CAPÍTULO 2

1 - LIMITES

Noção de limite de uma função

Seja a função f(x) = $\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$ definida $\forall x \in$ IR e x $\neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por (x -1), obtendo f(x) = 2x + 1. Estudaremos os valores de f(x) quando x assume valores próximos de 1, mas diferentes de 1.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Se atribuirmos a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Na 1ª tabela temos que:
x = 0,9 $\rightarrow$ f(x) = 2,8 isto é, x – 1 = - 0,1 $\rightarrow$ f(x) – 3 = - 0,2
x = 0,99 $\rightarrow$ f(x) = 2,98 isto é, x – 1 = - 0,01 $\rightarrow$ f(x) – 3 = - 0,02
x = 0,999 $\rightarrow$ f(x) = 2,998 isto é, x -1 = - 0,001 $\rightarrow$ f(x) – 3 = - 0,002

Na tabela 2ª temos que:
x = 1,1 $\rightarrow$ f(x) = 3, 2 isto é, x – 1 = 0,1 $\rightarrow$ f(x) – 3 = 0,2
x = 1,01 $\rightarrow$ f(x) = 3, 02 isto é, x – 1 = 0,001 $\rightarrow$ f(x) – 3 = 0,02
x = 1,001 $\rightarrow$ f(x) = 3,002 isto é, x – 1 = 0,001 $\rightarrow$ f(x) – 3 = 0,002

Portanto, pelas duas tabelas vemos que:

$|x-1| = 0{,}1 \rightarrow |f(x)-3| = 0{,}2$

$|x-1| = 0{,}01 \rightarrow |f(x)-3| = 0{,}02$

$|x-1| = 0{,}001 \rightarrow |f(x)-3| = 0{,}002$

Ou seja, podemos tornar f(x) tão próximo de 3 quanto desejarmos, bastando tomarmos x suficientemente próximo de 1.

Definição de limite:

Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio número a.

O limite de f(x) quando x se aproxima de a é L, que pode ser escrito como :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$, mesmo pequeno, existir um $\delta > 0$, tal que $|f(x)-L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$.

Em símbolos, temos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)}$$

No Exemplo anterior, temos que f(x) = 2x + 1 se x $\neq 1$.

Exercício:

1) Seja a função f definida por f(x) = 5 x – 2, para todo x $\in$ IR. Se $\lim\limits_{x\to 2}$ f(x) = 8, encontre um δ para $\varepsilon = 0{,}01$, tal que $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-8| < 0{,}01$

Obs: Note que qualquer número positivo menor que δ pode ser usado no lugar de 0,002 como sendo o δ pedido, isto é, se $0 < \delta < 0{,}002$, a afirmação $0 < |x-2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-8| < 0{,}001$ é verdadeira, porque todo número x que satisfaça a desigualdade $0 < |x-2| < \delta_1$, satisfará também a desigualdade $0 < |x-2| < \delta$.

<u>Teorema</u> (Unicidade do limite)

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$

Propriedades dos limites de funções:

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$

1) $\lim\limits_{x\to a} c = c$ (c $\in$ IR)

2) $\lim\limits_{x\to a} [c.f(x)] = c.\lim\limits_{x\to a} f(x) = c.L$

3) $\lim\limits_{x\to a} [(f.g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x) = L.M$

4) $\lim\limits_{x\to a} [(f \pm g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$

5) $\lim\limits_{x\to a} \left[\left(\frac{f}{g}\right)(x) \right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ Se $M \neq 0$

6) $\lim_{x \to a} \left[(f^n)(x) \right] = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n = L^n \qquad (n \in Z_+^*)$

7) $\lim_{x \to a} \left[\sqrt[n]{f(x)} \right] = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ($n \in Z_+^*$, e $L > 0$ quando n for par).

8) Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, então

$\lim_{x \to a} f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2)$

b) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{3x - 2} \right)$

c) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

e) Se $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & se \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$ Calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$

f) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

i) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$

Limites Infinitos

Definição: Seja I um intervalo aberto que contém a. Seja ainda uma função f definida em I-$\{a\}$. Dizemos que quando x se aproxima de a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, o que é escrito $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, se para qualquer $M > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > M$ sempre que $0 < | x - a | < \delta$.

Em símbolos: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

Definição: Seja I um intervalo aberto que contém a. Seja ainda uma função f definida em I-$\{a\}$. Dizemos que quando x se aproxima de a, $f(x)$ decresce ilimitadamente, o que é escrito $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, se para qualquer $M < 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) < M$ sempre que $0 < | x - a | < \delta$.

Em símbolos: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M < 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow f(x) < M)$

Definição: Seja I um intervalo aberto que contém a. Seja ainda uma função f definida em I-$\{a\}$. Dizemos que quando x se aproxima de a por valores maiores que a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, o que é escrito $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, se para qualquer $M > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > M$ sempre que $0 < x - a < \delta$.

Em símbolos: $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

Escrevendo em símbolos as definições de $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, tem-se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M < 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < M)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > M)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M < 0, \exists \delta > 0 \ / \ -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < M)$$

<u>Propriedades dos limites infinitos</u>

Dados		**Conclusão**
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = \begin{cases} +\infty & se\ b>0 \\ -\infty & se\ b<0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = \begin{cases} -\infty & se\ b>0 \\ +\infty & se\ b<0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$		$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$		$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$		$\lim\limits_{x\to a} \left\| \dfrac{1}{f(x)} \right\| = +\infty$

Não poderemos estabelecer uma lei para os seguintes casos:
Indeterminações do tipo: $\infty - \infty$, $\infty.0$ e ∞/∞)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty\ \ (ou\ \ -\infty)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty\ \ (ou\ \ -\infty)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty\ \ (ou\ \ -\infty)$	$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = ?$

Obs: Estas proposições continuam válidas se substituirmos o símbolo " $x \to a$ " por " $x \to a^+$ " ou " $x \to a^-$ ".

1) Seja a função f(x) = $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ calcule o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2) Seja a função f(x) = $\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ calcule o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

3) Seja a função f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$ calcule o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Limites no Infinito

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, ainda que pequeno, existe $N > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > N$.

Em símbolos: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\ \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N > 0\ /\ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\ )$

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]-\infty, a[$. Dizemos que quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, ainda que pequeno, existe $N < 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < N$.

Em símbolos: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\ \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N < 0\ /\ x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\ )$

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ cresce também ilimitadamente e escrevemos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se para qualquer $M > 0$, existe $N > 0$, tal que $f(x) > M$ sempre que $x > N$.

Em símbolos: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\ \forall M > 0, \exists N > 0\ /\ x > N \Rightarrow f(x) > M\ )$

Escrevendo em símbolos as definições de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, tem-se:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\ \forall M < 0, \exists N > 0\ /\ x > N \Rightarrow f(x) < M\ )$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\ \forall M > 0, \exists N < 0\ /\ x < N \Rightarrow f(x) > M\ )$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\ \forall M < 0, \exists N < 0\ /\ x < N \Rightarrow f(x) < M\ )$

Teorema: se $n \in \mathbb{Z}_+^*$ então:

a- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

b- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & se,\ n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se, n é impar} \end{cases}$

c- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

d- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Teorema: Se $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, a_n \neq 0$, então:

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n$.

Limite de uma função racional

Dada a função racional f(x) = $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinôminos em x com

P(x) = $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ e

Q(x) = $b_0x^p + b_1x^{p-1} + ... + b_{n-1}x + b_p$

Sendo $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Tem-se então que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} P(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} a_0x^n}{\lim\limits_{x\to\infty} b_0x^n},\quad \text{logo}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0} \cdot \lim_{x\to\infty} x^{n-p}$$

Dependendo do valor de n e de p, três casos podem ser considerados:

1) n > p $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 2) n < p $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 3) n = p $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$

Exercícios:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2-7x+3\right)=$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-5x+3\right)=$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(5x^3-4x^2-3x+2\right)=$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^4-7x^3+2x^2-5x-4\right)=$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(4-x^2\right)=$

f) $\lim_{x\to-\infty}\left(8-x^3\right)=$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{5x-1}=$

h) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{3x^2+5x}-2=$

i) Calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+2}{x+1}=$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+2}{x+1}=$

j) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=$

k) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)=$

Assíntotas verticais e horizontais

A reta y = b é uma assíntota horizontal do gráfico da função y = F(x) se $\lim_{x \to +\infty} F(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} F(x) = b$.

A reta x = a é uma assíntota vertical do gráfico da função y = F(x) se $\lim_{x \to a^+} F(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} F(x) = \pm\infty$.

Exemplos:

1- $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

2- $g(x) = \dfrac{-8}{x^2 - 4}$

Limites Notáveis:

Limites Trigonométricos:

Teorema:

$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \forall a \in R$

$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a, \forall a \in R$

$\lim_{x \to a} tgx = tga, \forall a \neq \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{K}\pi, \mathrm{K} \in \mathrm{Z}$

Teorema: (limite trigonométrico fundamental)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Exercícios:

a- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}=$

b- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}=$

c- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$

Limites da Função Exponencial:

Teorema: Se $a\in R$ e $0<a\neq 1, \mathit{então}:$

$$\lim_{x\to 0}a^x=1$$

Teorema: Se $a\in R$ e $0<a\neq 1, \mathit{então}:$

$$\lim_{x\to b}a^x=a^b$$

Teorema: Se $a\in R$ e $a>1, \quad \mathit{então}:$

$$\lim_{x\to +\infty}a^x=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}a^x=-\infty$$

Teorema: Se $a\in R$ e $0<a<1, \quad \mathit{então}:$

$$\lim_{x\to +\infty}a^x=0 \qquad \lim_{x\to -\infty}a^x=+\infty$$

Teorema: Se $a\in R$ e $0<a\neq 1$, e $\lim_{x\to b}f(x)=0$ então:

$$\lim_{x\to b}a^{f(x)}=1$$

Teorema: Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$, e $\lim_{x \to b} f(x) = c$ então:

$$\lim_{x \to b} a^{f(x)} = a^c$$

Exemplos:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x =$

b) $\lim_{x \to +\infty} 3^x =$

c) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{2}{3}\right)^x =$

d) $\lim_{x \to -1} 3^{\frac{x^2-1}{x+1}} =$

Limite Exponencial Fundamental

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}7182818284590...$$

Tem-se ainda que:

$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ e

Se a > 0, então $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} =$ lna

Exemplos:

a- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

b- $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

c- $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$

d- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x+2} =$

Limites da Função Logarítmica:

Teorema: Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim\limits_{x \to 1} (\log_a x) = 0$

Teorema: Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$, então:

$\lim\limits_{x \to b} (\log_a x) = \log_a b$ onde b > 0

Teorema: Se $a \in R$ e $a > 1$, então:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$

Teorema: Se $a \in R$ e $0 < a < 1$, então:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = +\infty$

Teorema: Se $a \in R$ e $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 1$, então:

$\lim\limits_{x \to b} [\log_a f(x)] = \log_a c$

Continuidade

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I.

Dizemos que f é contínua em a, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Assim, se f é contínua em a, as 3 condições abaixo são satisfeitas:

(i) existe $f(a)$

(ii) existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I.

Dizemos que f é descontínua em a, se f não for contínua em a .

Assim, se f é descontínua em a, então as duas condições abaixo são satisfeitas:

(i) existe $f(a)$

(ii) não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a} \neq f(a)$

Exemplos:

1- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 2 & se\ x = 1 \end{cases}$

2- $g(x)=\begin{cases} 3+x & se\ x \le 1 \\ 3-x & se\ 1 < x \end{cases}$

3- $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & se\ x \ne 2 \\ 3 & se\ x = 2 \end{cases}$

4- $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

5- Verificar se $h(x)=\begin{cases} x^2-1 & se\ x < 2 \\ 7-2x & se\ x \ge 2 \end{cases}$ é contínua em x = 2.

Propriedades das funções contínuas

Se f e g são funções contínuas em um número a, então:

(i) $f+g$ é contínua em a.
(ii) $f-g$ é contínua em a.
(iii) $f \times g$ é contínua em a.
(iv) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a. $[g(a) \ne 0]$

Continuidade em um intervalo:

Diz-se que uma função é contínua em um intervalo aberto se e somente se ela for continua em todo número do intervalo aberto.

Considere agora a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
f(x) é contínua $\forall x \in \left]-2,+2\right[$

Para indagar sobre a continuidade em $x = \pm 2$, podemos estender o conceito de continuidade nos extremos de um intervalo aberto.

Definição: Dizemos que f é contínua à esquerda no número a se e somente se as três condições abaixo forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ existe
(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe
(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Definição: Dizemos que f é contínua à direita no número a se e somente se as três condições abaixo são satisfeitas:
(i) $f(a)$ existe
(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe
(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$