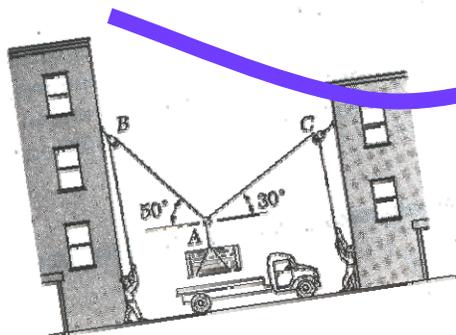


Universidade Federal de Alagoas
Centro de Tecnologia
Curso de Engenharia Civil



Disciplina: Mecânica dos Sólidos 1
Código: ECIV018
Professor: Eduardo Nobre Lages

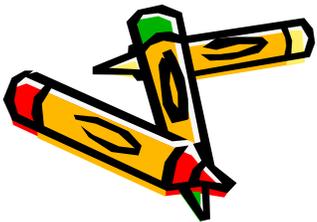
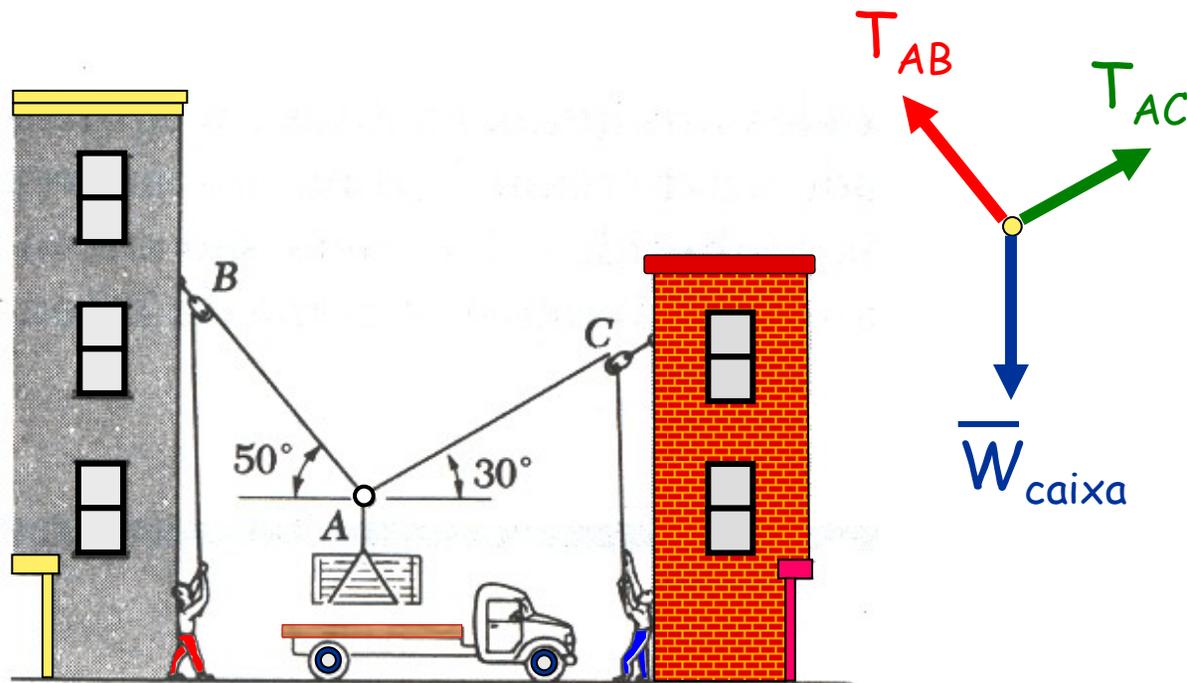
Estática das Partículas



Maceió/AL

Objetivo

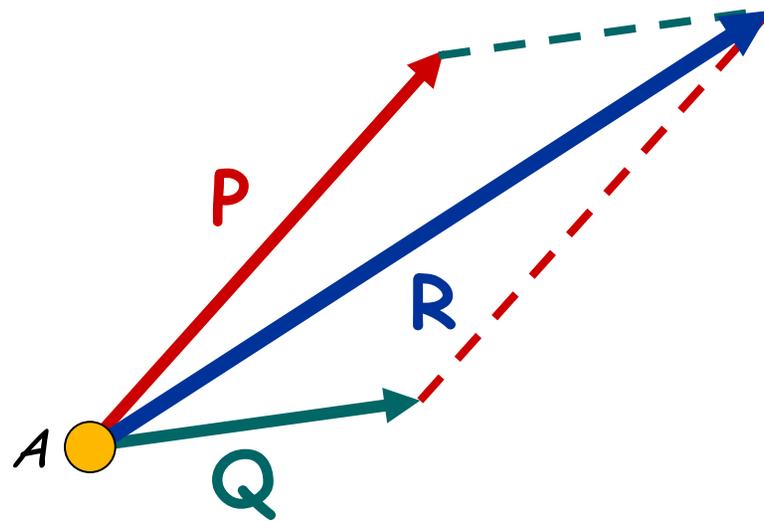
Estudo do efeito de sistemas de forças concorrentes.



Resultante de Duas Forças Concorrentes

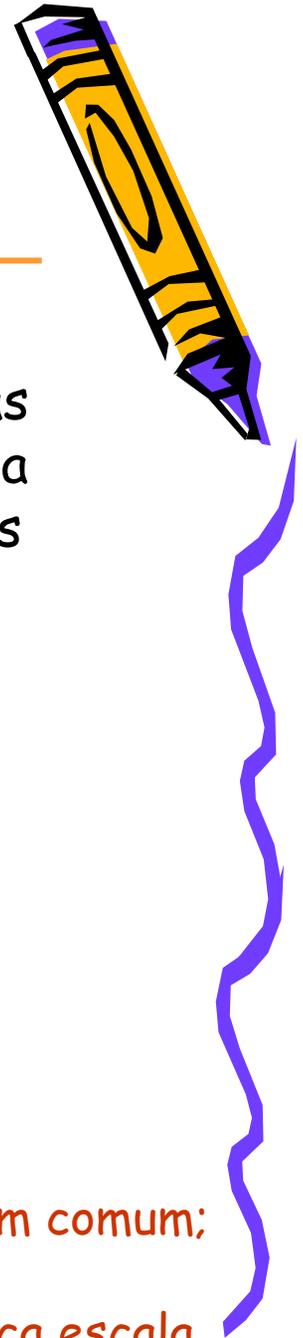
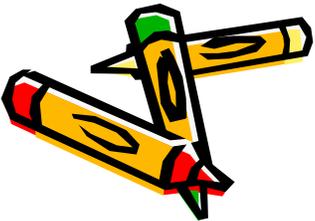
Regra do Paralelogramo para Adição de Forças:

Duas forças atuando numa partícula podem ser substituídas por uma única força, chamada *resultante*, obtida traçando a diagonal do paralelogramo que tem por lados as duas forças dadas.



Observações:

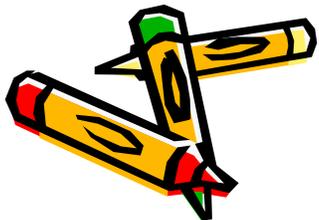
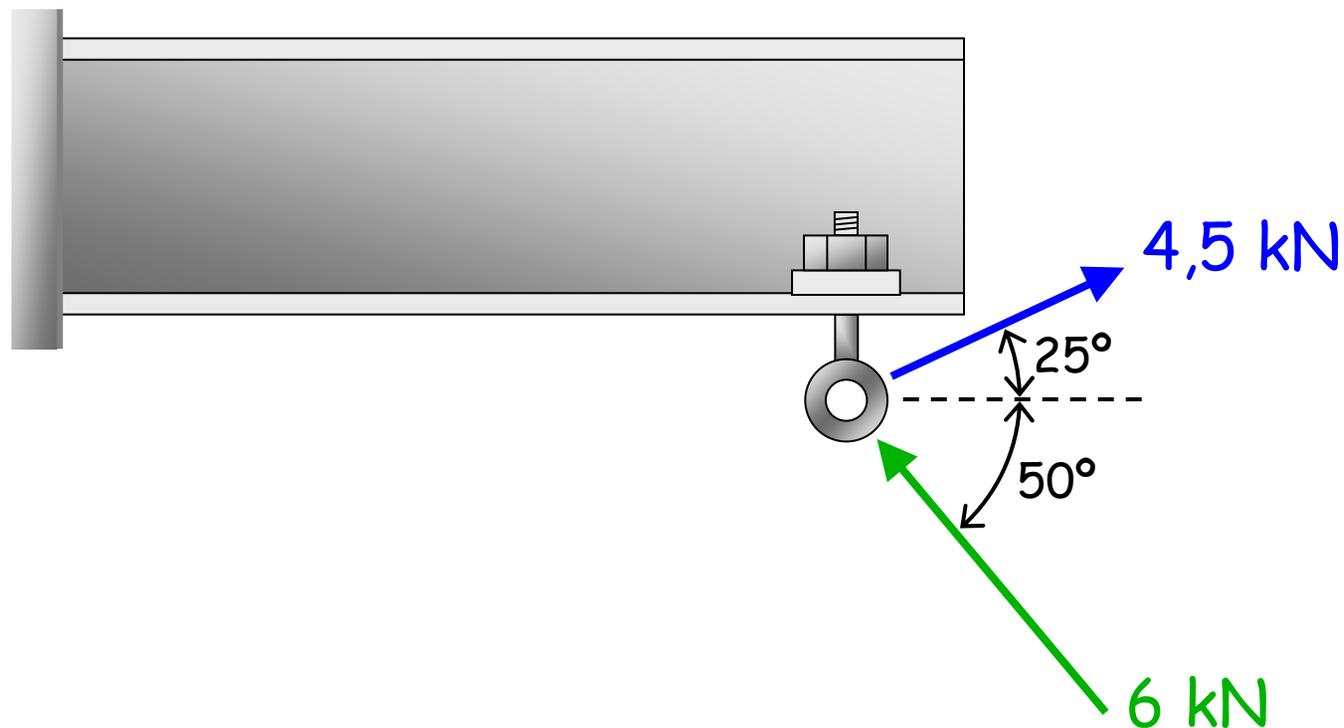
- As forças concorrentes devem apresentar origens em comum;
- As inclinações das forças devem ser obedecidas;
- Os tamanhos dos vetores devem obedecer a uma única escala de conversão.



Resultante de Duas Forças Concorrentes



Exemplo:



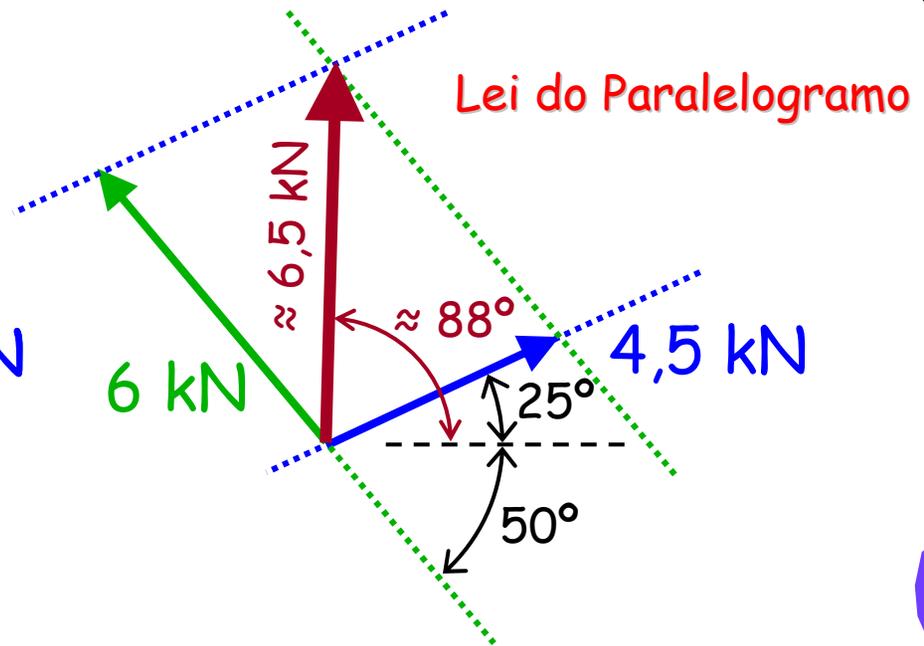
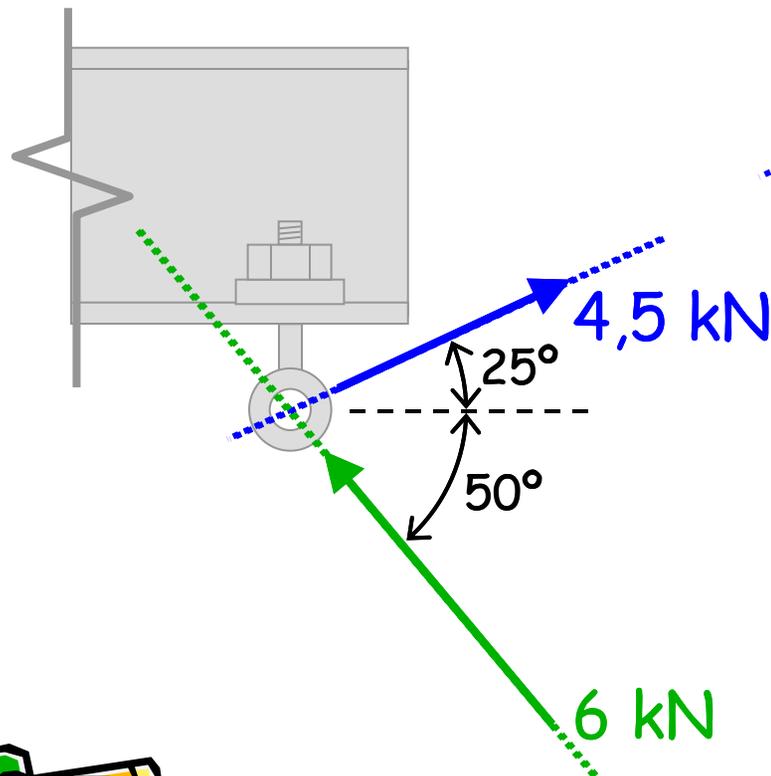
Duas forças são aplicadas à cabeça de um parafuso preso em uma viga. Determine a intensidade, a direção e o sentido de sua resultante.

Resultante de Duas Forças Concorrentes

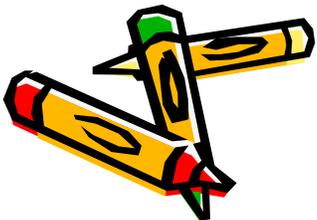


Exemplo (continuação):

Princípio da Transmissibilidade



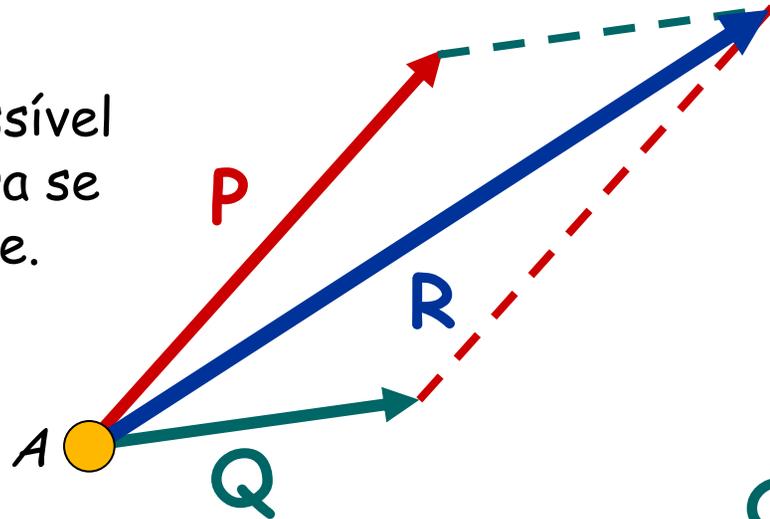
Resposta: 6,5 kN  88°



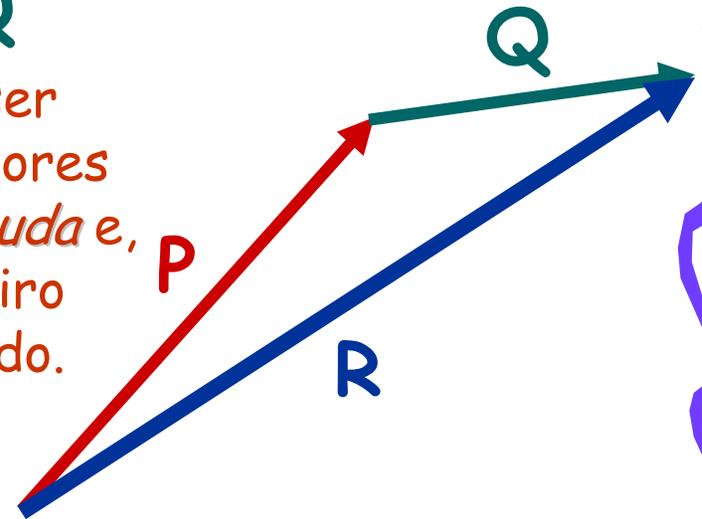
Resultante de Duas Forças Concorrentes

Regra do Triângulo:

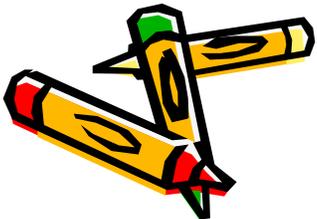
Da *lei do paralelogramo* é possível deduzir um outro método para se determinar a força resultante.



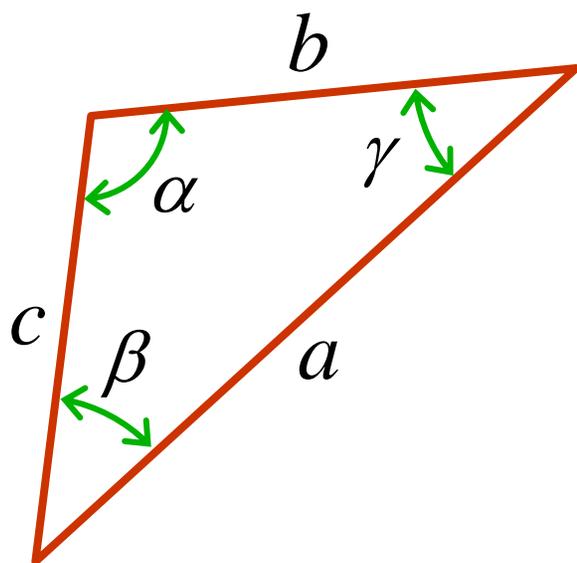
O mesmo vetor força resultante pode ser determinado combinando-se os dois vetores força originais na seqüência *ponta-a-cauda* e, em seguida, unindo-se a cauda do primeiro desenhado à ponta do segundo desenhado.



A ordem da combinação dos vetores originais não altera a força resultante (a soma de vetores é comutativa).



Identidades Trigonométricas para Soluções Analíticas



Teorema angular de Tales:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Lei dos senos:

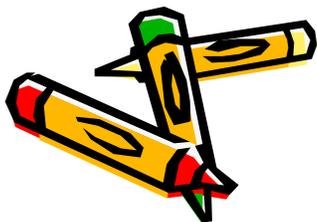
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Lei dos co-senos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

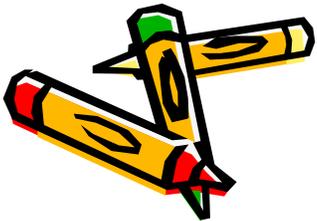
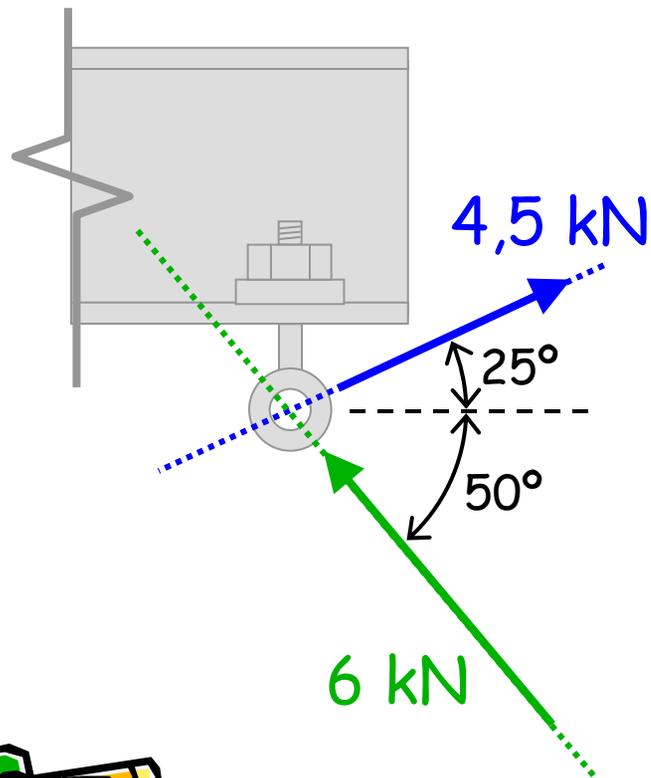
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



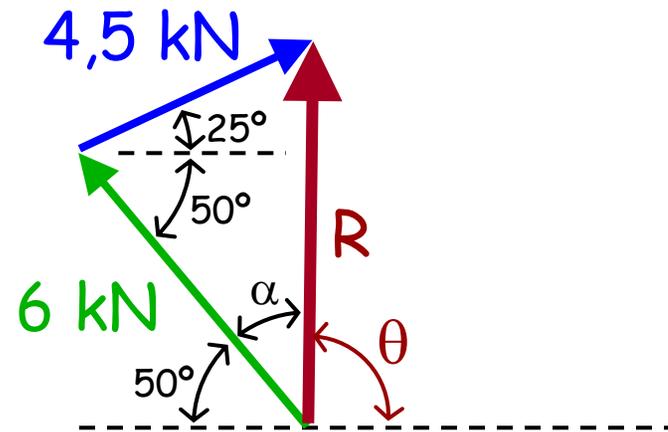
Identidades Trigonométricas para Soluções Analíticas



Exemplo Anterior:



Regra do Triângulo



Lei dos co-senos:

$$R^2 = 4,5^2 + 6^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 6 \cdot \cos 75^\circ$$

$$\Rightarrow R = 6,502 \text{ kN}$$

Lei dos senos:

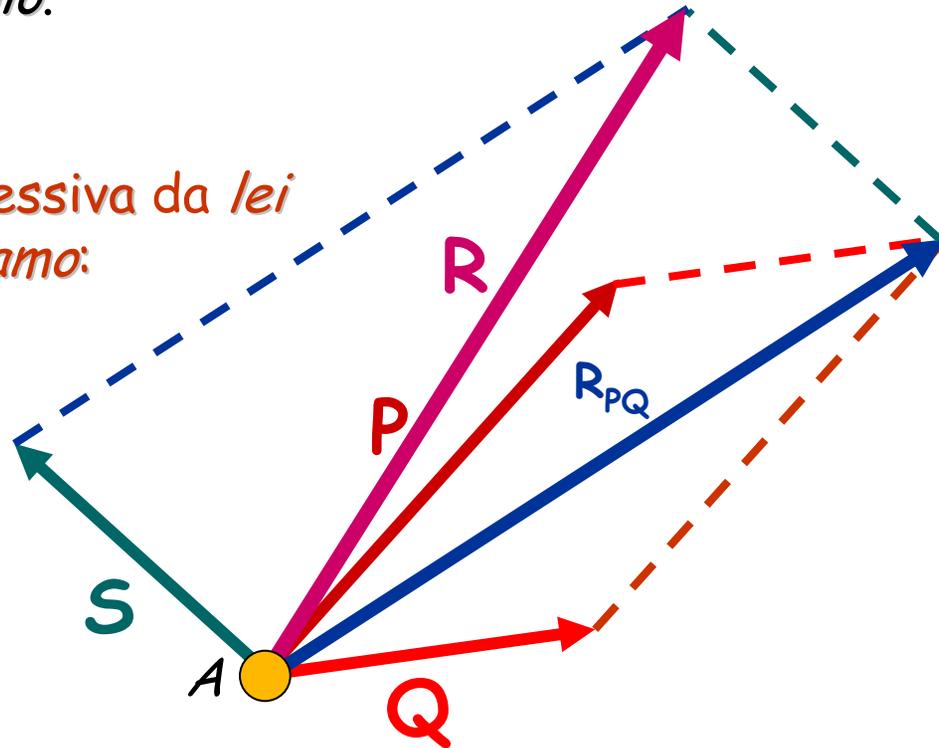
$$\frac{\sin 75^\circ}{R} = \frac{\sin \alpha}{4,5} \Rightarrow \alpha = 41,954^\circ$$

$$\text{Como } 50^\circ + \alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 88,046^\circ$$

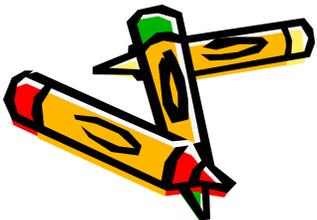
Resultante de Mais de Duas Forças Concorrentes

A princípio é possível encontrar a força resultante aplicando-se sucessivamente a *lei do paralelogramo* ou a *regra do triângulo*.

Aplicação sucessiva da *lei do paralelogramo*:



A ordem da combinação dos vetores originais não altera a força resultante (a soma de vetores é comutativa).

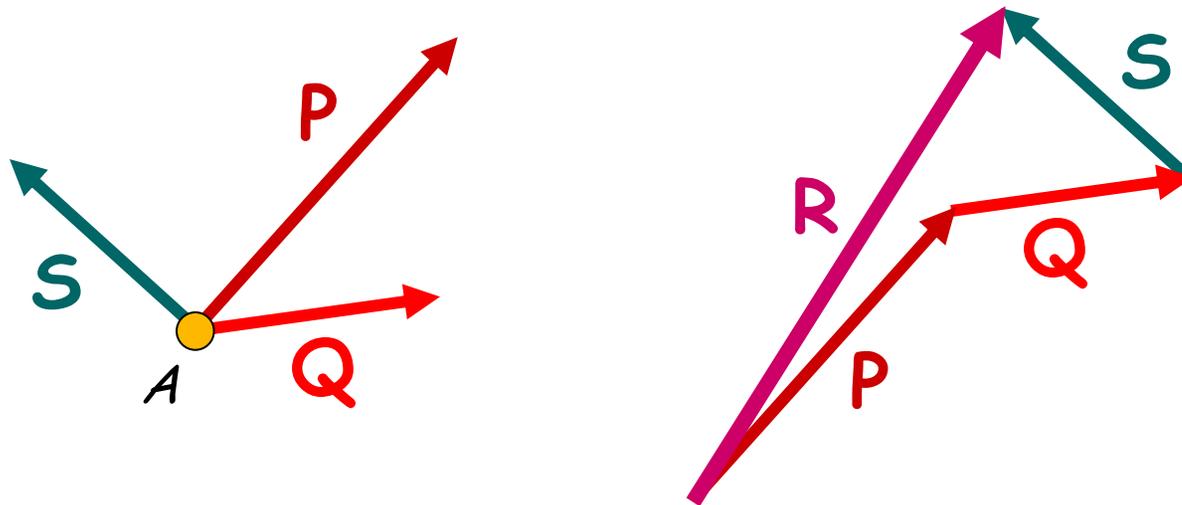


Resultante de Mais de Duas Forças Concorrentes



Regra do Polígono:

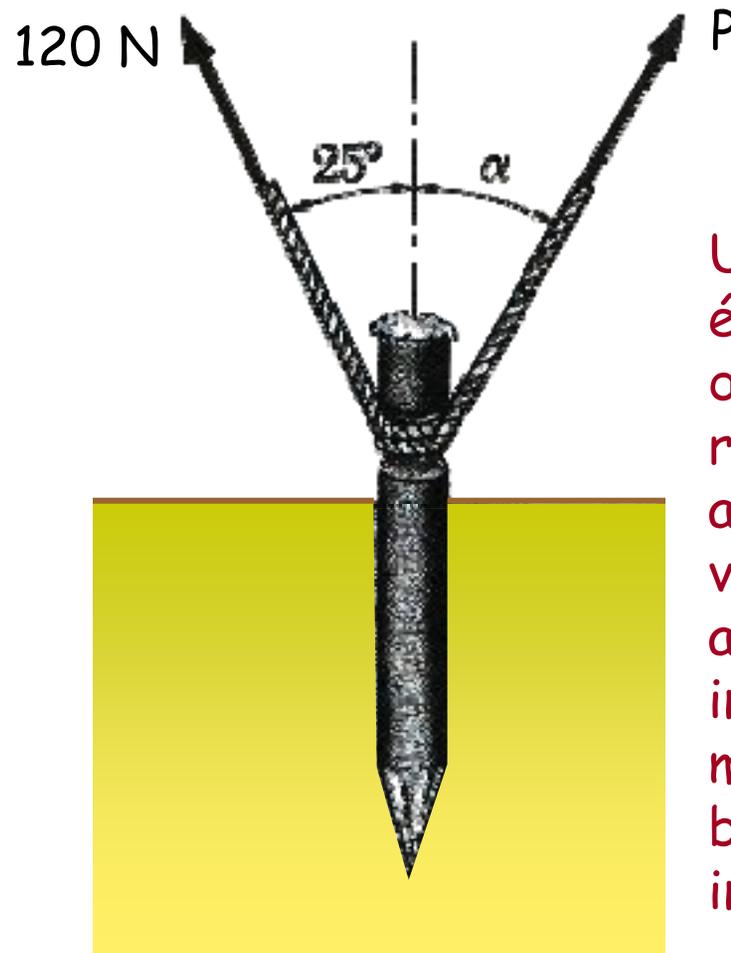
O vetor força resultante de um sistema de várias forças concorrentes pode ser determinado como uma *extensão da regra do triângulo*, combinando-se os vetores força originais na seqüência *ponta-a-cauda* e, em seguida, unindo-se a cauda do primeiro desenhado à ponta do último desenhado.



A ordem da combinação dos vetores originais não altera a força resultante (a soma de vetores é comutativa).

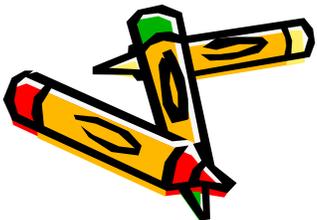
Resultante de Forças Concorrentes

Exercício:



Uma estaca cravada no solo é solicitada por dois trechos de corda. Impondo que a resultante das duas forças aplicadas à estaca seja vertical, determine:

- O valor de α para o qual a intensidade de P seja mínima;
- A correspondente intensidade de P .



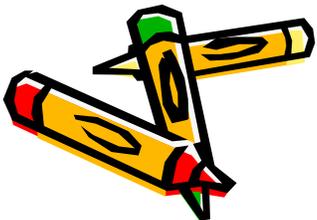
Componentes de uma Força



Anteriormente vimos que um sistema de duas ou mais forças concorrentes pode ser substituído por uma força única que gera o mesmo efeito sobre o corpo em que atua.

Reciprocamente, uma força única pode ser substituída por duas ou mais forças que, juntas, geram o mesmo efeito sobre o corpo em que atuam.

Essas forças são chamadas de *componentes* da força original, e o processo de substituição da original por elas é denominado *decomposição dos componentes da força*.



Para cada força existe um número infinito de possíveis conjuntos de componentes.

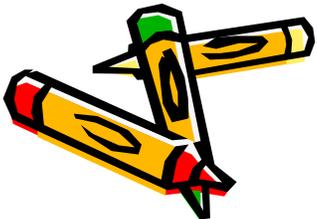
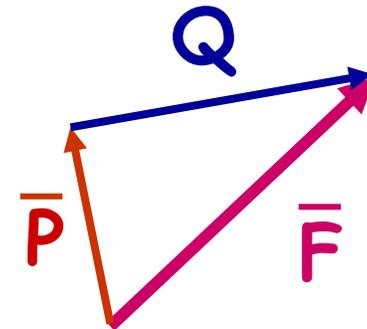
Componentes de uma Força

Pensando no processo prático de decomposição de uma força em duas outras, para o caso plano, duas situações podem ser propostas:

1) Um dos dois componentes, P , é conhecido

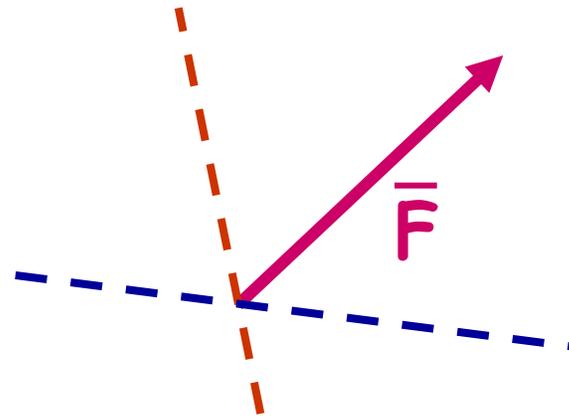


O segundo componente é obtido aplicando-se a *regra do triângulo* unindo-se a ponta do componente conhecido à ponta da força original.

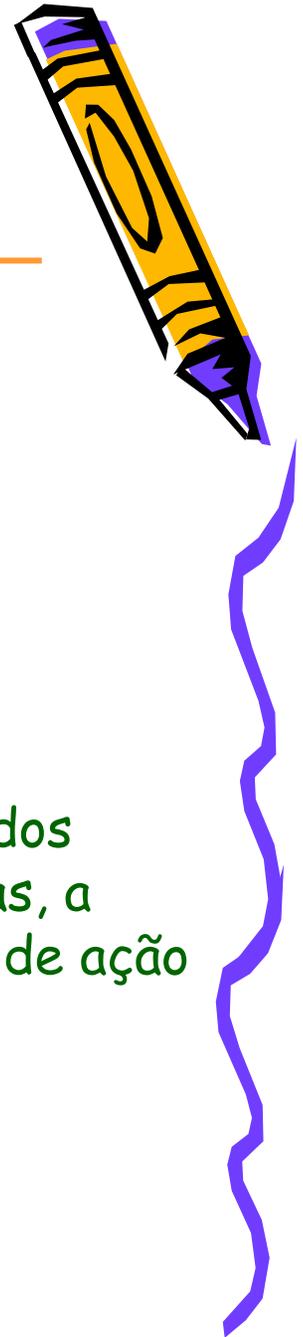
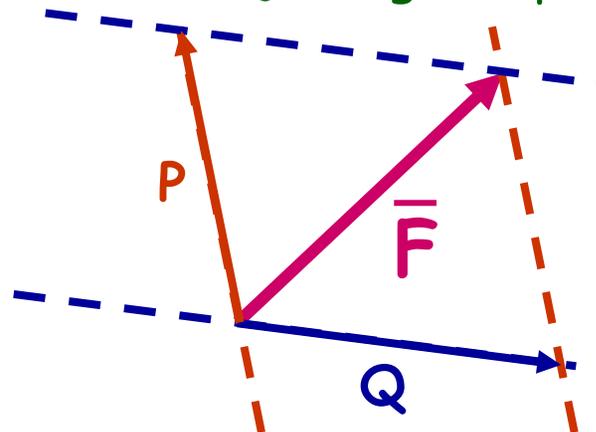


Componentes de uma Força

2) A linha de ação de cada componente é conhecida



A intensidade e o sentido dos componentes são obtidos aplicando-se a *lei do paralelogramo* traçando-se retas, a partir da ponta da força original, paralelas às linhas de ação dadas.



Componentes Retangulares de uma Força



Anteriormente foram apresentados métodos gráficos (lei do paralelogramo, regra do triângulo e regra do polígono), assim como um método analítico (derivado da regra do triângulo), para composição de forças concorrentes.

Os métodos gráficos, a exemplo da regra do polígono, podem ser aplicados na determinação da força resultante de um sistema de forças concorrentes, porém incorpora ao cálculo imprecisões inerentes ao processo de manipulação gráfica.

O método analítico, derivado da regra do triângulo, está limitado à composição de duas forças concorrentes. Para o caso de mais forças é preciso aplicar este método analítico repetidamente.

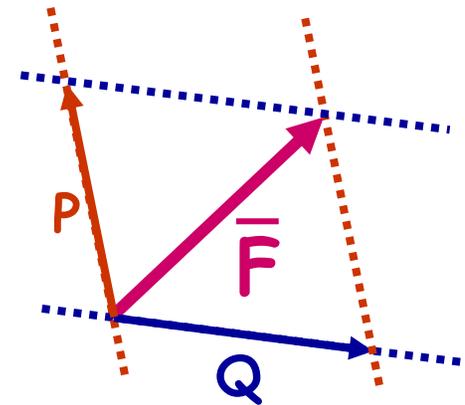


O próximo passo será definir um método analítico prático que possa trabalhar um sistema com uma quantidade qualquer de forças concorrentes.

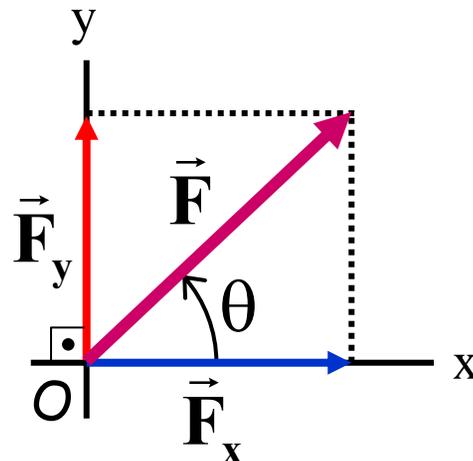
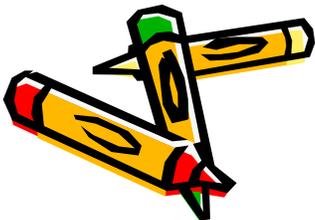
Componentes Retangulares de uma Força



Anteriormente foi discutido o conceito de componentes de uma força, em particular, quando se estabelecem, no caso plano, duas direções de decomposição, tendo como suporte a lei do paralelogramo.



Estabelecendo direções de decomposição perpendiculares, o paralelogramo se transforma num retângulo, o que leva a expressões analíticas simples para os componentes da força (componentes cartesianos ou retangulares).



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$\vec{F}_x = F_x \hat{i}$$

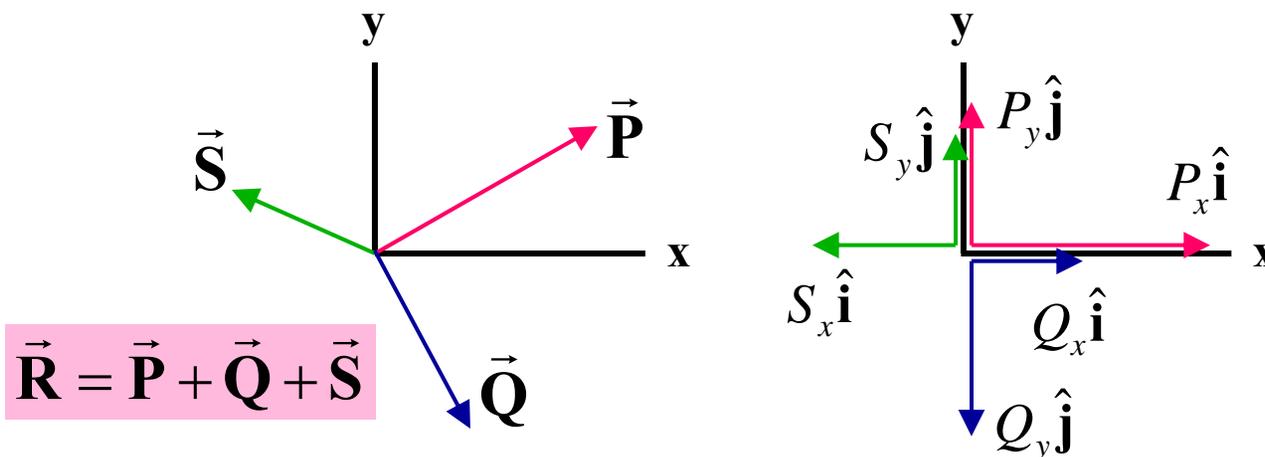
$$\vec{F}_y = F_y \hat{j}$$

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

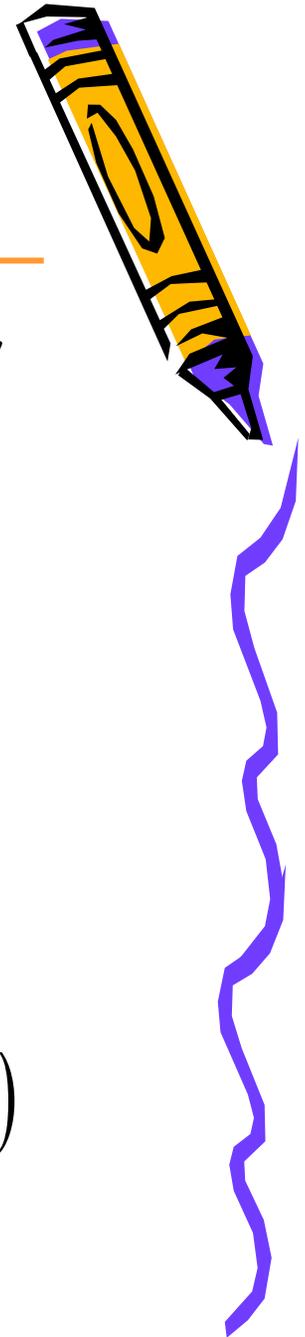
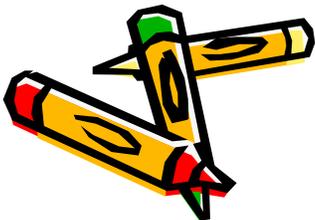
Adição de Forças pela Soma dos Componentes

Independentemente das duas direções de decomposição, os componentes da força resultante de um conjunto de forças concorrentes podem ser determinados através das somas dos componentes das forças envolvidas.



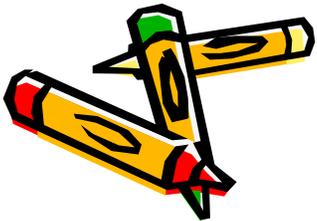
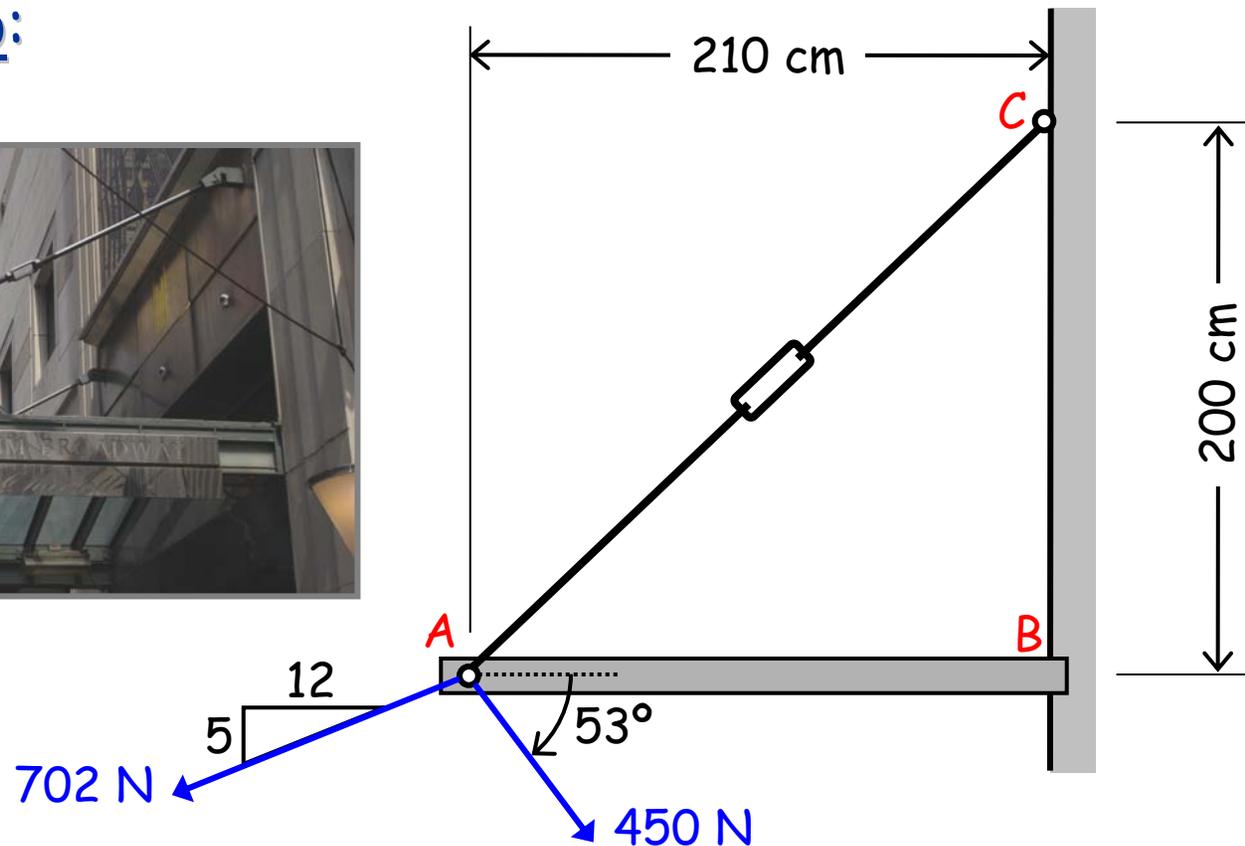
$$\vec{R} = (P_x \hat{i} + P_y \hat{j}) + (Q_x \hat{i} + Q_y \hat{j}) + (S_x \hat{i} + S_y \hat{j})$$

$$\vec{R} = \underbrace{(P_x + Q_x + S_x)}_{R_x} \hat{i} + \underbrace{(P_y + Q_y + S_y)}_{R_y} \hat{j}$$



Adição de Forças pela Soma dos Componentes

Exemplo:

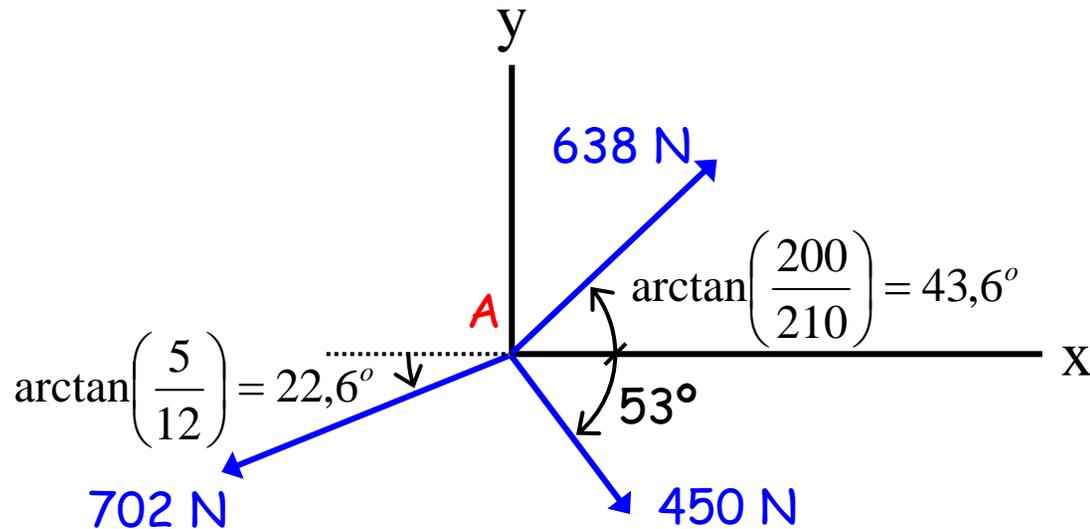


Sabendo que a tração na haste AC vale 638 N, determine a resultante das três forças exercidas no ponto A da viga AB.

Adição de Forças pela Soma dos Componentes



Exemplo (continuação):



$$R_x = 638 \cdot \cos 43,6^\circ + 702 \cdot \cos 202,6^\circ + 450 \cdot \cos 307^\circ$$

$$R_x = 84,7 \text{ N}$$

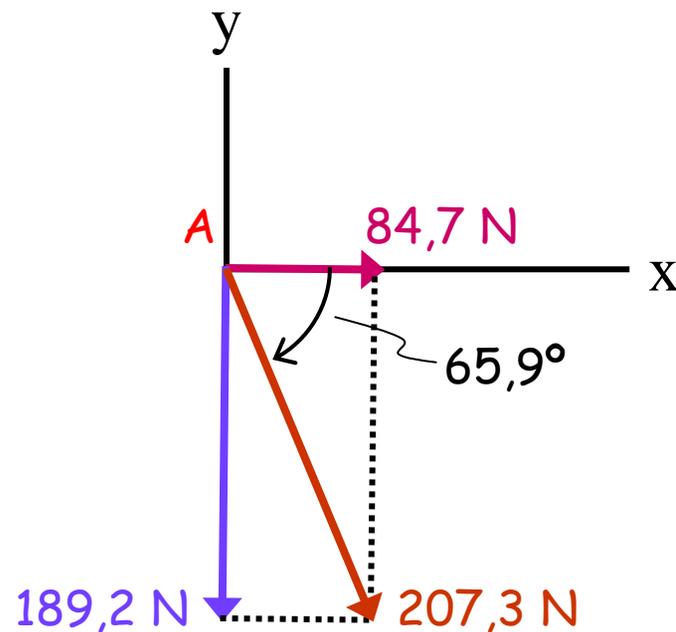
$$R_y = 638 \cdot \sin 43,6^\circ + 702 \cdot \sin 202,6^\circ + 450 \cdot \sin 307^\circ$$

$$R_y = -189,2 \text{ N}$$



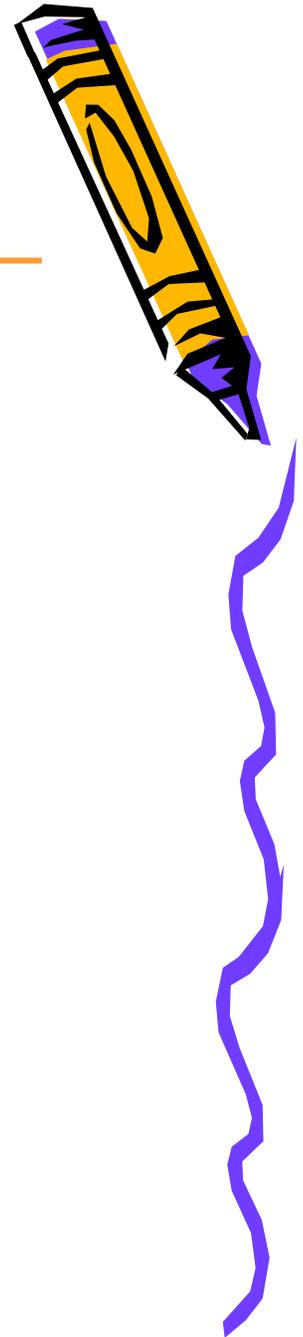
Adição de Forças pela Soma dos Componentes

Exemplo (continuação):



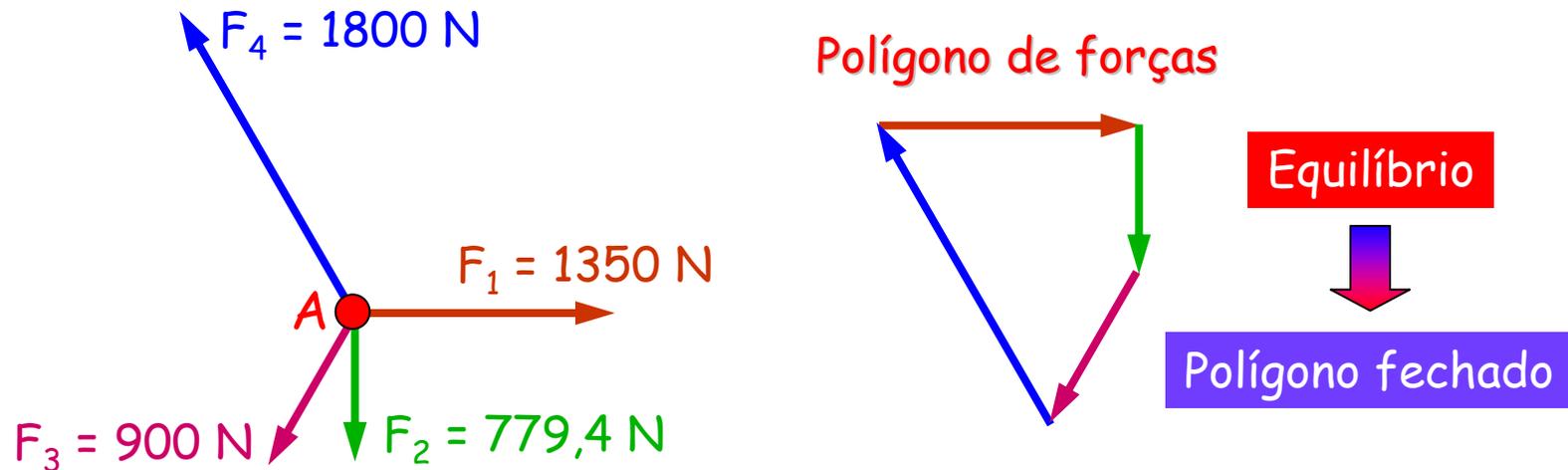
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = 207,3 \text{ N}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \Rightarrow \theta = -65,9^\circ$$



Equilíbrio de uma Partícula

Quando a força resultante equivalente de TODAS as forças concorrentes que atuam numa partícula é igual a zero, a partícula está em equilíbrio.

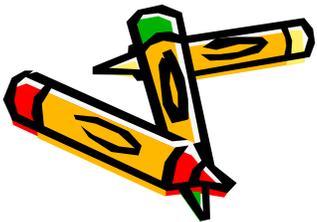


Algebricamente o equilíbrio corresponde a

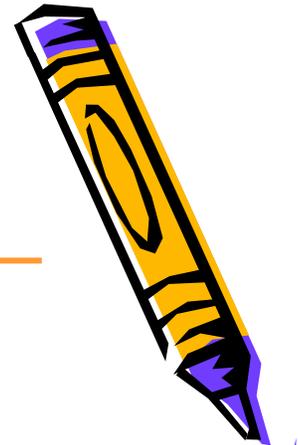
$$\vec{R} = \vec{0}$$

que em termos dos componentes retangulares pode ser expresso como

$$R_x = \sum F_x = 0 \quad R_y = \sum F_y = 0$$



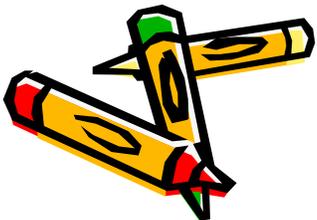
Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula



A maioria dos problemas que tratam do equilíbrio de uma partícula se enquadra em duas categorias:

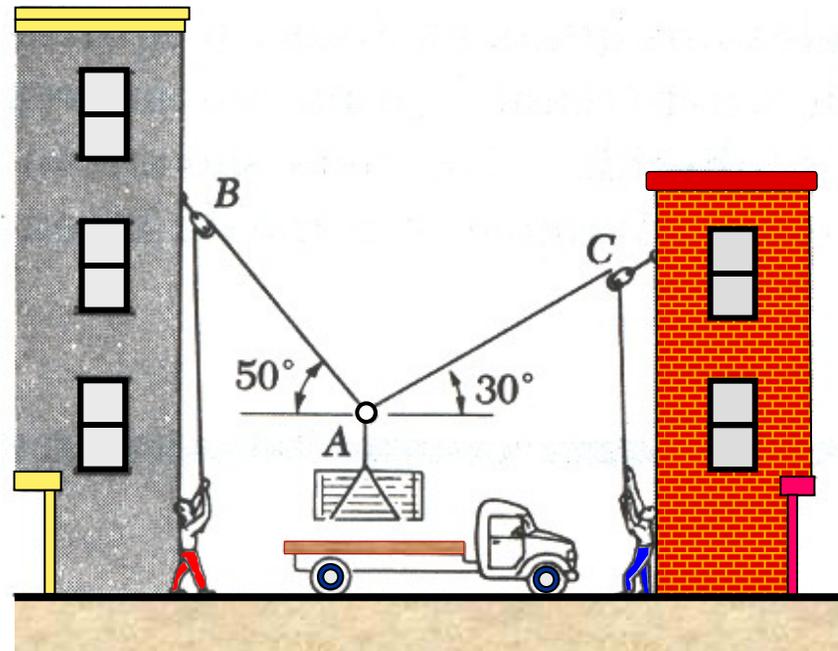
- **Verificação:** quando **todas** as forças que atuam na partícula são conhecidas e se deseja saber se a condição de equilíbrio é ou não atendida.

- **Imposição:** quando **algumas** das forças que atuam na partícula são desconhecidas e se deseja saber quem são essas forças desconhecidas que garantem a condição de equilíbrio.



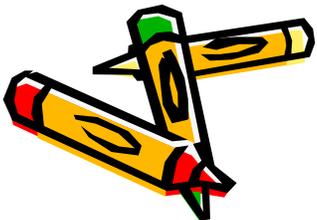
Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula

Para identificação da situação física real do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como diagrama espacial.



Alguns problemas podem ser estabelecidos:

- Quão resistentes devem ser os cabos?
- Quão resistentes devem ser os fixadores das roldanas?
- Quão fortes devem ser os operários?



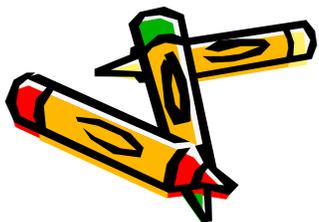
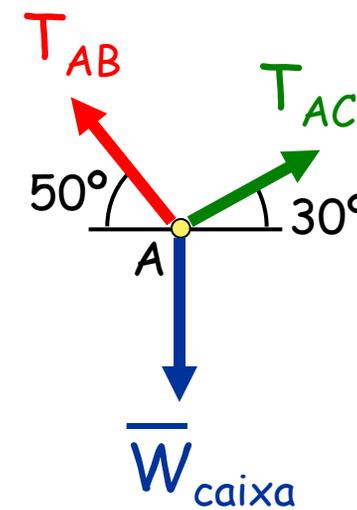
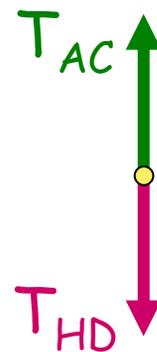
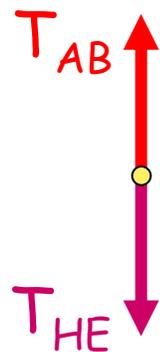
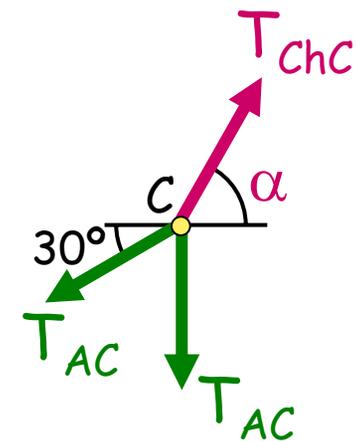
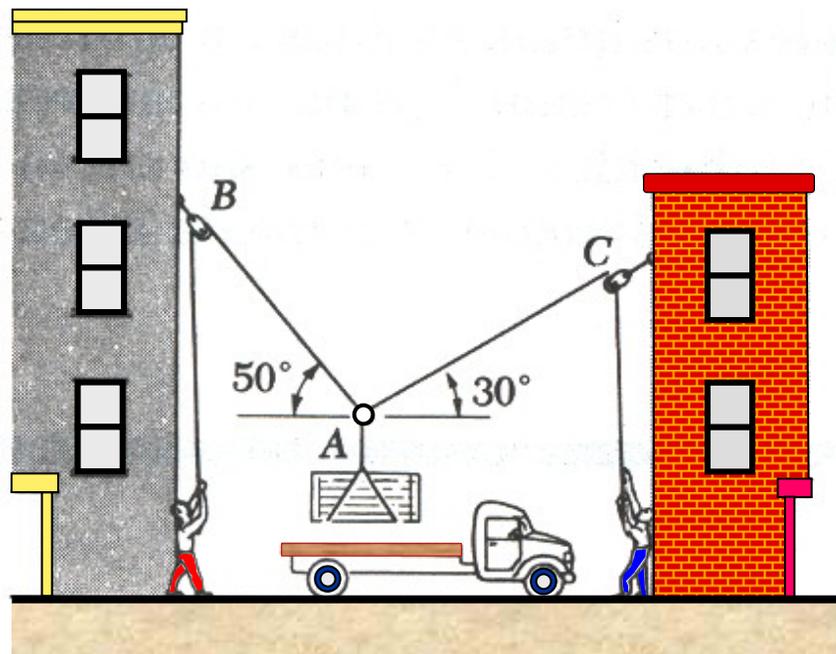
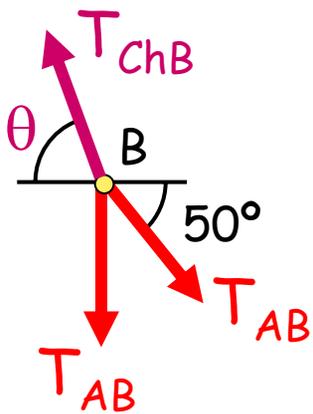
Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula



Para os problemas que envolvem o equilíbrio de uma partícula, escolhe-se uma partícula **SIGNIFICATIVA** e traça-se um diagrama separado, denominado de diagrama de corpo livre, mostrando essa partícula e todas as forças que atuam sobre ela.

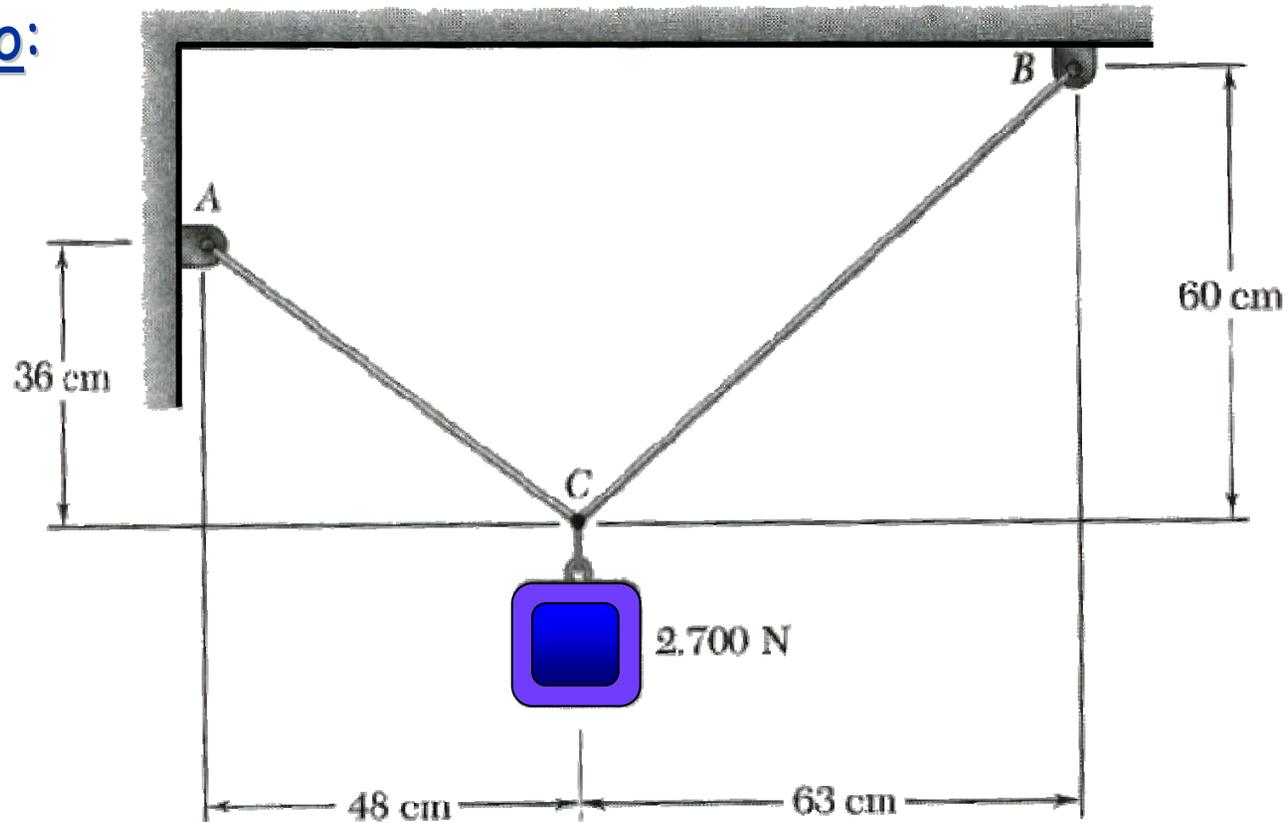


Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula



Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula

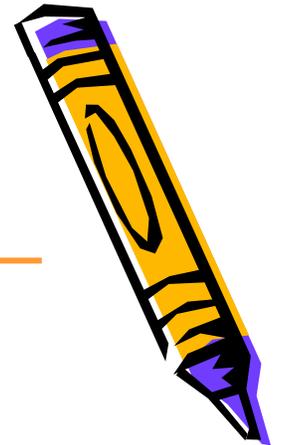
Exemplo:



Dois cabos estão ligados em C e são carregados tal como mostra a figura. Visando a especificação dos trechos de cabo AC e BC, determine as trações nos mesmos.

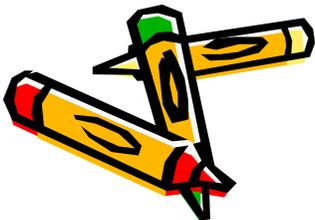
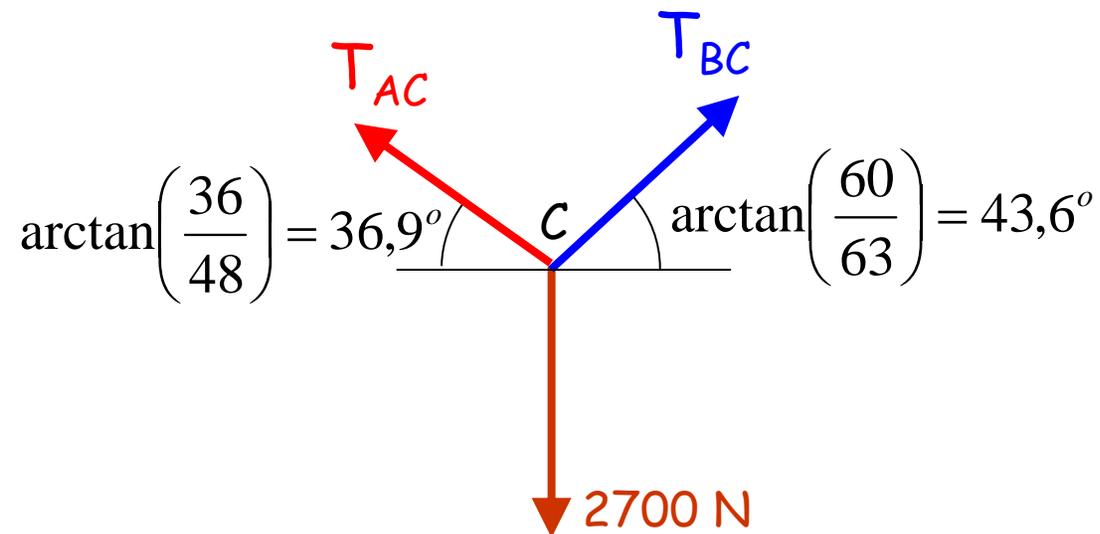


Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula



Exemplo (continuação):

Diagrama de Corpo Livre

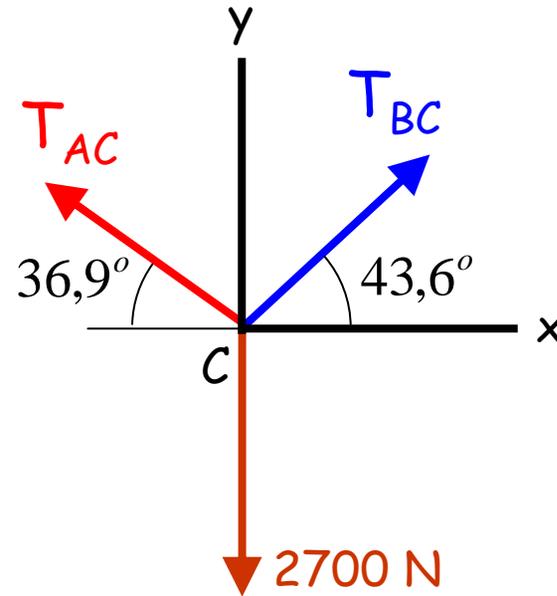


Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula



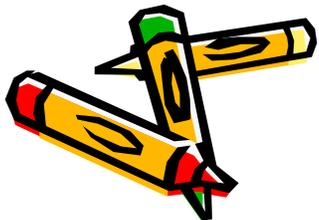
Exemplo (continuação):

Imposição do Equilíbrio



$$R_x = 0 \therefore T_{BC} \cos 43,6^\circ + T_{AC} \cos 143,1^\circ + 2700 \cos 270^\circ = 0$$

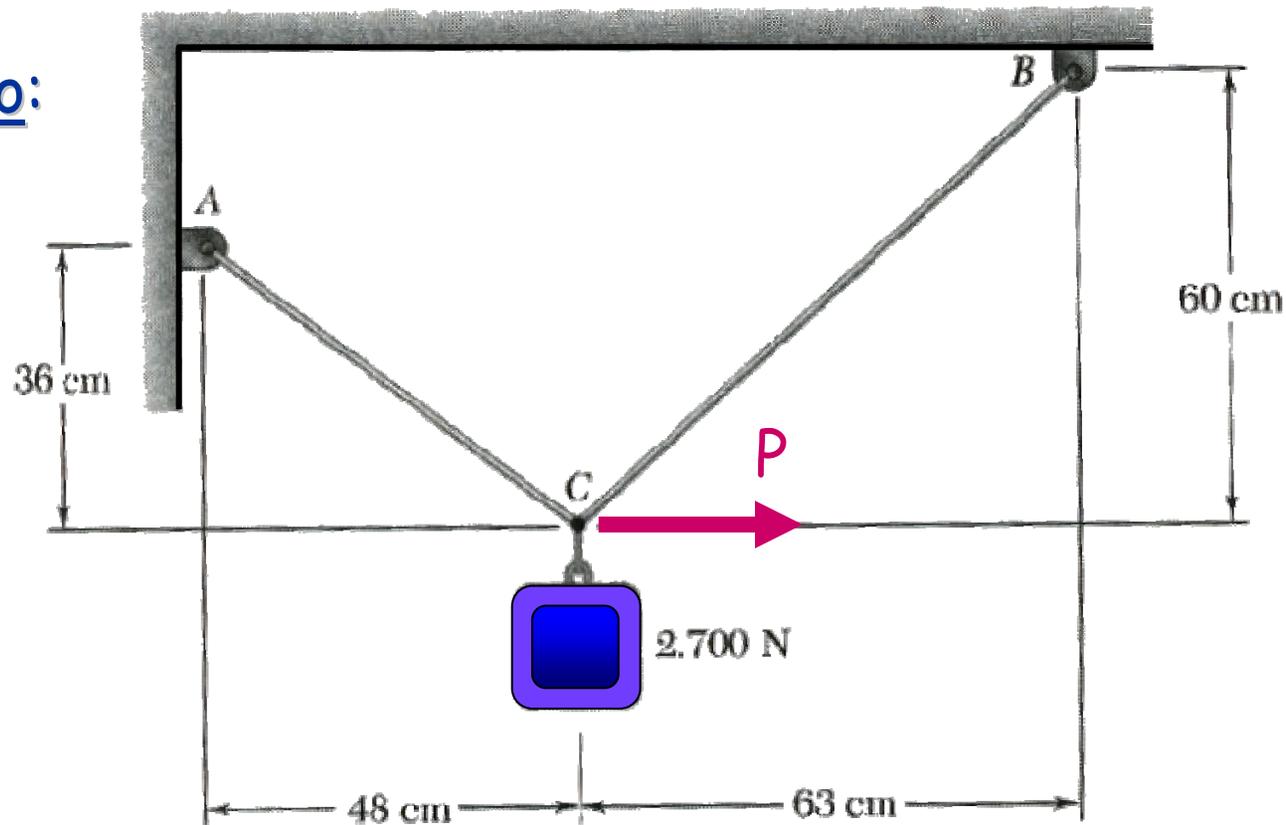
$$R_y = 0 \therefore T_{BC} \sin 43,6^\circ + T_{AC} \sin 143,1^\circ + 2700 \sin 270^\circ = 0$$



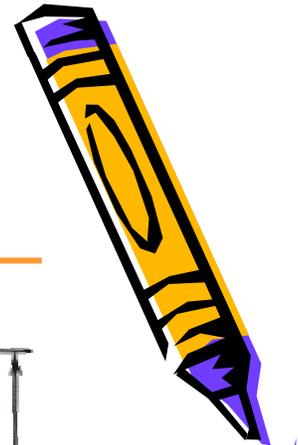
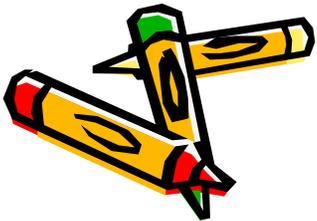
$$\begin{cases} 0,724 \cdot T_{BC} - 0,800 \cdot T_{AC} = 0 \\ 0,690 \cdot T_{BC} + 0,600 \cdot T_{AC} = 2700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AC} = 1981,8 \text{ N} \\ T_{BC} = 2189,8 \text{ N} \end{cases}$$

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula

Exercício:

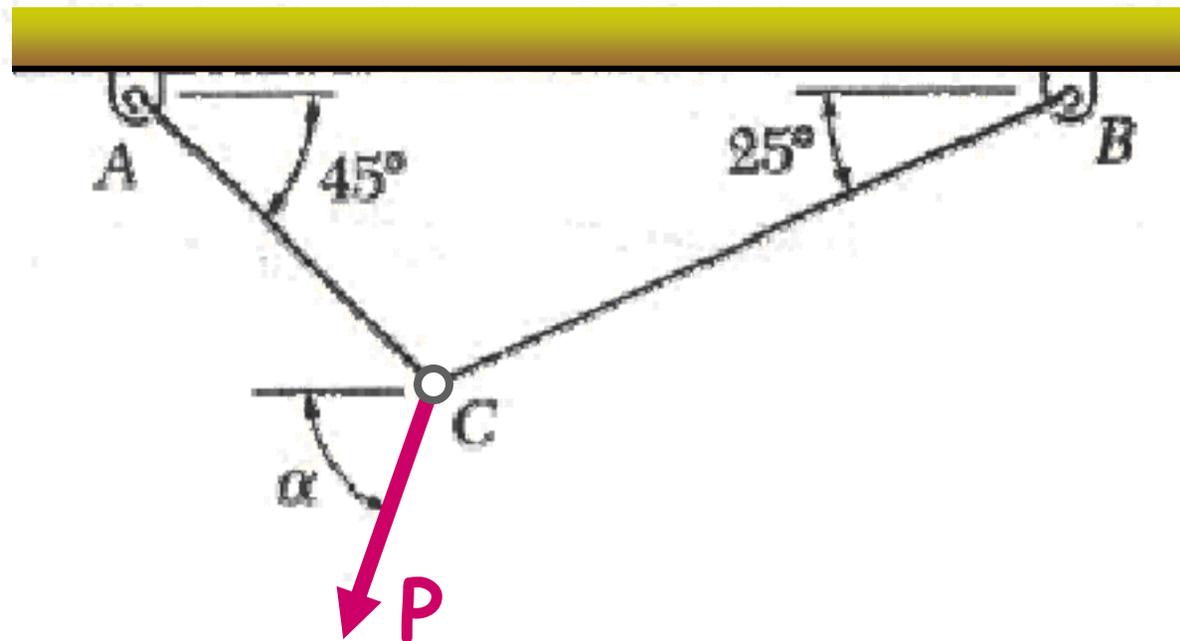


Dois cabos estão ligados em C e são carregados tal como mostra a figura. Sabendo-se que os trechos de cabo AC e BC suportam até 2400 N e 2200 N, respectivamente, determine a máxima força horizontal P que pode atuar no arranjo.

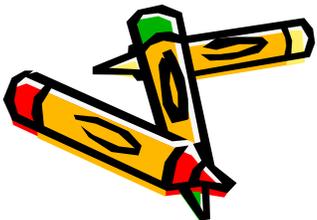


Problemas que Envolvem o Equilíbrio de uma Partícula

Exercício:



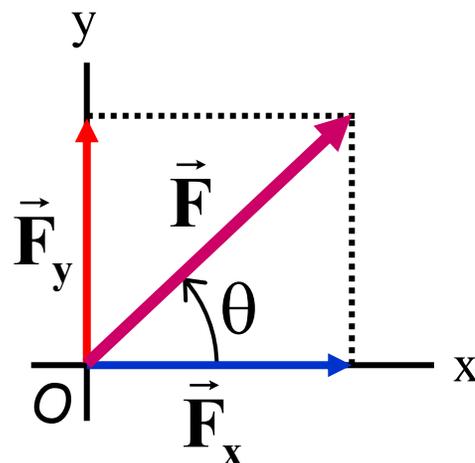
Nos cabos do arranjo mostrado, a maior tração permitida é de 300 N no cabo AC e de 400 N no cabo BC. Determine a maior força P que pode ser aplicada em C e o valor correspondente de α .



Componentes Retangulares de uma Força no Espaço



Anteriormente foi discutido o conceito de componentes de uma força, em particular, quando se estabelecem, no caso plano, duas direções ortogonais de decomposição, levando aos denominados **componentes retangulares** (ou **cartesianos**) da força.



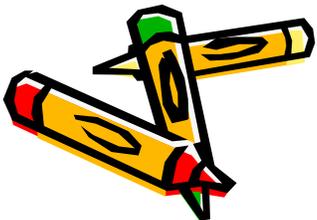
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$\vec{F}_x = F_x \hat{i} \quad F_x = F \cos \theta$$

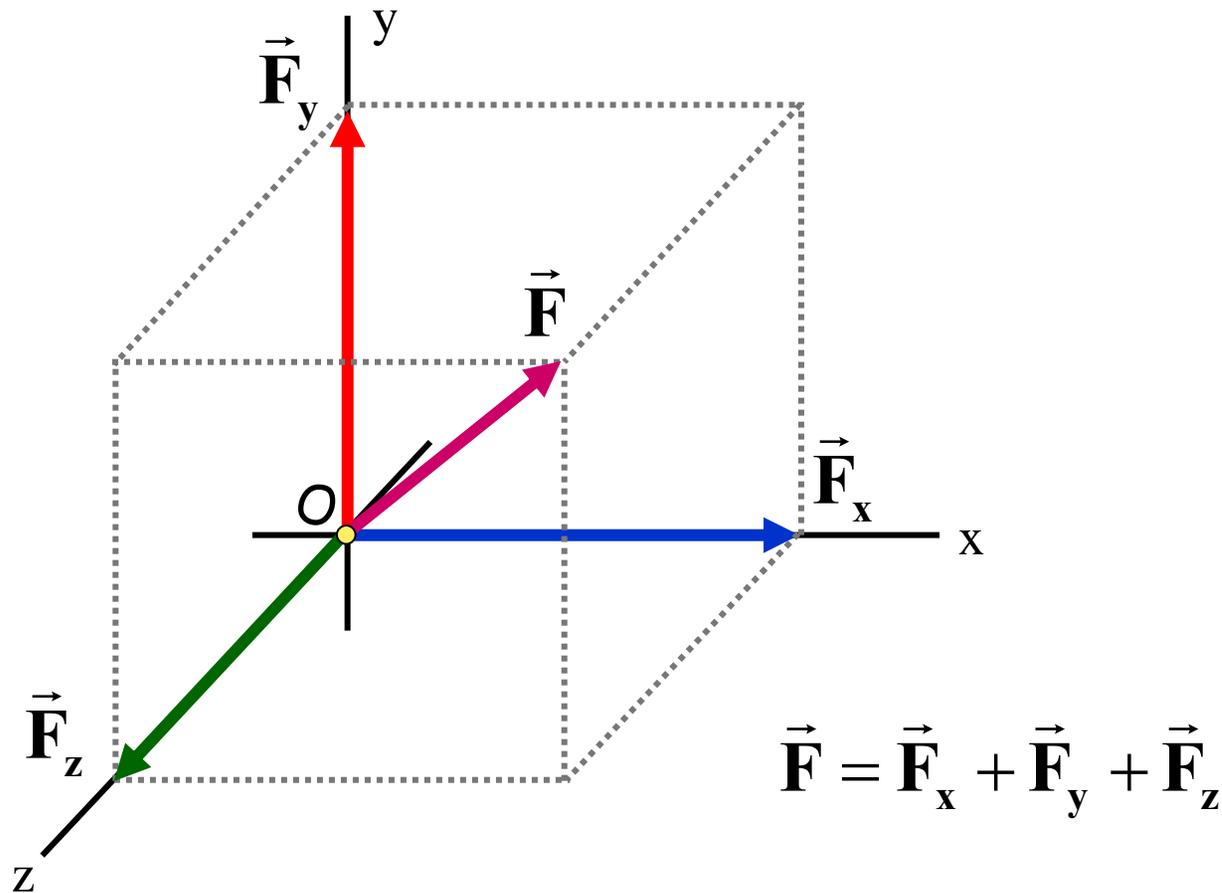
$$\vec{F}_y = F_y \hat{j} \quad F_y = F \sin \theta$$

O objetivo, por hora, consiste em estender a idéia de decomposição de forças no espaço.

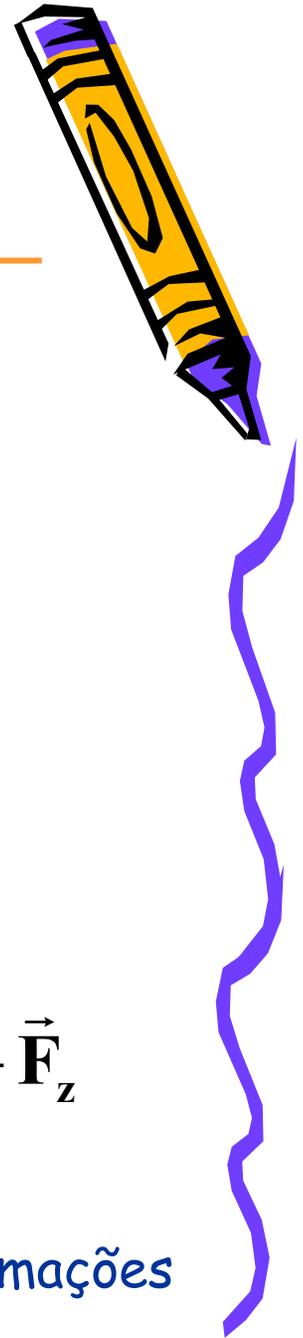
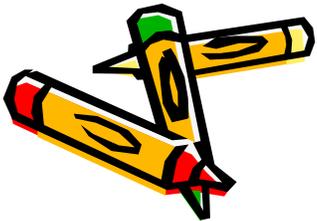
Para tal serão necessários três direções independentes de decomposição, que por simplicidade serão consideradas ortogonais entre si.



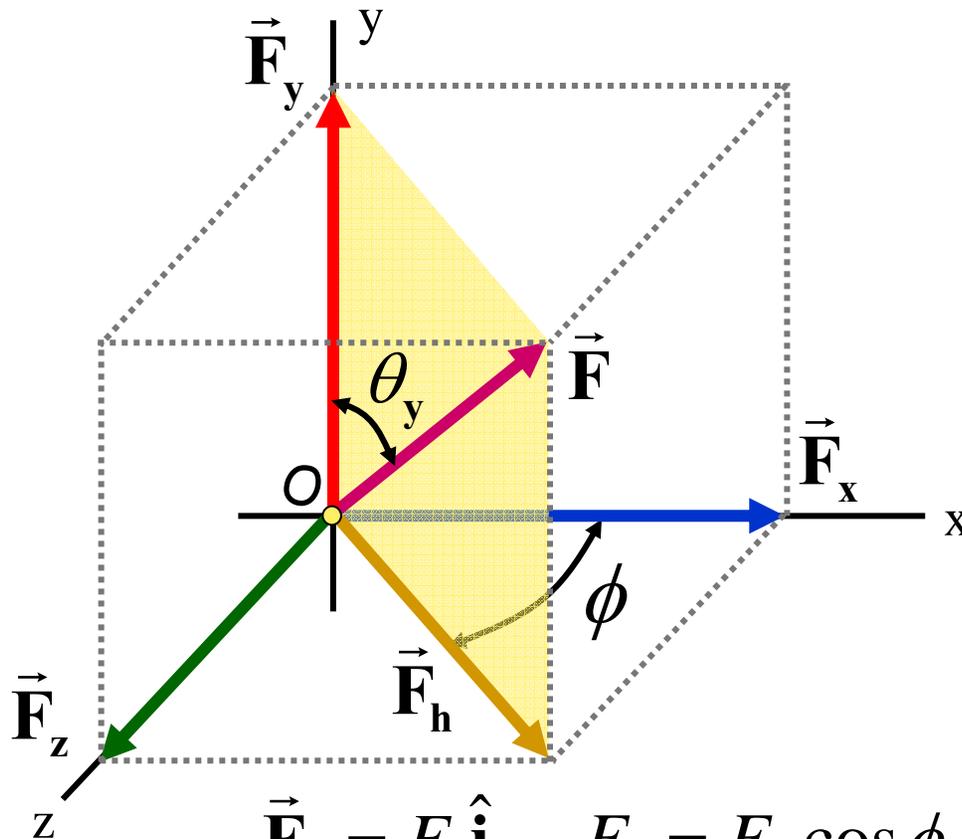
Componentes Retangulares de uma Força no Espaço



Como definir esses componentes a partir de informações de fácil identificação no diagrama espacial?



Componentes Retangulares de uma Força no Espaço



$$F_h = F \sin \theta_y$$

$$\vec{F}_x = F_x \hat{i}$$

$$F_x = F_h \cos \phi$$

$$F_x = F \sin \theta_y \cos \phi$$

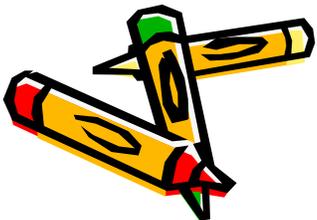
$$\vec{F}_y = F_y \hat{j}$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

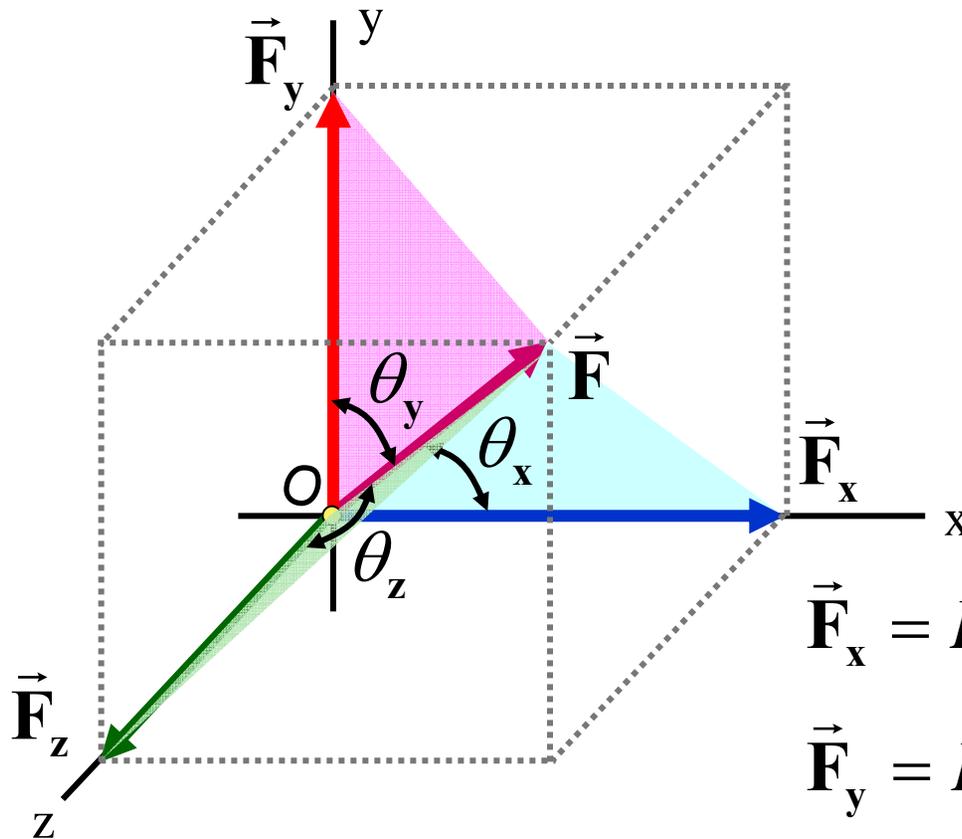
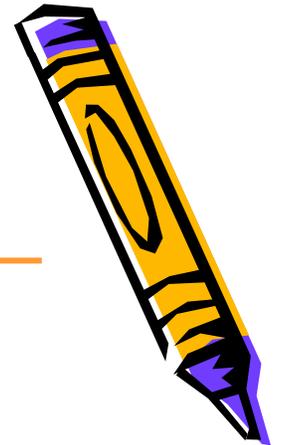
$$\vec{F}_z = F_z \hat{k}$$

$$F_z = F_h \sin \phi$$

$$F_z = F \sin \theta_y \sin \phi$$



Componentes Retangulares de uma Força no Espaço



$$\vec{F}_x = F_x \hat{i}$$

$$F_x = F \cos \theta_x$$

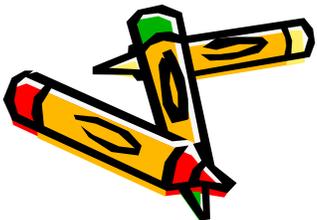
$$\vec{F}_y = F_y \hat{j}$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$\vec{F}_z = F_z \hat{k}$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

Os co-senos de θ_x , θ_y e θ_z são conhecidos como **co-senos diretores** da força \mathbf{F} .



Componentes Retangulares de uma Força no Espaço



- $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$

- $\vec{F}_x = F_x \hat{i} \quad F_x = F \cos \theta_x$

- $\vec{F}_y = F_y \hat{j} \quad F_y = F \cos \theta_y$

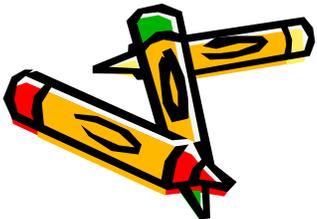
- $\vec{F}_z = F_z \hat{k} \quad F_z = F \cos \theta_z$

- $\vec{F} = F \cos \theta_x \hat{i} + F \cos \theta_y \hat{j} + F \cos \theta_z \hat{k}$

$$\vec{F} = F (\cos \theta_x \hat{i} + \cos \theta_y \hat{j} + \cos \theta_z \hat{k})$$

$$\vec{F} = F \hat{\lambda}$$

O vetor força pode ser gerado do produto de sua intensidade por um vetor unitário na mesma direção e sentido.

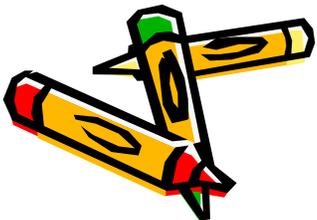
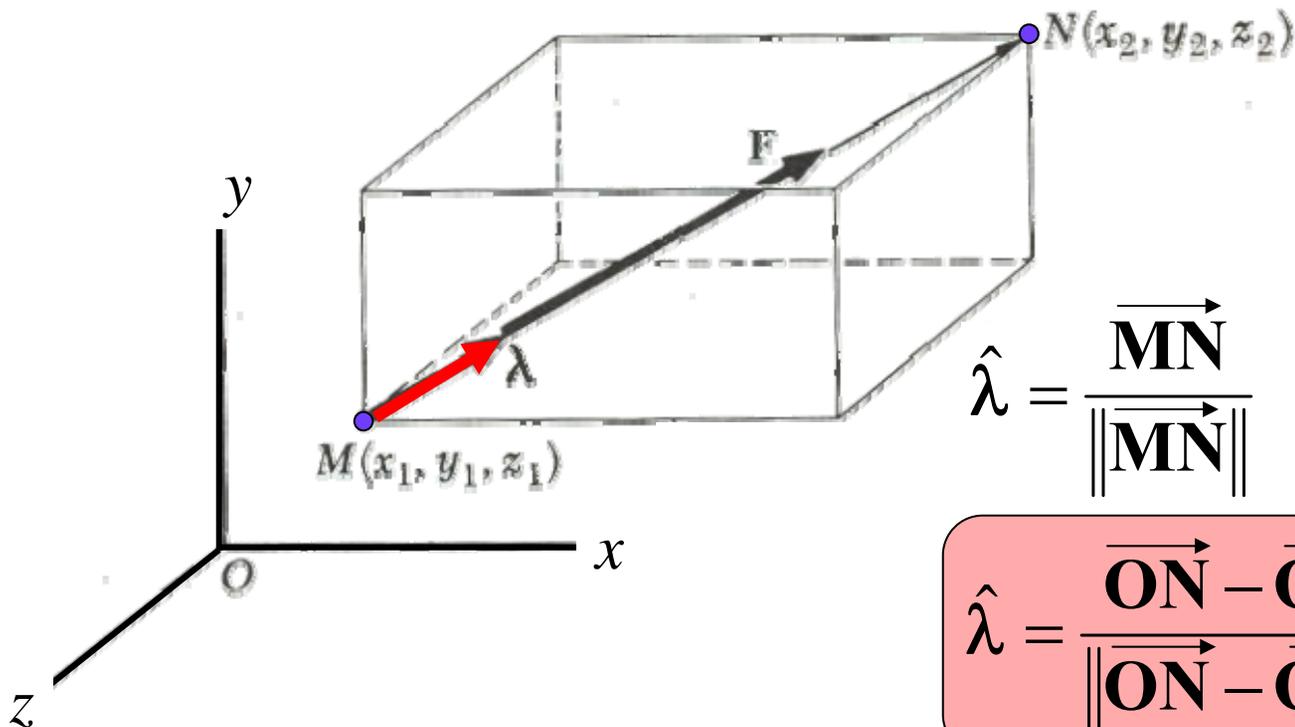


Componentes Retangulares de uma Força no Espaço



- $\vec{F} = F \hat{\lambda}$

Esta forma de representação é interessante pois em muitos problemas são conhecidos dois pontos de referência ao longo da linha de ação da força em questão.

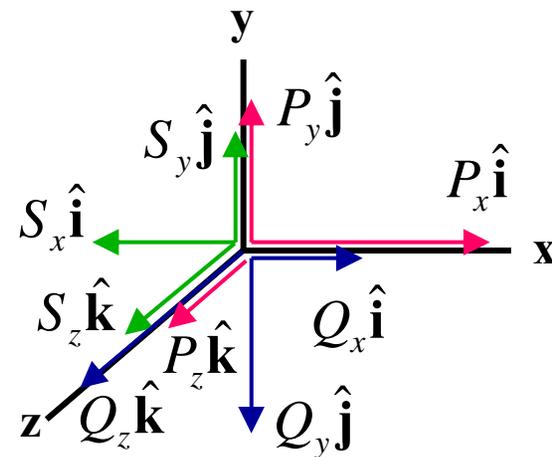
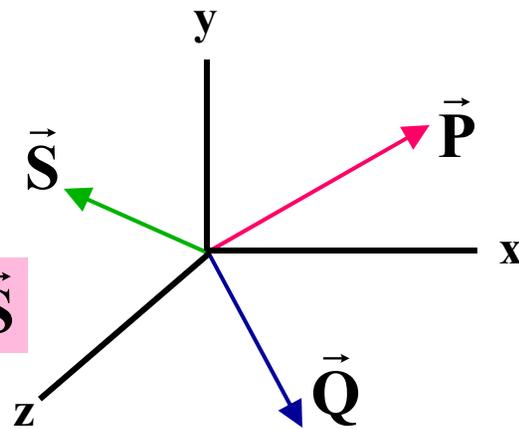


Adição de Forças no Espaço pela Soma dos Componentes



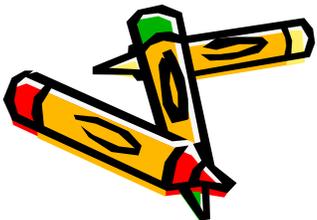
Independentemente das três direções de decomposição, os componentes da força resultante de um conjunto de forças concorrentes podem ser determinados através das somas dos componentes das forças envolvidas.

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$



$$\vec{R} = (P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}) + (Q_x \hat{i} + Q_y \hat{j} + Q_z \hat{k}) + (S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k})$$

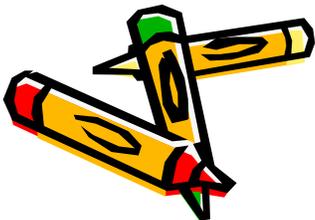
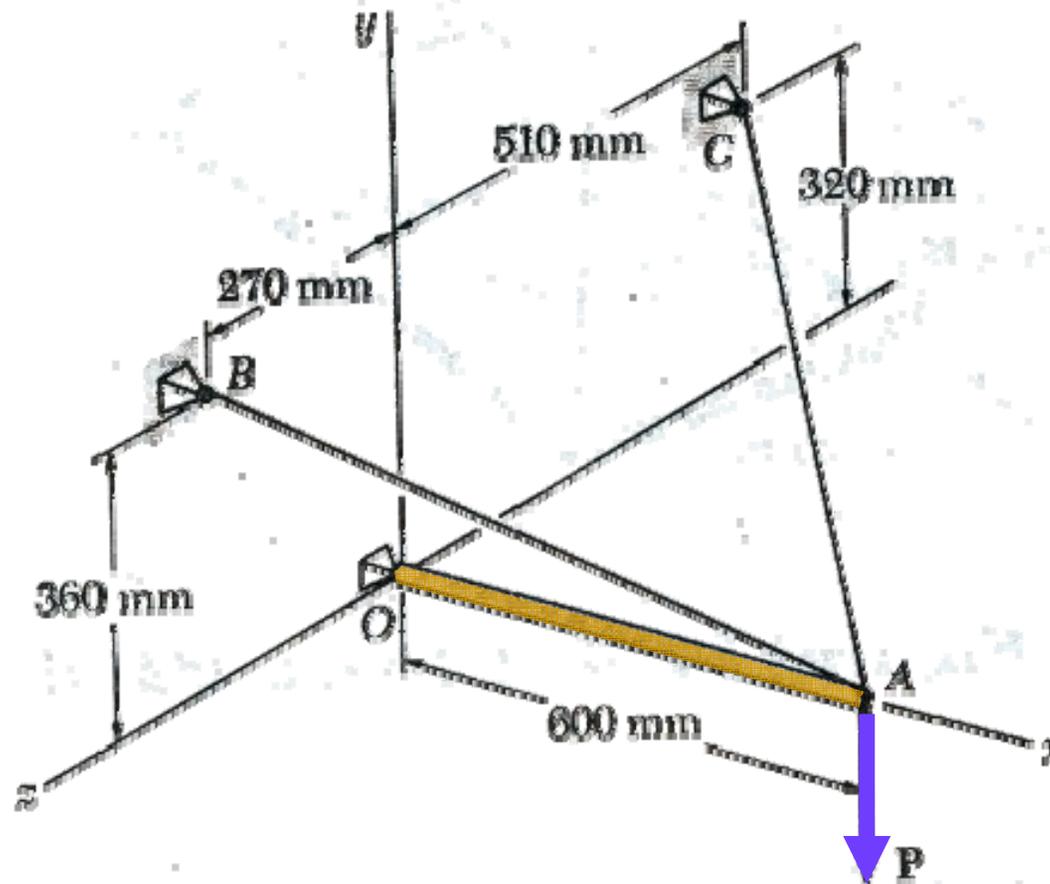
$$\vec{R} = \underbrace{(P_x + Q_x + S_x)}_{R_x} \hat{i} + \underbrace{(P_y + Q_y + S_y)}_{R_y} \hat{j} + \underbrace{(P_z + Q_z + S_z)}_{R_z} \hat{k}$$



Adição de Forças no Espaço pela Soma dos Componentes



Exemplo:

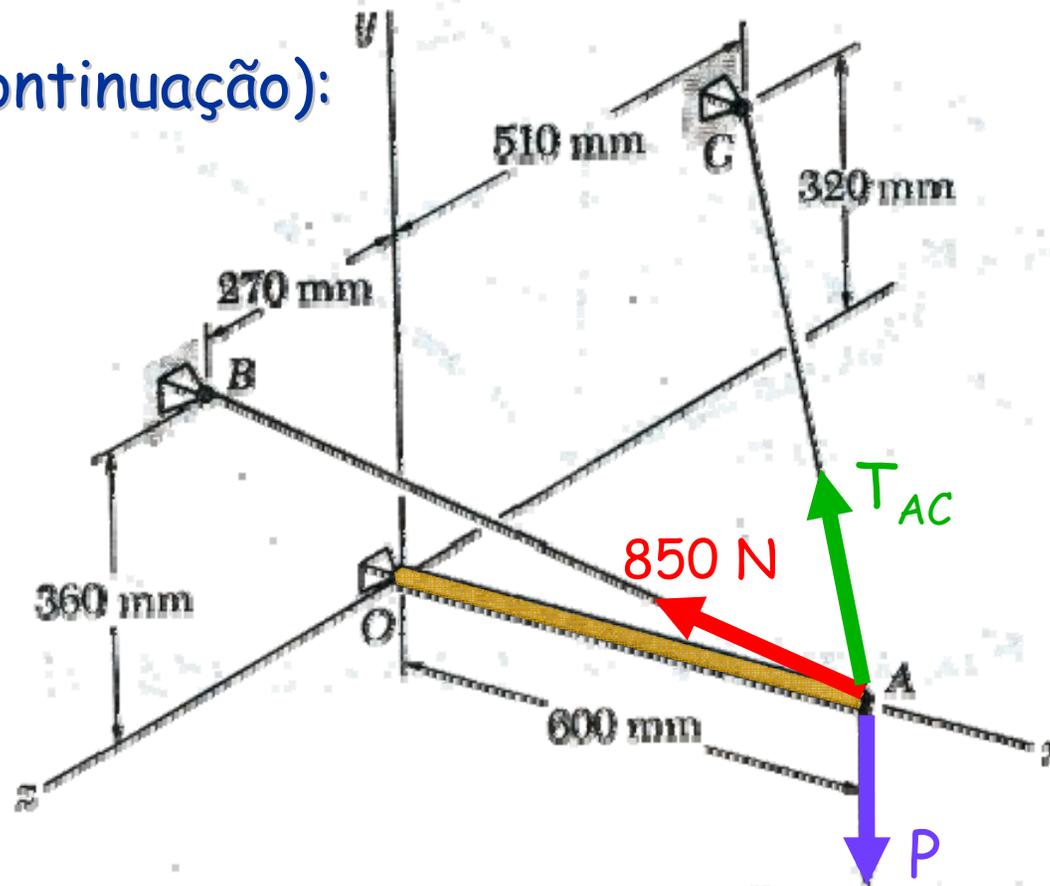


À barra AO é aplicada uma carga P . Sabendo que a tração no cabo AB é de 850 N e que a resultante da carga P e das forças aplicadas pelos cabos em A deve ter a direção de AO , determine a tração no cabo AC e a intensidade de P .

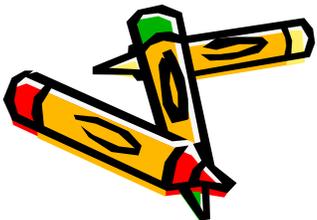
Adição de Forças no Espaço pela Soma dos Componentes



Exemplo (continuação):



Como a força resultante dessas três forças deve ter a direção de AO , que é a direção x , os componentes nas direções y e z devem ser nulos.



Adição de Forças no Espaço pela Soma dos Componentes



Exemplo (continuação):

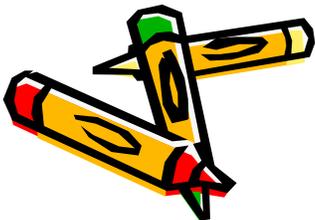
- $\vec{P} = (0; -P; 0)$

- $\vec{T}_{AB} = T_{AB} \hat{\lambda}_{AB}$ $\hat{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{(-600; 360; 270)}{\|(-600; 360; 270)\|}$
 $= (-0,800; 0,480; 0,360)$

$$\vec{T}_{AB} = 850(-0,800; 0,480; 0,360) = (-680; 408; 306) \text{ N}$$

- $\vec{T}_{AC} = T_{AC} \hat{\lambda}_{AC}$ $\hat{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-600; 320; -510)}{\|(-600; 320; -510)\|}$
 $= (-0,706; 0,376; -0,600)$

$$\vec{T}_{AC} = (-0,706T_{AC}; 0,376T_{AC}; -0,600T_{AC})$$



Adição de Forças no Espaço pela Soma dos Componentes



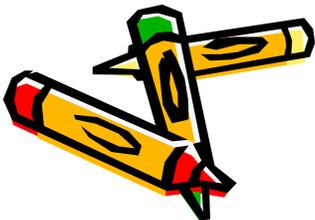
Exemplo (continuação):

- $R_y = -P + 408 + 0,376T_{AC} = 0$
- $R_z = 0 + 306 - 0,600T_{AC} = 0$



$$T_{AC} = 510 \text{ N}$$

$$P = 599,76 \text{ N}$$



Equilíbrio de uma Partícula no Espaço



Quando a força resultante equivalente de TODAS as forças concorrentes que atuam numa partícula é igual a zero, a partícula está em equilíbrio.

Algebricamente o equilíbrio corresponde a

$$\vec{R} = \vec{0}$$

que em termos dos componentes retangulares pode ser expresso como

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

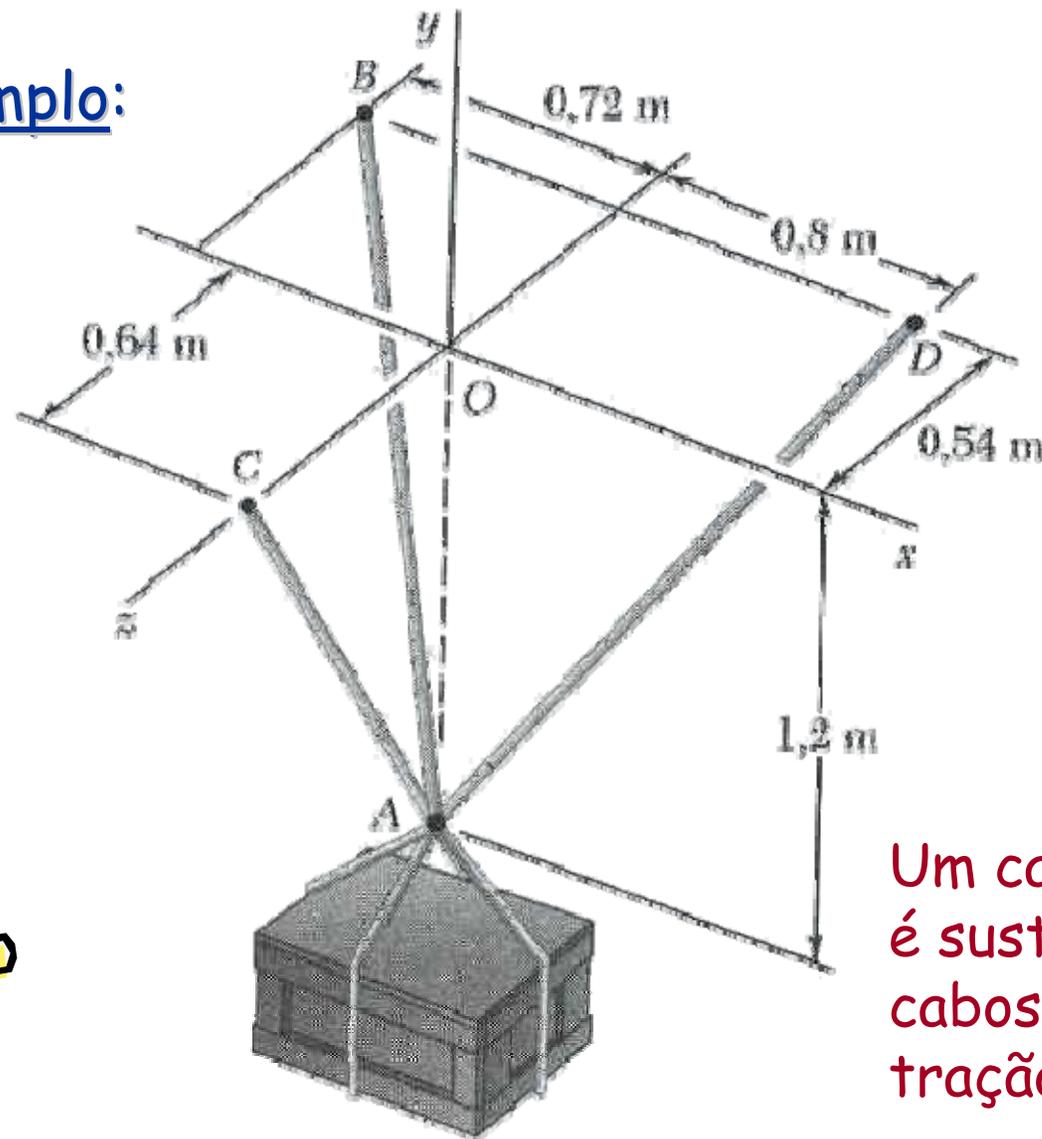
$$R_z = \sum F_z = 0$$



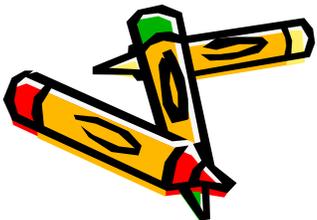
Equilíbrio de uma Partícula no Espaço



Exemplo:



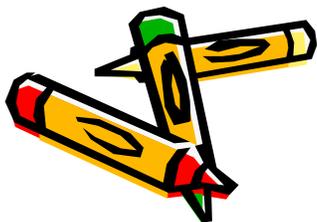
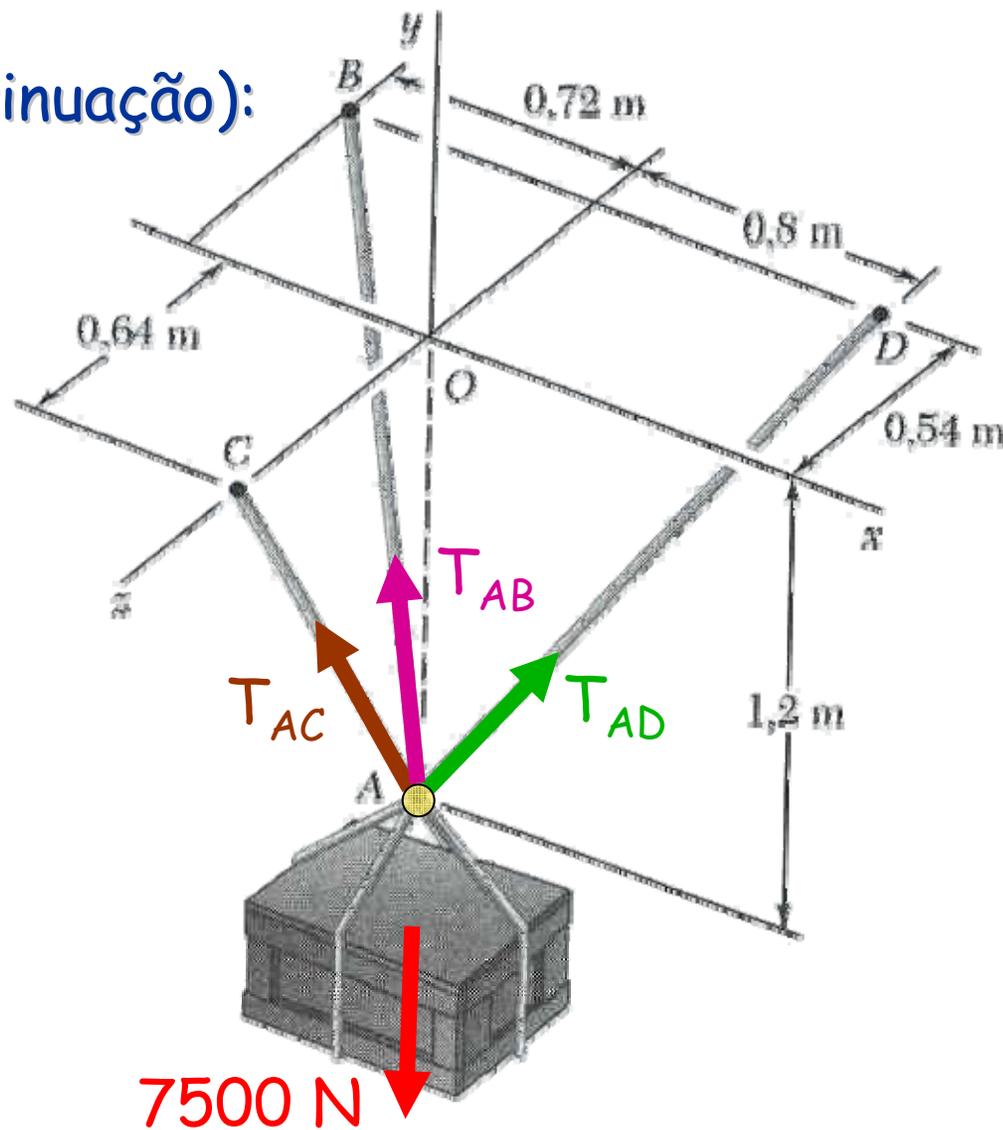
Um caixote de 7500 N é sustentado por três cabos. Determine a tração em cada cabo.



Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

Exemplo (continuação):

Diagrama de
Corpo Livre



Equilíbrio de uma Partícula no Espaço



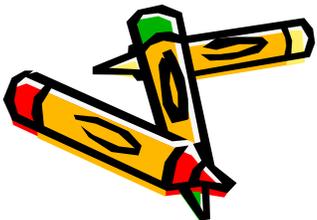
Exemplo (continuação):

- $\vec{P} = (0; -7500; 0)\text{N}$

- $\vec{T}_{AB} = T_{AB} \hat{\lambda}_{AB} \quad \hat{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = (-0,480; 0,800; -0,360)$

- $\vec{T}_{AC} = T_{AC} \hat{\lambda}_{AC} \quad \hat{\lambda}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = (0,000; 0,882; 0,471)$

- $\vec{T}_{AD} = T_{AD} \hat{\lambda}_{AD} \quad \hat{\lambda}_{AD} = \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = (0,519; 0,779; -0,351)$



Equilíbrio de uma Partícula no Espaço



Exemplo (continuação):

- $R_x = 0 \therefore 0 - 0,480T_{AB} + 0 + 0,519T_{AD} = 0$

$$R_y = 0 \therefore -7500 + 0,800T_{AB} + 0,882T_{AC} + 0,779T_{AD} = 0$$

$$R_z = 0 \therefore 0 - 0,360T_{AB} + 0,471T_{AC} - 0,351T_{AD} = 0$$

$$\begin{cases} -0,480T_{AB} + 0,519T_{AD} = 0 \\ 0,800T_{AB} + 0,882T_{AC} + 0,779T_{AD} = 7500 \\ -0,360T_{AB} + 0,471T_{AC} - 0,351T_{AD} = 0 \end{cases}$$

$$T_{AB} = 2676,2 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 3890,0 \text{ N}$$

$$T_{AD} = 2475,1 \text{ N}$$

