Derivada

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Na matemática, a **derivada** de uma função é o conceito central do cálculo diferencial. A **derivada** pode ser usada para determinar a taxa de variação de alguma coisa devido a mudanças sofridas em uma outra ou se uma função entre os dois objetos existe e toma valores contínuos em um dado intervalo. Por exemplo a taxa de variação da posição de um objeto com relação ao tempo, isto é, sua velocidade, é uma derivada.

A operação inversa da derivada é a Primitiva. Daí podermos afirmar logicamente que uma das primitivas da derivada de uma função tem como resultado a própria função. Pf'(x)=f(x) + C , em que C=Constante.

Exemplo:

Sendo f(x)=2x+12, temos que f ' (x)=2 e P f'(x)=2x + K .

As Primitivas de f'(x) são o conjunto: { f(x): f(x)=2x + K , K real }= {..2x + 1.., 2x + 1/2,..2x + 0..,2x + 1/3,..2x + 12..}

A derivada de uma função num ponto indica a taxa de variação da função em relação ao argumento da própria função. A derivada fornece a inclinação instantânea de *f*(*x*) em cada ponto *x*. Isto corresponde à inclinação da tangente à função no ponto indicado; a inclinação da tangente pode ser aproximada por uma secante. As derivadas também podem ser usadas para calcular concavidades de funções.

A derivada de uma função não existe nos pontos em que a função possua uma tangente vertical. Este ponto O é chamado de ponto de descontinuidade.

Índice

Diferenciação e Diferenciabilidade

A derivada de uma função pode ser escrita de várias formas. Por exemplo:

$f'(x)$ (lê-se *éfe linha de xis*)

ou

$\frac{df}{dx}(x)$ (lê-se *dê éfe dê xis de xis*)

ou

$$\frac{d}{dx}f(x)$$ (lê-se *dê dê xis de éfe de xis*)

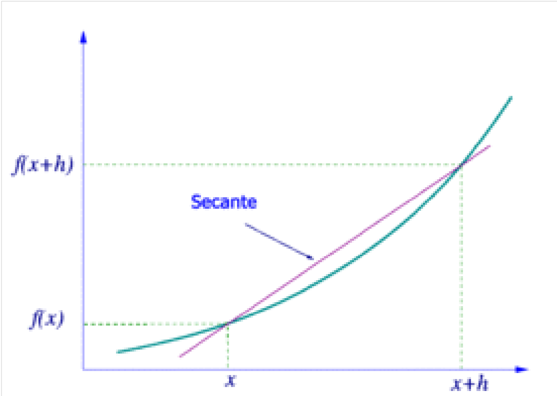
ou

$$D_x f(x)$$ (lê-se *Dê xis de éfe de xis*).

Os últimos três símbolos são úteis para se considerar a diferenciação como um operador, e estes símbolos são conhecidos como Operador diferencial.

Uma função é **diferenciável** em um ponto *x*
se sua derivada existe e é finita naquele ponto; uma função é diferenciável em um intervalo se a derivada existe e é finita para cada *x* dentro do intervalo. Se uma função não é contínua em *c*, então não existe uma inclinação definida em *c* e, portanto, a função não é diferenciável em *c*; Mesmo para uma função contínua em *c*, pode ocorrer dela não ser diferenciável em *c*. Por exemplo, considere o ponto *c* como o ponto no vértice de um triângulo. Neste ponto existem duas inclinações possíveis, à direita ou à esquerda. Portando a derivada é ambígua e não pode existir. Em suma, se uma função é diferenciável num ponto, ela é contínua nesse ponto; reciprocamente não se pode afirmar o mesmo.

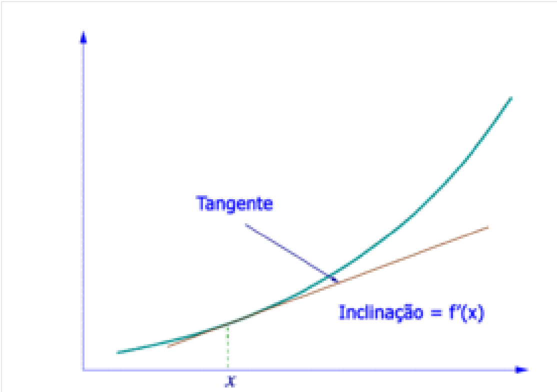
Quociente de Newton



Inclinação da secante à curva de f(x)

A derivada de uma função de uma variável é definida como um processo de limite. Considera-se a inclinação da secante, quando os dois pontos de intersecção com *f*(*x*) convergem para um mesmo ponto. Neste limite, a inclinação da secante se iguala à da tangente.

Essa idéia é expressa no quociente de Newton; onde *h*, isto é Δx, é



Inclinação da tangente à curva como a derivada de f(x)

a distância entre os pontos de intersecção da secante no eixo de coordenada *x*:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Suponha que se queira encontrar a derivada de uma função $f(x)$, em x. Se aumentamos x em uma quantidade pequena, Δx, pode-se calcular $f(x + \Delta x)$. Uma aproximação da inclinação da tangente à curva é dada por $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$, que é uma forma de dizer: a mudança de f dividida pela mudança em x. Quanto menor Δx ficar, melhor a aproximação será. Matematicamente, se define a derivada como sendo o limite da razão acima quando Δx tende a zero.

Como a substituição simples de Δx por 0 resulta em divisão por zero, o numerador deve ser simplificado de tal forma que Δx possa ser fatorado e então cancelado com o denominador. A função resultante, $f'(x)$, é a derivada de $f(x)$.

Derivadas de maior ordem

Quando obtemos a derivada de uma função o resultado é também uma função de x e como tal também pode ser diferenciada. Calculando-se a derivada novamente obtemos então a **derivada segunda** da função f(x). De forma semelhante, a derivada da segunda derivada é chamada de terceira derivada e assim por diante. Podemos nos referir à derivadas subsequentes de f por:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)$$

e assim por diante.

Às vezes para se simplificar a notação, as seguintes opções são freqüentemente utilizadas:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}$$

ou alternativamente,

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x)$$

ou

$$f^{(1)}(x), \quad f^{(2)}(x), \quad f^{(3)}(x)$$

Pontos críticos ou estacionários

Pontos onde a derivada da função é igual a zero chamam-se normalmente de pontos críticos ou estacionários e são muito importantes. Existem três tipos de pontos onde isto pode acontecer em uma função. Como a derivada é igual à tangente em um dado ponto e a tangente do ângulo zero é zero, estes pontos acontecem onde a inclinação da reta é paralela ao eixo x. Estes pontos podem acontecer onde a função atinge um valor máximo e depois começa a diminuir, chamados **pontos de máximo da função**, ou onde ela atinge um valor mínimo e começa a aumentar, chamado de **ponto de mínimo**. Eles também podem ocorrer em **pontos de inflexão** da função. Pontos de inflexão ocorrem onde a concavidade da função muda. Um exemplo típico é a função $f(x) = x^3$, no ponto x=0 a função tem um ponto de inflexão.

Para identificar o tipo de ponto estacionário, torna-se necessário analisar também a segunda derivada de f(x):

- Se derivada segunda de f(x) é positiva no ponto onde a derivada primeira é nula, então o ponto é um mínimo local.
- Se a derivada segunda for negativa, o ponto em questão é um máximo local
- E se a derivada segunda também for nula, o ponto é um ponto de inflexão.

Derivadas notáveis

- Para funções logarítmicas:
  - $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
  - $f(x) = g(x)^{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \left(h'(x) ln(g(x)) + h(x) \frac{g'(f)}{g(x)} \right) g(x)^{h(x)}$
  - $f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
  - $f(x) = ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
- Para funções trigonométricas:
  - $f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$
  - $f(x) = cos(x) \Rightarrow f'(x) = -sen(x)$
  - $f(x) = tan(x) \Rightarrow f'(x) = sec^2(x)$
  - $f(x) = cot(x) \Rightarrow f'(x) = -csc^2(x)$
  - $f(x) = sec(x) \Rightarrow f'(x) = sec(x) \cdot tan(x)$
  - $f(x) = csc(x) \Rightarrow f'(x) = -csc(x) \cdot cot(x)$
- Para funções trigonométricas inversas:
  - $f(x) = arcsen(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $f(x) = arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $f(x) = arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$
  - $f(x) = arcctg(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$
  - $f(x) = arcsec(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}$
  - $f(x) = arccsc(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}$

Física

Uma das mais importantes aplicações do cálculo à Física (senão a mais importante), é o conceito de "**derivada temporal**" -- a taxa de mudança ao longo do tempo -- que é necessário para a definição precisa de vários importantes conceitos. Em particular, as derivadas temporais da posição de um objecto são importantes na física newtoniana:

- Velocidade
  (velocidade instantânea; o conceito de velocidade média é anterior ao cálculo) é a derivada (com respeito ao tempo) da posição do objeto.
- Aceleração é a derivada (com respeito ao tempo) da velocidade de um objecto.
- Safanão ou impulso é a derivada (com respeito ao tempo) da aceleração de um objecto.
- Para a força resultante, por exemplo. Uma forma de definir a segunda lei de Newton é F = dp/dt , sendo p o momento linear da partícula.

Apesar da "derivada tempo" poder ser escrita como "d/dt", também tem uma notação especial: um ponto colocado sobre o símbolo do objecto cuja derivada é tirada. Esta notação deve-se a Newton, foi a sua maneira original de escrever fluxões. (Notar que ela foi abandonada na maioria das outras situações em favor da notação de Leibniz, que usa d/dx).

Por exemplo, se a posição de um objecto é $p(t) = -16t^2 + 16t + 32$; então, a velocidade do objecto é $p'(t) = -32t + 16$; a acelaração do objecto é $p''(t) = -32$; e o impulso do objecto é $p'''(t) = 0$.

Se a velocidade de um automóvel é dada como função do tempo, então a derivada dessa função em relação ao tempo descreve a aceleração desse automóvel, como função do tempo.

Manipulação algébrica

Complexos cálculos de limites podem ser evitados, em certos casos, com recurso a regras de derivação que nos permitem encontrar derivadas por via de manipulação algébrica, em vez da aplicação directa do quociente de diferença de Newton. Não devemos concluir que a definição de derivadas em termos de limites seja desnecessária. Pelo contrário, essa definição é o meio de "provar" as seguintes "regras de diferenciação potente"; estas regras são originadas do quociente de diferença:

- *Regra da Constante*: A derivada de qualquer função constante é zero.
  - *Regra do múltiplo da constante*: Se c é um número real; então, a derivada de $cf(x)$ é igual a c multiplicado pela derivada de $f(x)$ (uma consequencia da linearidade abaixo)
- *Linearidade*: $(af + bg)' = af' + bg'$ para todas as funções f e g e todos os números reais a e b.
- *Regra da potência Geral* (*Regra Polinomial*): Se $f(x) = x^r$, para qualquer número real r; $f'(x) = rx^{r-1}$.
- *Regra do produto*: $(fg)' = f'g + fg'$ para todas as funções f e g.
- *Regra do quociente*: $(f / g)' = (f'g - fg') / (g^2)$ se $g \neq 0$.
- *Regra da cadeia*: Se $f(x) = h(g(x))$, então $f'(x) = h'[g(x)] * g'(x)$
- *Funções inversa e diferenciação*: Se $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, e f(x) e sua inversa são diferenciáveis, então para casos nos quais $\Delta x \neq 0$ quando $\Delta y \neq 0$, $dy / dx = 1 / (dx / dy)$
- *Derivada de uma variável em relação à outra quando ambas são funções de uma terceira variável*: Seja $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Então $\Delta y / \Delta x = (\Delta y / \Delta t) / (\Delta x / \Delta t)$
- *Diferenciação Implícita*: Se $f(x,y) = 0$ é uma função implícita, temos: $dy/dx = - (\partial f / \partial x) / (\partial f / \partial y)$.

Para além disso, é útil conhecer as derivadas de algumas funções. Por exemplo, a derivada de:

$$f(x) = 2x^4 + \sin(x^2) - \ln(x)\ e^x + 7$$

é

$$f'(x) = 8x^3 + 2x\cos(x^2) - 1/x\ e^x - ln(x)\ e^x.$$

Usando derivadas para desenhar gráficos de funções

As derivadas são ferramentas úteis para examinar gráficos de funções. Em particular, os pontos no interior de um domínio de uma função de valores reais que sejam um extremo local terão a primeira derivada igual a zero. No entanto, nem todos os "pontos críticos" são extremos locais. Alguns são pontos de inflexão. A segunda derivada é a forma de avaliar esses pontos críticos: se a segunda derivada do ponto crítico é positiva o ponto é um mínimo local, se negativa, é máximo. Se é nula, o ponto é de inflexão ou parte de uma zona constante (possivelmente ainda um extremo local, mas não necessariamente).

Uma vez que os extremos locais tenham sido encontrados, torna-se geralmente fácil ter uma ideia do gráfico da função, uma vez que (no caso de domínio de uma só dimensão) ela será crescente ou decrescente de forma uniforme excepto nos pontos críticos, e logo (assumindo que é contínua), terá valores entre os valores nos pontos críticos em cada lado.

Derivadas parciais

Quando uma função depende de mais do que uma variável, podemos usar o conceito de **derivada parcial**. Podemos entender as derivadas parciais como a derivada de uma função quando todas menos uma variável são mantidas constantes temporariamente, próximo de um ponto. Derivadas parciais são representadas como $\partial/\partial x$ (onde ∂ é um 'd' arredondado conhecido como 'símbolo da derivada parcial'). Matemáticos tendem a falar do símbolo da derivada parcial como 'der' em vez de 'dee', usado para o símbolo padrão da derivada, 'd'.

O conceito da derivada pode ser extendido de forma mais geral. O que há em comum é que a derivada num determinado ponto serve como uma aproximação linear da função nesse ponto. Talvez a situação mais natural é que entre as várias diferenciáveis, a derivada num certo ponto torna-se uma transformação linear entre o correspondente espaço tangente e a função derivada torna-se um mapa entre feixes tangentes.

Por forma a diferenciar todas as funções contínuas e muitas outras, definimos o conceito da distribuição.

Para a diferenciação de funções complexas de uma variável complexa ver também função Holomórfica.

Referências

- *Calculus of a Single Variable: Early Transcendental Functions* (3rd Edition) by Edwards, Hostetler, and Larson (2003)

Ver também

- Função diferenciável

Retirado de "http://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada"

Categoria: Análise matemática
