Capítulo 2

Vetores
Uma introdução geométrica

2.1 Grandezas escalares e grandezas vetoriais

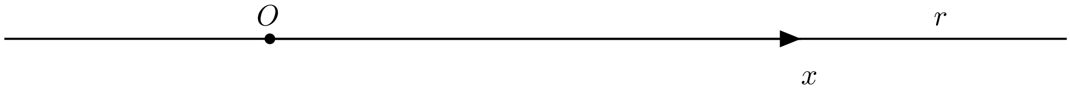
2.1.1 Grandezas escalares e sistema referencial em uma reta

As *grandezas escalares* são conceitos que podem ser representadas por números reais que podem ser obtidos, ou não, por um processo de medição, com uma unidade fixada. Exemplos simples de grandezas escalares que podem ser encontradas na vida cotidiana são: distância entre dois pontos, comprimentos de segmentos e curvas, áreas, volumes, temperatura, densidade, e assim por diante.

Então, quando se trata de grandezas escalares, trabalha-se que com números reais que as representam. Isto não significa que um número real sempre representa uma grandeza escalar, porém, um número real é chamado de *escalar*.

Os números reais possuem uma representação geométrica por meio de uma reta, de maneira que haja uma correspondência entre os números reais e os pontos da reta. Isto se faz da seguinte maneira:

Seja r uma reta qualquer. Sobre a reta, determine um ponto, chamado O. Este ponto determina duas semi-retas. A escolha de uma das semi-retas determina uma orientação da reta, isto é, chamando a semi-reta escolhida de *semi-eixo positivo*, a semi-reta oposta será chamada de *semi-eixo* *negativo*. A nomenclatura fica clara a partir da correspondência que se estabelece com os números reais como veremos a seguir.



Na figura acima, temos a representação de um sistema referencial para a reta r, formado por um ponto O sobre r e a escolha do semi-eixo positivo, denotado por Ox. Numa representação horizontal de uma reta, costuma-se escolher como semi-eixo positivo a semi-reta à direita de O. O sistema referencial é denotado por $S = \{O,\ x\}$.

Suponhamos escolhida uma unidade de medida para o comprimento de segmentos por meio de um segmento fixado. Então, dado um ponto geométrico qualquer P sobre a reta, podemos medir a distância de P a O, como o comprimento do segmento OP, usando a unidade fixada. Ao ponto P associamos o número real x_P, de modo que:

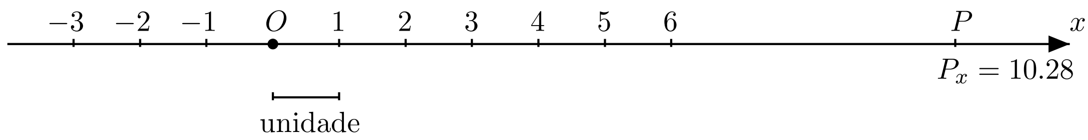
- x_P é a distância de P a O, se P estiver no semi-eixo positivo, sendo $x_P > 0$
- x_P é 0 se $P = O$.
- x_P é oposto da distância de P a O, se P estiver no semi-eixo negativo, sendo $x_P < 0$.

Estamos estabelecendo uma correspondência entre os pontos da reta r e o conjunto dos números reais.

Reciprocamente, dado um número real $x \in \mathbb{R}$, podemos associar um ponto geométrico P_x sobre a reta r, de modo que:

- P_x está à distância x de O, à *direita* de O, se $x > 0$.
- P_x é o ponto O se $x = 0$.
- P_x está à distância $|x|$ de O, à *esquerda* de O, se $x < 0$.

Temos então uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e o conjunto dos números reais.



Na ilustração acima, lê-se a representação de alguns números inteiros, obtidos a partir do segmento-unidade fixado previamente. O ponto P na figura está associado ao número real $P_x = 10.28$, numa representação decimal com precisão de 2 casas decimais. Este número associado ao ponto P é chamado *coordenada* de P no sistema $S = \{O,\ x\}$ da reta r. A coordenada x de um ponto pode ser um número inteiro, racional ou irracional.

Está estabelecida uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos da reta r e o conjunto de números reais $\mathbb{R}$.

Observamos que, com esta representação geométrica, o módulo de um número real x é interpretado como o comprimento do segmento OP, onde P é o ponto geométrico que possui x como sua coordenada.

Assim, $|x| = x$, se $x \geq 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$.

Exercício: Represente num sistema referencial de uma reta, pontos A e B que correspondem às coordenadas $A_x = 3/7$ e $B_x = -8$. Encontre a distância entre os pontos A e B, usando propriedades do módulo.

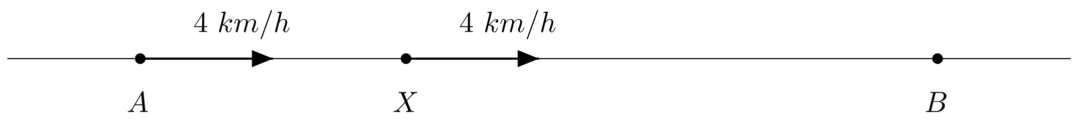
2.1.2 Grandezas vetoriais e sistema referencial em um plano

Intuitivamente, usando exemplos da vida cotidiana, diz-se que as *grandezas vetoriais* são conceitos que precisam não apenas de um escalar para representá-las, mas também de *direção* e *sentido.*

Um exemplo simples pode ser dado pelo conceito de velocidade de uma partícula que se desloca ao longo de uma curva.

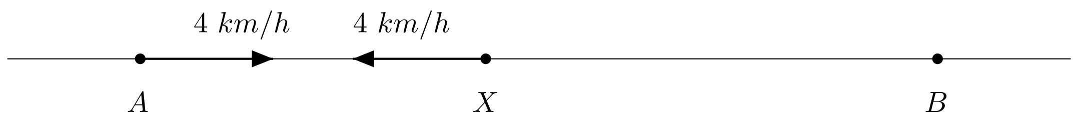
Supondo o caso simples da curva ser retilínea, considere um ponto A que se desloca em linha reta com velocidade de 4 km/h dirigindo-se a um ponto B situado sobre a reta.

Ao conceito de velocidade no ponto A está associado não apenas o número real 4 (unidade $= km/h$), mas a direção da reta $r(A, B)$ onde ocorre o deslocamento e o sentido de percurso. Considere outro ponto X se deslocando sobre a mesma reta, no mesmo sentido de percurso de A e com mesma taxa de variação do espaço percorrido em relação à unidade de tempo, 4 km/h no caso.

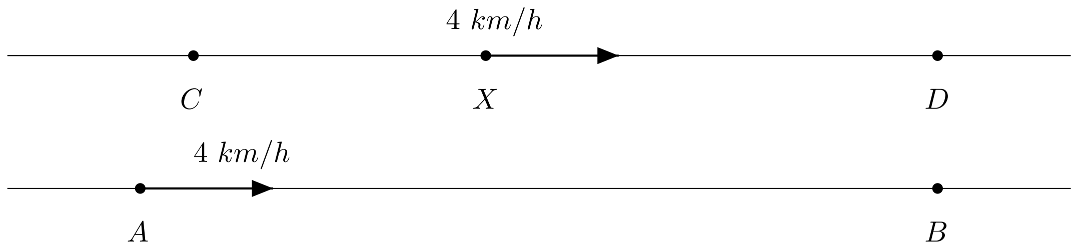


Podemos dizer que A e X se deslocam à *mesma velocidade*.

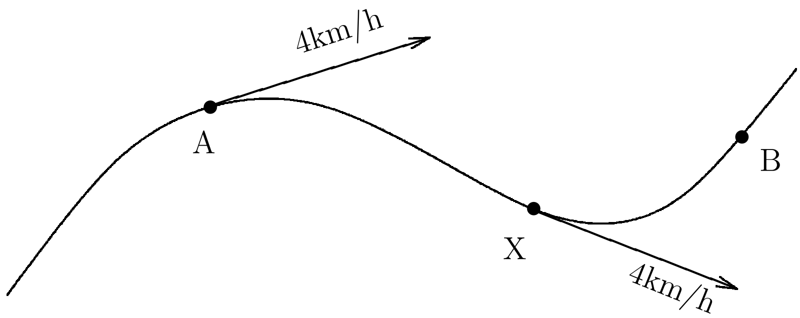
Se o ponto X estiver se deslocando sobre a mesma reta, mas no sentido de B para A, a 4 km/h, não temos mais a mesma velocidade, mas sim, vetores velocidades com sentidos opostos, apesar de terem a mesma direção e a mesma intensidade.



Agora, ainda considerando que A se desloca como descrito acima, se o ponto X estiver se deslocando a 4 km/h sobre uma reta $r(C, D)$ paralela à reta $r(A, B)$, temos que as velocidades têm a mesma intensidade e mesma direção (*dizemos que retas paralelas definem a mesma direção*), mas podem ter sentidos opostos ou iguais. Considere a reta passando por A e C: esta divide o plano contendo as duas retas paralelas em dois semiplanos. Suponha que o ponto D esteja no mesmo semiplano que B em relação à reta $r(A, C)$. Então o sentido de A para B é o mesmo que de C para D e a velocidade de X será a mesma que a de A se o sentido for a mesma de C para D, e em sentidos opostos caso contrário.



O conceito de velocidade de deslocamento de uma partícula como uma grandeza vetorial, fica ainda mais claro, se considerarmos uma trajetória curvilínea.



Vamos considerar, sobre uma trajetória curvilínea, os pontos A e X, ambos se deslocando a 4 km/h dirigindo-se para B, como na figura. Neste caso, o vetor velocidade em A e o vetor velocidade em X possuem em comum apenas o escalar 4 (km/h) que representa o seu valor numérico da sua intensidade mas não possuem a mesma direção. Sem direção em comum, nem se compara o sentido. A taxa de variação do vetor velocidade por unidade de tempo é sentida, neste caso, como o vetor aceleração normal, na direção normal à trajetória, que se estuda na Física.

Outros exemplos de grandezas vetoriais que podem ser encontradas na vida cotidiana são: força, peso, campo elétrico, campo magnético, etc.

2.1.3 Representação de vetores por segmentos orientados

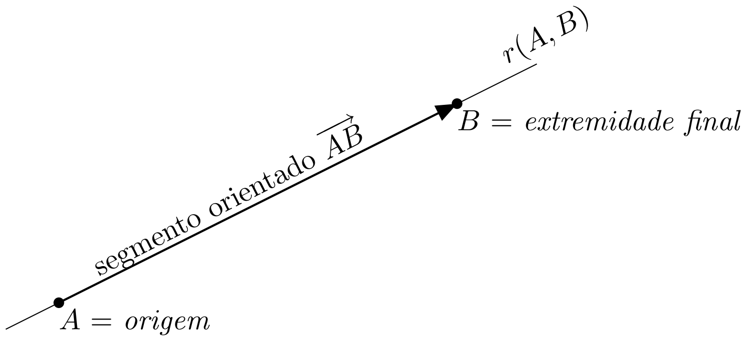
Para representar geometricamente as grandezas vetoriais que ocorrem na vida real, os conceitos da geometria euclidiana no plano e no espaço fornecem os elementos ideais para estudar os vetores nestes ambientes. As propriedades matemáticas de vetores que são estudadas com as representações geométricas permitem estender o conceito de vetor, posteriormente, para ambientes mais abstratos, chamados espaços vetoriais, que constituem uma ferramenta essencial para o entendimento da

Matemática e suas aplicações em outros ramos da Ciência.

Neste primeiro momento, os ambientes dos vetores serão o plano e o espaço. O modelo geométrico para representar um vetor é dado pelo conceito de *segmento orientado*, como segue.

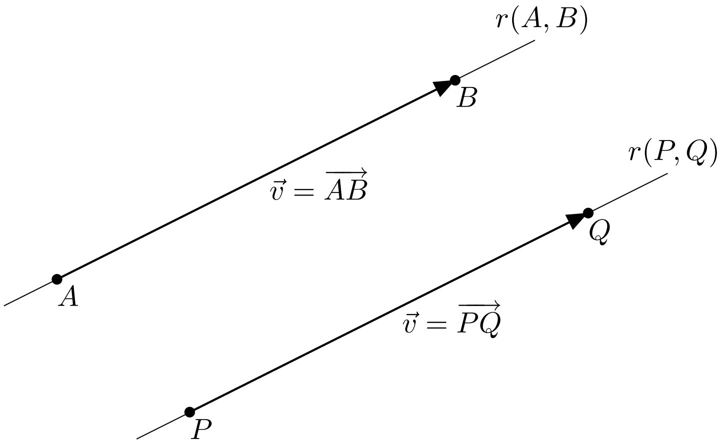
Dados dois pontos quaisquer A e B, distintos, eles determinam a reta $r(A, B)$, na qual distinguimos o segmento de reta AB. Estabelecendo um dos pontos, digamos A, como a *origem* do segmento, o outro ponto B é a *extremidade final*, e tem-se determinado um sentido de percurso no segmento AB: de A para B.

Diz-se que o segmento AB é orientado e denota-se por $\overrightarrow{AB}$.



Este segmento possui um comprimento associado (um escalar), a direção da reta suporte $r(A, B)$ e o sentido determinado pela escolha de A como origem e B como final.

Dizemos então que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa um vetor $\vec{v}$ e denotamos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



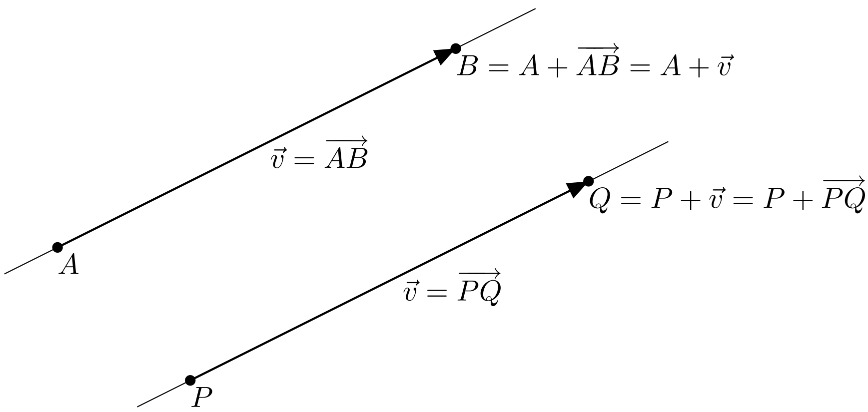
Se P é um outro ponto, podemos considerar a reta que passa por P e é paralela à reta $r(A, B)$. Sobre esta reta, podemos considerar Q, ponto tal que o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ tenha o mesmo comprimento de $\overrightarrow{AB}$, a mesma direção (retas paralelas) e o mesmo sentido. Então $\overrightarrow{PQ}$ representa o mesmo vetor $\vec{v}$.

Observação: Se P é um ponto da reta $r(A, B)$, podemos tomar Q na própria reta, de modo que o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ tenha o mesmo comprimento, direção e sentido de $\overrightarrow{AB}$.

Portanto, um vetor $\vec{v}$ é representado geometricamente por uma coleção de segmentos orientados que possuem em comum comprimento, direção e sentido. Os segmentos orientados que representam um determinado vetor são chamados *equipolentes*.

Temos o conceito de *vetor livre*, no sentido que um vetor $\vec{v}$ não depende de um ponto inicial de um segmento orientado que o representa.

Por outro lado, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto P é dado, existe um único ponto Q tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.



Denotamos então $Q = P + \vec{v}$. Com esta notação, temos claramente que se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $B = A + \vec{v}$. Cada segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ que representa um vetor $\vec{v}$ tem origem fixada em C e extremidade D.

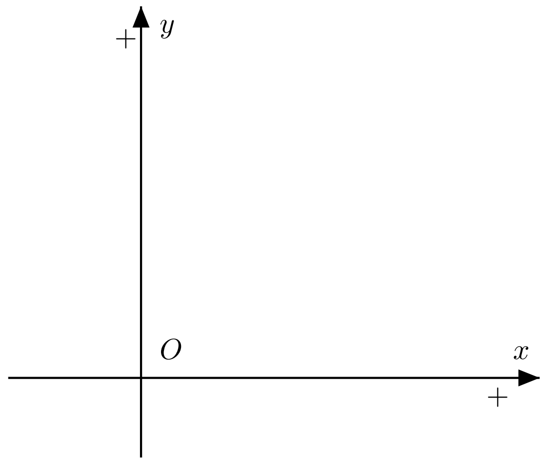
2.2 Sistema de coordenadas e operações com vetores

2.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas no plano

Um par de retas perpendiculares no plano com ponto de intersecção O constitui um referencial cartesiano do plano denotado por

$$S = \{O, x, y\}$$

quando cada uma das retas se constitui um referencial (de reta) com origem em O, em que um sentido é estabelecido com a escolha do semi-eixo positivo a partir do ponto O.

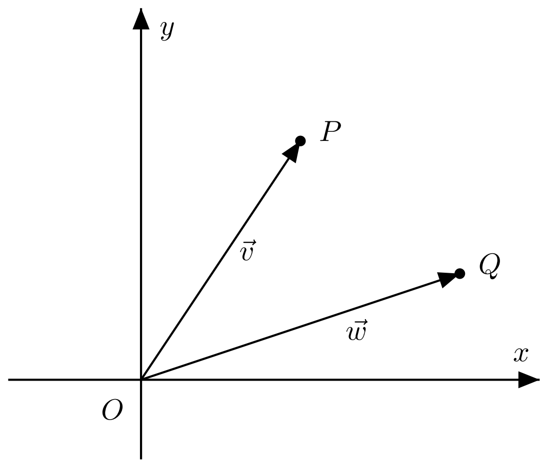


O ponto O de intersecção das retas é chamado *origem* do sistema. Denotamos por Ox e Oy as retas perpendiculares em O que serão chamados de eixos cartesianos.

Dado um sistema cartesiano $S = \{O, x, y\}$ temos uma origem preferencial fixada, e então dado um vetor $\vec{v}$ (livre) teremos um único ponto P do plano tal que $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$.

Reciprocamente, dado um ponto Q do plano, ele determina o segmento orientado $\overrightarrow{OQ}$ que representa um vetor $\vec{w}$, com origem em O.

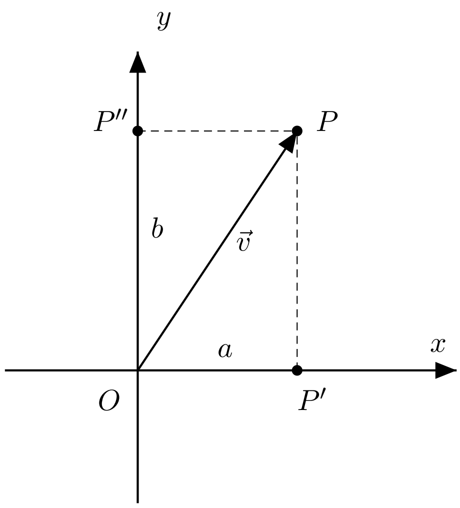
Temos uma correspondência biunívoca bem definida



$$\begin{array}{ccccc} \vec{v} & \longleftrightarrow & P & \longleftrightarrow & \overrightarrow{OP} \\ \text{vetor livre} & \longleftrightarrow & \text{ponto do plano} & \longleftrightarrow & \text{segmento orientado com origem } O \end{array}$$

Seja P um ponto no plano com um referencial cartesiano. Por P tracemos retas perpendiculares aos eixos Ox e Oy respectivamente, determinando pontos de intersecção P' e P'', rescpectivamente.

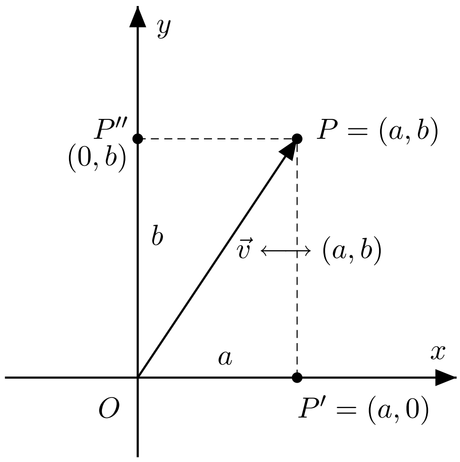
A escolha de um referencial no eixo Ox, determinada pela escolha de uma das semi-retas, localiza o ponto P', projeção ortogonal de P sobre Ox, de modo que podemos associar a este ponto um número real a. Este número a representa essencialmente o comprimento do segmento OP', medido na unidade fixada no referencial, com sinal positivo ou negativo, conforme a posição de P' no eixo Ox esteja na semi-reta positiva ou negativa.



Analogamente, associamos ao ponto P'', projeção de P sobre Oy, um número real b, que representa o comprimento do segmento OP'', segundo a unidade fixada no eixo Oy, e com sinal positivo ou negativo, conforme P'' esteja localizado na semi-reta positiva ou negativa do eixo Oy.

Para identificar a ordem com que associamos os números a essas projeções, denotamos por $(a, 0)$ e $(0, b)$ as respectivas *coordenadas* dos pontos P' e P'' sobre os eixos cartesianos.

Ao ponto P associamos então o *par ordenado* de números reais (a, b), onde a é chamado *abscissa* de P e b é chamado de *ordenada* de P, sendo $(a, 0)$ e $(0, b)$ as coordenadas das projeções P' e P''.



Assim, temos uma correspondência entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais ($P \longleftrightarrow (a, b)$). Voltando à correspondência entre vetores do plano e pontos do plano, temos:

$$\vec{v} \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} \longleftrightarrow P \longleftrightarrow (x, y)$$

É claro que $O \leftrightarrow (0, 0)$.

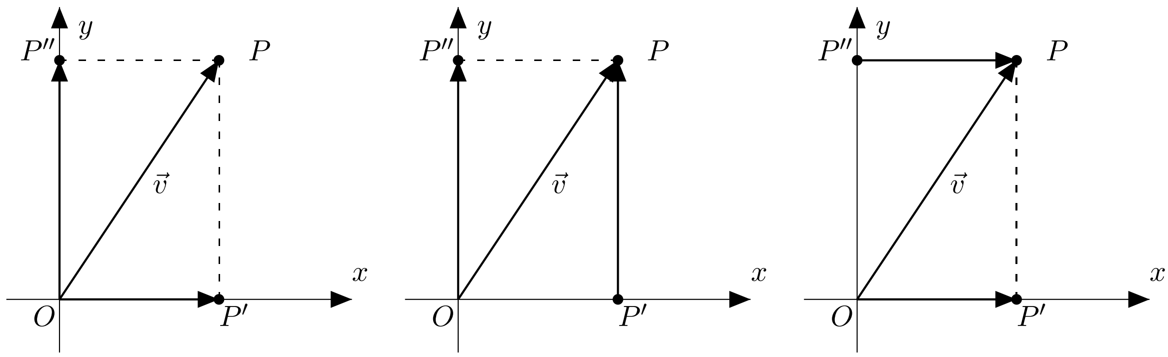
Comandos no Maple

```
with(linalg):  # para carregar o pacote linalg
```

```
                # para manipulação de matrizes e vetores
P := [a,b]; # o ponto P é dado como uma lista ordenada (list)
P[1];    # 1a. coordenada de P
P[2];    # 2a. coordenada de P
O := [0,0];   # o ponto O representa a origem
P1 := [a,0];  P2 := [0,b];  #  trocamos P' e P'' por P1 e P2,
                                      pois ' e '' são símbolos reservados.
v := vector([a,b]);   #  vetor de coordenadas dadas como lista ordenada
v[1];  # 1a. coordenada de v
v := vector(2, [a,b]);  # é opcional inserir o número de coordenadas.
# vector e list são duas estruturas distintas no software Maple
evalm(P-O); # o resultado é o vetor v=OP
```

...

Vamos observar agora que os pontos P' e P'' também determinam vetores: $\overrightarrow{OP'}$ e $\overrightarrow{OP''}$. Também observamos que os vetores $\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{OP''}$ e $\overrightarrow{P''P} = \overrightarrow{OP'}$



Assim, o ponto $P = O + \vec{v}$ é extremidade também como $P'' + \overrightarrow{OP'}$ e $P' + \overrightarrow{OP''}$.

Isto sugere a *regra do paralelogramo* para a adição de vetores. De fato, podemos ver a decomposição do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ como soma de vetores $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$ onde o segmento OP é a diagonal do paralelogramo (no caso, um retângulo) $OP'PP''$.

Em coordenadas, esta situação geométrica corresponde a

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (a,b) &= (a,0) &+ (0,b) \\ &= \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP'} &+ \overrightarrow{OP''} \end{aligned}$$

Comandos no Maple

```
with(linalg):  # para carregar o pacote linalg
               # para manipulação de matrizes e vetores
P := [a,b]; P1 := [a,0]; P2:= [0,b]; O := [0,0];
v := evalm(P-O); # ou v = vector([a,b]);
v1:= evalm(P1-O); v2 := (P2-O);
evalm(v1+v2); # deverá ser igual a v
```

...

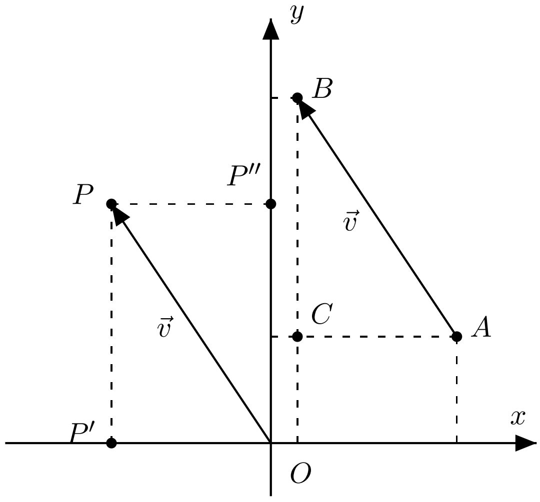
Para entender melhor a correspondência entre representação geométrica de vetores e suas coordenadas, consideremos a seguinte situação:

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ um vetor dado.

Sejam $P = (a,b)$ as coordenadas do ponto P e portanto, do vetor $\vec{v}$, e um ponto $A = (x,y)$ qualquer.

Então teremos um único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, isto é, o segmento orientado com origem A e extremidade B, de modo que $B = A + \vec{v}$.

Vemos claramente na ilustração que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, onde $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OP'}$ e $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OP''}$



Logo, as coordenadas de B são dadas por: $B = A + \vec{v} = (x,y) + (a,b)$, onde se torna natural efetuar a adição coordenada a coordenada, isto é, $B = (x+a, y+b)$.

Em geral, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, temos $B = A + \vec{v}$ e, se $B = (B_x, B_y)$ e $A = (A_x, A_y)$ são as coordenadas dos pontos B e A, então as coordenadas de $\vec{v}$ são dadas por

$$\vec{v} = B - A = (B_x, B_y) - (A_x, A_y) = (B_x - A_x, B_y - A_y).$$

Comandos no Maple

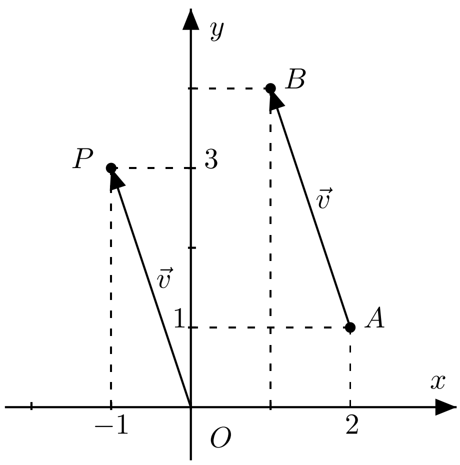
```
with(linalg):  # para carregar o pacote linalg

A := [x,y];  # o ponto A  é um list (lista ordenada)
v := vector([a,b]); # v é um vector (vetor)
evalm(A+v); # o resultado do evalm é  vector([x+a,y+b])
convert(evalm(A+v), list); # convertido em list:  [x+a, y+b]

B := convert(evalm(A+v), list); # o ponto B = A+v é um list
```

...

Exemplo: *$\vec{v} = (-1, 3)$ e $A = (2, 1)$ encontrar as coordenadas do ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.*



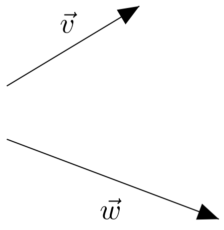
O ponto $P = (-1, 3)$ é a extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$ no sistema.

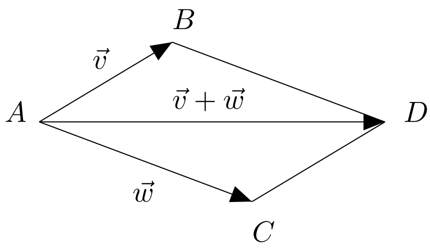
$B = A + \vec{v}$ implica que as coordenadas de $B(x, y)$, satisfazem

$(x, y) = (2, 1) + \vec{(}-1, 3) = (2 - 1, 1 + 3) = (1, 4).$

2.2.2 Adição de vetores

A *adição de vetores* $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é representada geometricamente da seguinte forma:





se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ então $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AD}$, onde AD é a diagonal do paralelogramo

$ABDC$.

É a *regra do paralelogramo.*

Observe que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ e também que $D = A + (\vec{v} + \vec{w})$.

Em coordenadas, suponha que $\vec{v} = (a, b)$, $\vec{w} = (c, d)$ e $A = (x, y)$. Então $B = (x + a, y + b)$ e $D = B + \vec{w} = ((x + a) + c, (y + b) + d) = (x + (a + c), y + (b + d))$, donde concluímos que $\vec{v} + \vec{w} = D - A = (a + c, b + d)$.

Assim, $\vec{v} + \vec{w} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

`Comandos no Maple`

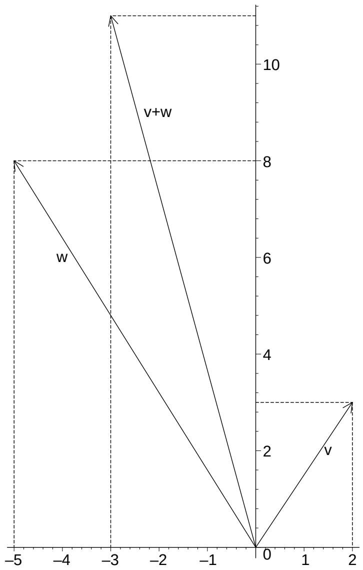
```
with(linalg):
v := vector([a,b]);
w := vector([c,d]);
evalm(v+w); # para calcular o vetor v+w
```

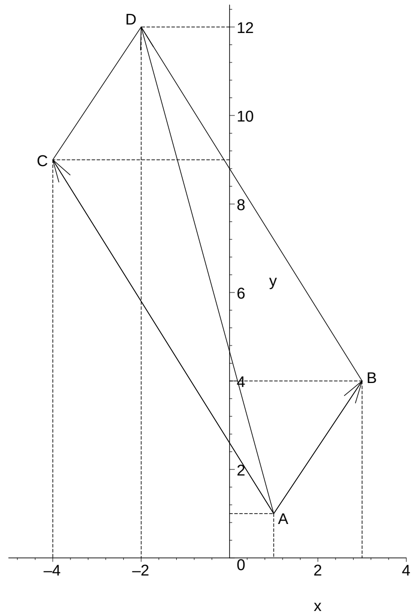
...

Exercício: *Dados* $\vec{v} = (2, 3)$ *e* $\vec{w} = (-5, 8)$ *encontre* $\vec{v} + \vec{w}$ *e represente-o no sistema cartesiano. Dado* $A = (1, 1)$*, encontre os vértices* B*,* C *e* D *do paralelogramo tal que* $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$*,* $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$ *e* $\overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{w}$*. Represente graficamente no sistema cartesiano.*

Solução: Temos $\vec{v}+\vec{w} = (2, 3)+(-5, 8) = (2-5, 3+8) = (-3, 11)$. Agora, dado $A = (1, 1)$, como $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, temos que $B = A + \vec{v} = (1, 1) + (2, 3) = (3, 4)$; como $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$, temos que $C = A + \vec{w} = (1, 1) + (-5, 8) = (-4, 9)$; e como $\overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{w}$, $D = A + \vec{v} + \vec{w} = (1, 1) + (-3, 11) = (-2, 12)$.

Veja as representações no plano cartesiano, dos vetores na origem e do paralelogramo $ABCD$:



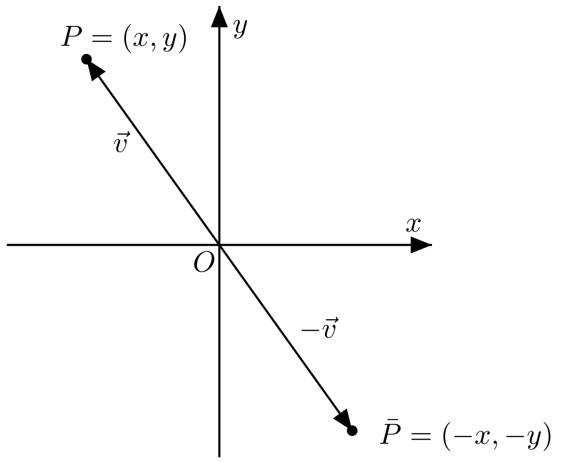


Vetor nulo e vetor oposto:

Um ponto representa um segmento que possui as extremidades coincidentes. É claro que tal "segmento" possui comprimento nulo e não possui direção definida. Dizemos que o ponto representa o *vetor nulo* e denotamos por $\vec{0}$. Quando um sistema cartesiano $S = \{O,\ x, y\}$ está fixado, a origem O é o representante natural do vetor nulo $\vec{0}$ que possui portanto coordenadas $(0, 0)$. Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer, o vetor nulo com origem em P é dado por $\vec{0} = \overrightarrow{PP} = P - P$, pois a extremidade coincide com o próprio P.

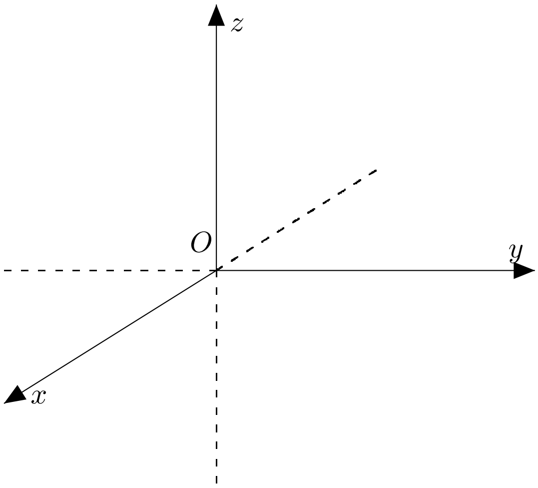
Logo $(0, 0) = (x, y) - (x, y) = (x, y) + (-x, -y)$.

O ponto $\bar{P} = (-x, -y)$ é o simétrico de P em relação a O e determina o vetor $-\vec{v} = \overrightarrow{O\bar{P}}$, que satisfaz $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$. Este vetor, $-\vec{v}$, é chamado *oposto de* $\vec{v}$.



$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{O\bar{P}} \\ &= \vec{v} + \overrightarrow{PO} = \vec{v} + (-\vec{v}) \end{aligned}$$

2.2.3 Sistema de referencial cartesiano no espaço



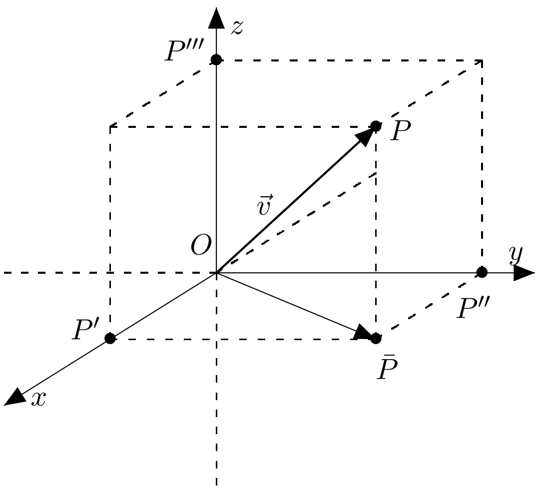
Ainda utilizando o conceito geométrico de segmentos orientados, podemos representar os vetores do espaço por meio de um referencial contituído de 3 retas perpendiculares entre si com um ponto em comum O, com um sentido escolhido em cada um dos eixos. NOTAÇÃO: $S = \{O,\ x, y, z\}$.

Os eixos Ox, Oy e Oz são chamados *eixos coordenados*. Os planos: Oxy (contendo os eixos Ox e Oy), Oxz (contendo os eixos Ox e Oz) e Oyz (contendo Oy e Oz), são chamados *planos coordenados*.

De maneira análoga a que foi feita no plano, os vetores livres serão representados através de segmentos orientados com origem natural O, determinando de maneira única pontos no espaço. Temos uma correspondência biunívoca

$$\vec{v} \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} \longleftrightarrow P$$

Dado um ponto P (e portanto o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$), a projeção ortogonal de P sobre o plano Oxy determina de maneira única um ponto $\bar{P}$.



O ponto $\bar{P}$ está a uma distância do ponto P, que medida em uma unidade fixada, fornece uma coordenada z na direção do eixo Oz, em que o sinal é tomado como positivo ou negativo, conforme P esteja no semi-espaço (determinado pelo plano Oxy) que contém o semi-eixo positivo ou negativo do eixo Oz.

O ponto $\bar{P}$ pertence ao plano Oxy em que já existe um sistema cartesiano, de modo que podemos associar a $\bar{P}$ as coordenadas das projeções ortogonais de $\bar{P}$ sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, dados pelos pontos P' e P'' como na figura.

Observemos que geometricamente temos um paralelepípedo com três arestas contidas nos eixos Ox, Oy e Oz, com vértices em O e os pontos P', P'' e P''', respectivamente.

Associando as coordenadas naturais destes pontos sobre os eixos temos: $P' = (x, 0, 0)$, $P'' = (0, y, 0)$ e $P''' = (0, 0, z)$.

Temos $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{P}P}$, em que $\overrightarrow{O\bar{P}} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}$ e $\overrightarrow{\bar{P}P} = \overrightarrow{OP'''}$, isto é, $\overrightarrow{OP}$ é representado que é a diagonal do paralelepípedo como na figura. Temos então as coordenadas do ponto P (e portanto do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$) no espaço como

$$P = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z),$$

onde novamente verificamos a operação natural de soma de coordenadas.

Assim temos a correspondência $\vec{v} \longleftrightarrow P \longleftrightarrow (x, y, z)$ entre vetores no espaço e *ternas ordenadas* de números reais.

Exercício: *Represente geometricamente o vetor* $\vec{v} = (2, 3, -3)$ *num sistema cartesiano. Dado* $A = (1, -1, 0)$ *encontre* B *tal que* $B = A + \vec{v}$.

Observaçao: Todas as considerações feitas para vetores no plano são válidas para vetores no espaço, e não vamos repetir aqui.

Comandos no Maple

```
with(linalg):  # para carregar o pacote linalg
P := [x,y,z];  # um ponto P no espaço
P1 := [x,0,0];  P2 := [0,y,0]; P3 := [0,0,z]; # projeções de P nos eixos
P := convert(evalm(P1+P2+P3), list); # P é a soma das projeções
v := vector( [a,b,c] ); w:= vector(3, [d,e,f] ); # vetores no espaço
Q := convert( evalm(P+v), list); # soma de ponto com vetor
R := convert( evalm(Q+w), list);
v_mais_w:= evalm(v+w); # soma de vetores
R := convert(P + v_mais_w, list);
```

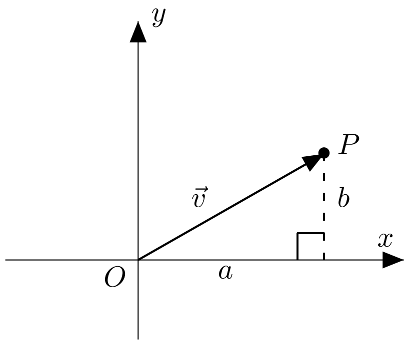
...

2.2.4 Módulo de um vetor

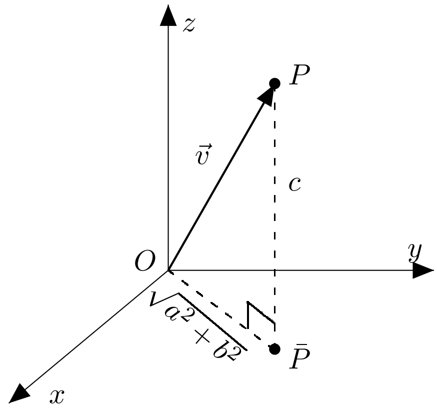
Por definição, módulo de um vetor $\vec{v}$, denotado por $|\vec{v}|$ ou $||\vec{v}||$, é o comprimento de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ que o representa. Logo, $|\vec{v}| \geq 0$ e $|\vec{v}| = 0$ quando e somente quando $\vec{v} = \vec{0}$.

Em coordenadas,

- Se $\vec{v} = (a, b)$ então $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (no plano) e se $\vec{v} = (a, b, c)$ então $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (no espaço), pelo Teorema de Pitágoras.



$|\vec{v}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$|\vec{v}| = \sqrt{|\overrightarrow{O\bar{P}}|^2 + |\overrightarrow{\bar{P}P}|^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + c^2}$

- Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, então temos que $\vec{v} = B - A = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

  Logo, $|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Comandos no Maple

```
with(linalg):  # para carregar o pacote linalg
v := vector([a,b,c]);
norm(v,2); # fornece o módulo (ou norma) de v
  # o número 2 se deve ao fato que esta norma é conhecida como a norma 2,
  # onde se usa a raiz quadrada da soma dos quadrados das coordenadas.
```

...

Exercícios:

1. Achar o módulo do vetor determinado por $\overrightarrow{AB}$ quando $A = (2,7)$ e $B = (-5,-1)$.

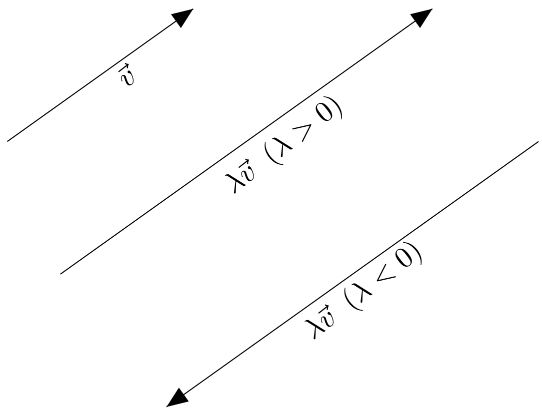
2. Achar os valores de a tal que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tenha módulo 3, sendo $A = (2a, 0, 3)$ e $B = (1, a, -1)$.

2.2.5 Multiplicação de um vetor por um escalar (número real)

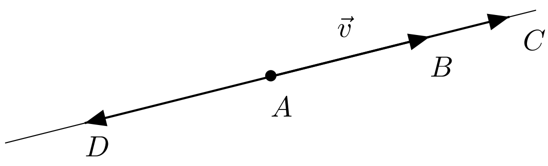
Dado um vetor $\vec{v}$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, o vetor $\lambda\vec{v}$ é definido como:

- $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ se $\lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

- caso contrário, $\lambda\vec{v}$ é um vetor com:
$$\begin{cases} |\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}| \\ \text{mesma direção de } \vec{v} \\ \text{mesmo sentido de } \vec{v} \text{ se } \lambda > 0 \\ \text{sentido oposto de } \vec{v} \text{ se } \lambda < 0 \end{cases}$$



Geometricamente, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e λ é não nulo, então $\lambda\vec{v}$ é representado por $\overrightarrow{AC}$ tal que $|\overrightarrow{AC}| = |\lambda||\overrightarrow{AB}|$. Os pontos A, B e C são colineares e o sentido do novo vetor depende do sinal de λ.

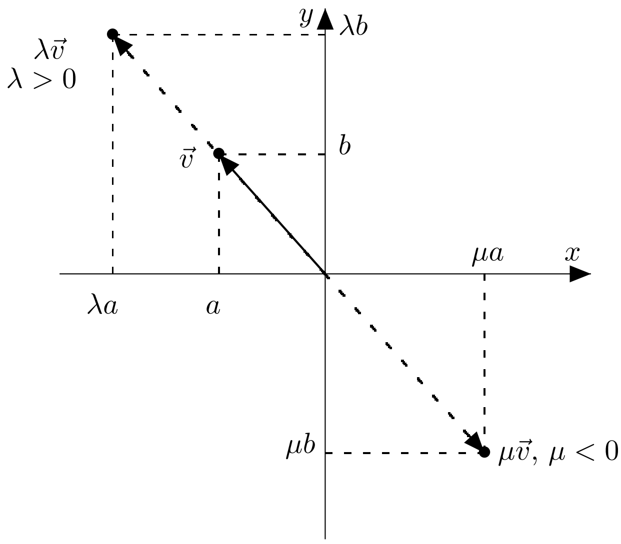


$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ com $\lambda > 0$

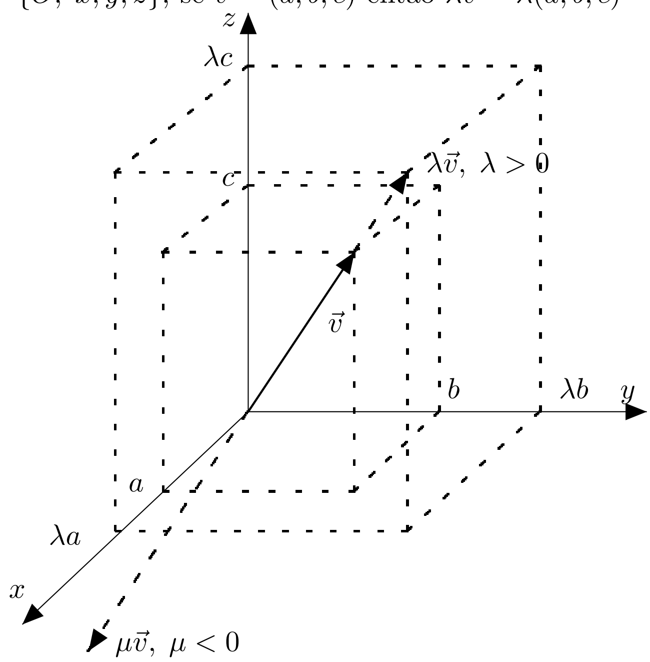
$\overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{AB}$ com $\mu < 0$

Em coordenadas:

- No plano com $S = \{O,\ x, y\}$, se $\vec{v} = (a,b)$ então $\lambda\vec{v} = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.



- No espaço com $S = \{O, \ x, y, z\}$, se $\vec{v} = (a, b, c)$ então $\lambda \vec{v} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Exercícos:

1. Dado $\vec{v} = (2, 3, 1)$ encontre $-3\vec{v}$ e represente os vetores no sistema cartesiano.

2. Dados $\vec{v} = (-1, 5)$ e o ponto $A = (3, 1)$, enconcontre o ponto $B = A + 2\vec{v}$ e represente o vetor $\overrightarrow{AB} = 2\vec{v}$ no sistema cartesiano.

Comandos no Maple

```
with(linalg):
  # No plano:
u := vector([a,b]); v := vector([c,d]);
evalm(lambda*v); # calcula lambda*v
w := evalm( 3*u -5*v ); # w = 3u-5v = (3a-5c, 3b - 5d)
  # No espaço:
u := vector([a,b,c]); v := vector([d,e, f]);
evalm(lambda*v); # calcula lambda*v
w := evalm( 3*u -5*v ); # w = 3u-5v = (3a-5d, 3b - 5e, 3c -5f)
```

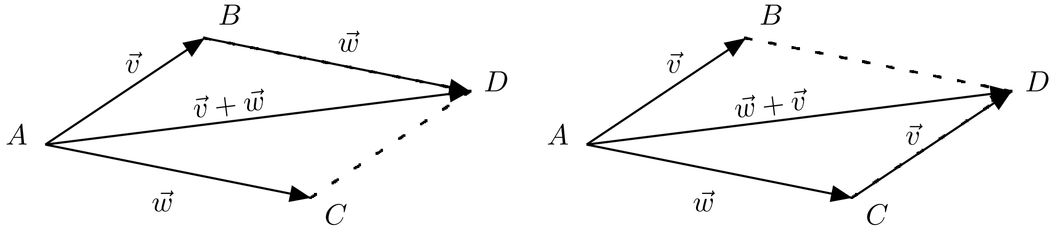
...

2.2.6 Propriedades da adição e da multiplicação por escalar

As operações de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar de um determinado conjunto de vetores (vetores no plano ou vetores no espaço) satisfazem as seguintes propriedades:

1. *$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$, para quaisquer vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. (propriedade comutativa).*

   Visualização geométrica: Considere $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.



   Pela regra do paralelogramo, como $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$, segue que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{v} + \vec{w}$.

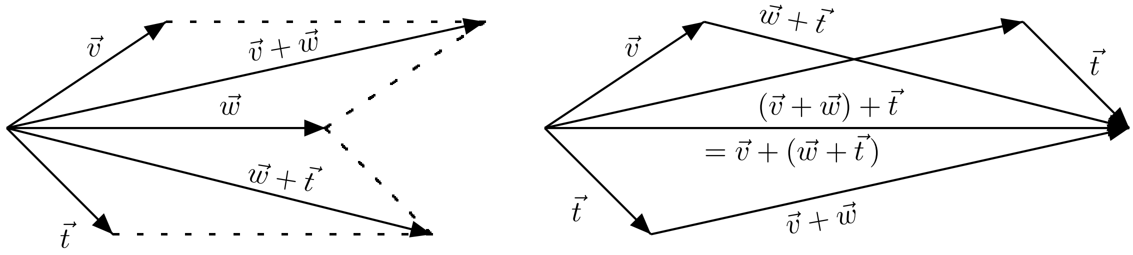
   Por outro lado, temos também que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, onde $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$ e $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

   Logo, $\overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.

Em coordenadas: Se $\vec{v} = (x_1, y_1)$ e $\vec{w} = (x_2, y_2)$ são dois vetores no plano, então $\vec{v} + \vec{w} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \overset{(\star)}{=} (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \vec{w} + \vec{w}$, onde em $(\star)$ utilizamos a propriedade comutativa da soma de números reais. Para dois vetores no espaço, é análogo e fica como exercício.

2. $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{t} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{t})$, *para quaisquer vetores* $\vec{v}$, $\vec{w}$ *e* $\vec{t}$ *(propriedade associativa).*

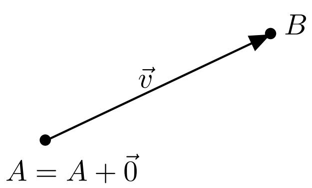
   Geometricamente, podemos interpretar esta propriedade na seguinte figura:



   Use a regra do paralelogramo para a adição de vetores e verifique a propriedade associativa.

   Em coordenadas, faça como *exercício*, lembrando que o argumento essencial é a propriedade associativa da adição dos números reais.

3. *Para todo vetor* $\vec{v}$ *vale* $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$. *(propriedade da existência do elemento neutro)*

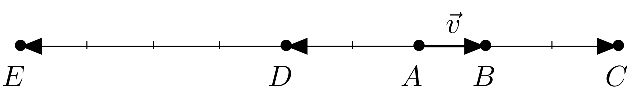


   Considere $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Como $A = A + \vec{0}$ e $B = B + \vec{0}$, temos que $B = A + \vec{v} = (A + \vec{0}) + \vec{v}$ donde $\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$.

   Analogamente, $A + \vec{v} = B = B + \vec{0} = A + \vec{v} + \vec{0}$ e portanto, $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

4. *Para todo vetor* $\vec{v}$, *existe o elemento oposto denotado por* $-\vec{v}$ *que satisfaz* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
   Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor representado por $\overrightarrow{BA}$ é o elemento oposto.

5. *Para quaisquer números reais* a, b *e qualquer vetor* $\vec{v}$ *vale* $a(b\vec{v}) = b(a\vec{v}) = (ab)\vec{v}$.
   Veja a ilustração geométrica quando $a = -2$ e $b = 3$, com $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



   $\overrightarrow{AC} = 3\vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = -2\vec{v}$
   $\overrightarrow{AE} = -2(3\vec{v}) = 3(-2\vec{v}) = (3 \times (-2))\vec{v}$.

   Prove esta propriedade usando coordenadas, como exercício.

6. *Para quaisquer números reais a e b e qualquer vetor $\vec{v}$, vale a propriedade distributiva em relação à soma de números reais: $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$.*

   Esta propriedade pode ser verificada no Maple, literalmente.

   Comandos no Maple

```
with(linalg):  # para carregar o pacote linalg
v := vector(3); # v um vetor genérico no espaço
# troque 3 por 2 para o plano
w1 := evalm(a*v +b*v); # w1 =av+bv
w2 := evalm((a+b)*v); # w2 = (a+b)v
simplify(evalm(w1-w2)); # Se w1 -w2 = 0, w1 = w2.
```

   ...

7. *Para qualquer número real a e quaiquer vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vale a propriedade distributiva em relação à adição de vetores: $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$.*

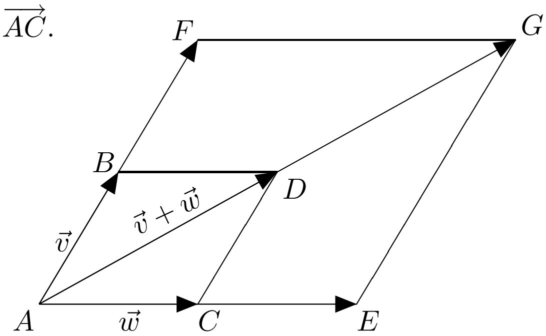
   Ilustração geométrica para $a = 2$, dados $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{w}$

   $\overrightarrow{AG} = 2(\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}$

   $= 2\vec{v} + 2\vec{w}$.

   Em coordenadas, fica como exercício.



8. *Dado qualquer vetor $\vec{v}$ e o número real 1 vale que $1\vec{v} = \vec{v}$.*

O conjunto de vetores do plano (e do espaço) representados por segmentos orientados equipolentes possui, portanto, as operações de adição e multiplicaçao por escalar, satisfazendo as 8 propriedades acima.

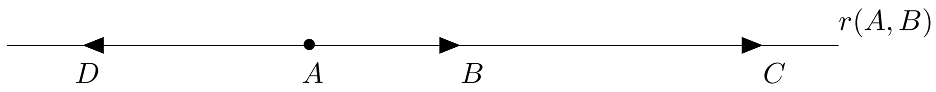
Quando fixamos um sistema de referencial cartesiano $S = \{O,\ x, y\}$ no plano, temos a correspondência $\vec{v} \longleftrightarrow (x, y)$ entre vetores e pares ordenados de números reais, tal que $\mathbb{R}^2 = \{\,(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\}$ fica munido de operações de adição e multiplicação por escalar com as 8 propriedades acima.

Analogamente, quando fixamos um referencial cartesiano $S = \{O,\ x, y, z\}$ no espaço, temos a corresponência $\vec{v} \longleftrightarrow (x, y, z)$ tal que $\mathbb{R}^3 = \{\,(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\,\}$ fica munido de operações de adição e multiplicação por escalar com as 8 propriedades acima.

Dizemos então que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são o plano e o espaço vetoriais, respectivamente.

2.3 Dependência e independência linear, equações vetoriais da reta e do plano

Consideremos agora um vetor não nulo $\vec{v}$ e um segmento orientado $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Os múltiplos $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ possuem a mesma direção de $\vec{v}$, se $\lambda \neq 0$. Portanto, se $\vec{w} = \lambda\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, os pontos A, B e C estarão situados sobre a mesma reta $r(A, B)$ que passa por A e B. Lembramos que o ponto A estará entre B e C ou não, conforme $\lambda < 0$ ou $\lambda > 0$.



$\overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{AB},\ \mu < 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB},\ \lambda > 0$

Dizemos que A, B e C são *colineares* e que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são *paralelos* (por possuirem a mesma direção ou que são *linearmente dependentes* (abreviadamente, l.d.) Variando o valor de λ podemos percorrer todos os pontos da reta $r(A, B)$.

Observamos agora que se X é um ponto qualquer da reta $r(A, B)$, o segmento orientado $\overrightarrow{AX}$ representa o vetor $\vec{w}$ que possui a mesma direção de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Logo, $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$ para algum número real λ. Isto quer dizer que o ponto X da reta $r(A, B)$ fica determinado de maneira única por um parâmetro real λ.

Assim, temos a *equação vetorial* da reta que passa por A e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

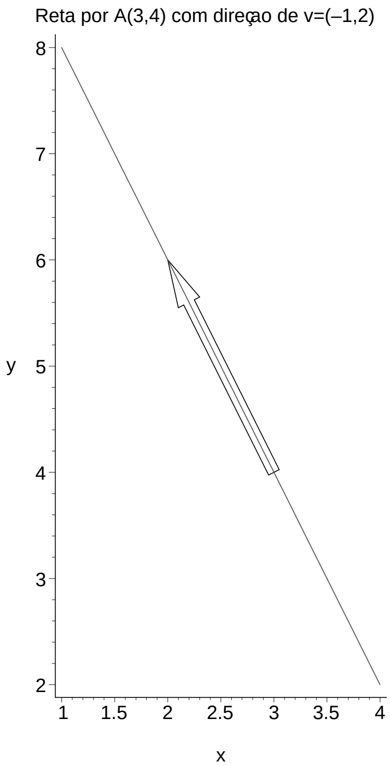
$$r:\ X = A + \lambda\vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

Em coordenadas no plano: se $A = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$, então temos a equação

$$r:\ (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $X = (x, y)$ é um ponto da reta $r(A, \vec{v})$ se $\begin{cases} x = z_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A seguir a ilustração obtida no Maple de uma reta passando pelo ponto $A = (3, 4)$ e direção dada pelo vetor $\vec{v} = (-2, 2)$:



Comandos no Maple

```
with(linalg):
with(plots): # carrega um pacote básico de gráficos
A :=[x0,y0]; # substitua x0 e y0 por valores numéricos
v := vector([a,b]); # ídem para a e b
plot([x0+t*a, y0+t*b, t=tmin .. tmax]); # desenha um segmento da reta
            entre A+tmin*v e A+tmax*v
        # Pode-se incrementar o programa implementando a equação vetorial
P := t -> convert(evalm(A +t*v), list);
        # para cada t, P(t) representa um ponto da reta
```

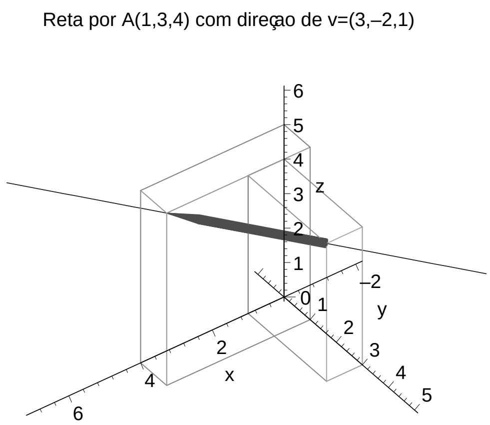
```
plot( [op(P(t)), t=tmin .. tmax]); # desenha a reta
        # substitua tmin e tmax por extremos da variação de t
        # o comando op está sendo usado para suprimir o [ ] do list P(t)
reta := plot( [op(P(t)), t=tmin .. tmax]):  # atente para o : no final
        # armazena o desenho na variável reta
vetor := arrow(A,v):
        # armazena o desenho de uma flecha
        # representando o vetor v a partir de A
display({reta, vetor}, scaling=constrained);
        # desenha a reta e o vetor simultaneamente
        # com a opção de eixos com mesma unidade
```

Analogamente, para uma reta no espaço que passa por dois pontos distintos $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (x_1, y_1, z_1)$, temos que o vetor direção é dado pot $\vec{v} = B - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \neq (0, 0, 0)$. Então, a equação da reta $r(A, B)$ é dada por

$$r: \ (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \ \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Os comandos abaixo produzem o seguinte desenho no Maple:



Comandos no Maple

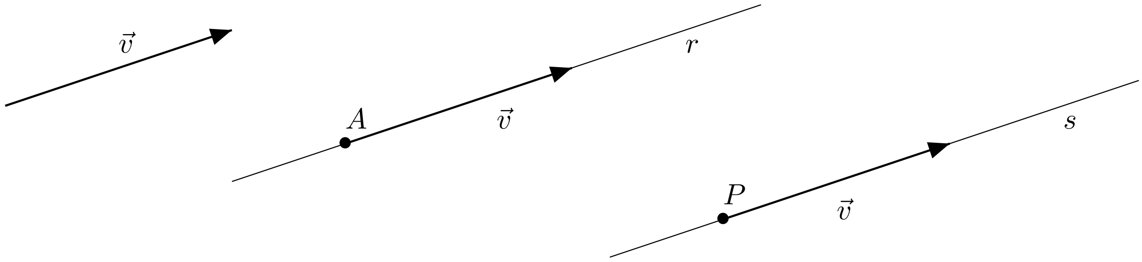
```
> with(linalg):
> with(plots):
> with(plottools): # um pacote gráfico extra
Warning, the name arrow has been redefined

> v := vector([3,-2,1]):
> A := [1,3,4]:
> B := convert(evalm(A+v),list):
> P := t -> convert(evalm(A+t*v),list):
> reta:=spacecurve((P(t)),t=-1..2, thickness=2, color=blue):
> caixaA :=cuboid([0,0,0],A, style=wireframe):
> caixav :=cuboid([0,0,0],B, style=wireframe):
> vetor := arrow(A,v,.2, .2, .2, cylindrical_arrow, color=red):
> display({reta,vetor,caixaA,caixav}, labels=[x,y,z],
        title=‘Reta por A(1,3,4) com direçao de v=(3,-2,1)‘, axes=normal);
```

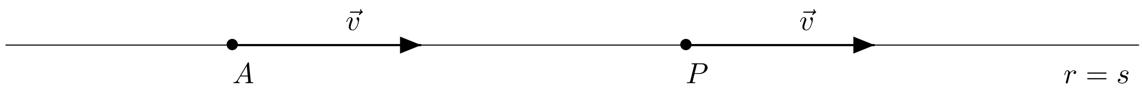
...

Dada uma reta de equação vetorial $r: \ X = A + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, se P é um ponto fora de r podemos considerar a reta s que passa pot P e tem a direção dada por $\vec{v}$, $s: \ X = P + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, s é uma *reta paralela a* r, que passa por P e não possui pontos em comum com r.



Se duas retas r e s com mesma direção de $\vec{v} \neq \vec{0}$ possuirem um ponto em comum, elas serão *coincidentes*.



Exemplos

1. *Dados* $A = (-1, 3)$ *e* $\vec{v} = (3, 7)$ *verificar se* $P = (68, 164)$ *pertence reta que passa por* A *e tem a direção de* $\vec{v}$.

   A equação da reta é $r: \ (x, y) = (-1, 3) + t(3, 7), \ t \in \mathbb{R}$.

   O ponto P pertence à reta se for possível encontrar um parâmetro t de modo que a equação vetorial $(68, 164) = (-1, 3) + t(3, 7)$ seja satisfeita.

   Logo, devemos ter $(68, 164) = (-1 + 3t, 3 + 7t)$, donde
   $$\begin{cases} 68 = -1 + 3t \implies t = \frac{68+1}{3} = 23 \\ 164 = 3 + 7t \implies t = \frac{164-3+1}{7} = 23 \end{cases}$$
   O número real $t = 23$ satisfaz o sistema de equações acima, dada pela equação vetorial. Portanto, P pertence à reta dada. Observamos que $\overrightarrow{AP} = 23\vec{v}$, isto é, $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes.

2. *Verificar que* $B = (3, 1)$ *não pertence à reta* r *do exemplo anterior e obter a equação vetorial da reta* s *que passa por* B *e é paralela a* r.

   Devemos então verificar se existe um parâmetro λ que satisfaça a equação: $(3, 1) = (-1, 3) + \lambda(3, 7)$.
   $$\begin{cases} 3 = -1 + 3\lambda \implies \lambda = \frac{3-(-1)}{3} = \frac{4}{3} \\ 1 = 3 + 7\lambda \implies \lambda = \frac{1-3}{7} = \frac{-2}{7} \end{cases} \qquad \text{Contradição!}$$
   Como não existe um parâmetro λ da equação da reta r que corresponda a B, este ponto não pertence à reta.

   A equação $s: \ (x, y) = (3, 1) + \lambda(3, 7), \ \lambda \in \mathbb{R}$ é da reta que contém B e é paralela à reta r, por possuir a mesma direção da reta r.

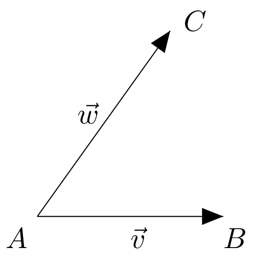
Vimos portanto que a multiplicação de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ por um escalar produz vetores $\lambda\vec{v}$ que são l.d. com $\vec{v}$.

Dizemos que dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes (l.i.) se eles não são l.d., isto é, não é possível encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaça $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{w}$.

Como consequência imediata deste conceito, se $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ for o vetor nulo, eles são l.d.

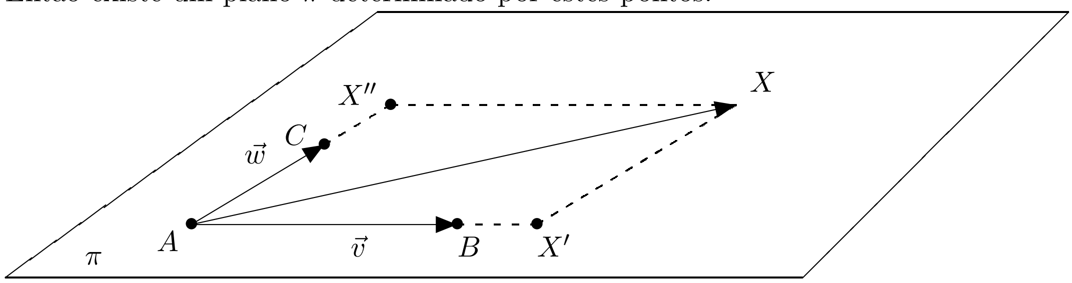
Consideremos então dois vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não sejam l.d.

Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ representados por segmentos orientados com origem em A.



Os pontos A, B e C não são colineares pois $\vec{w} \neq \lambda\vec{v}$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Então existe um plano π determinado por estes pontos.



Um ponto X deste plano determina o vetor $\overrightarrow{AX}$. Traçando por X a reta paralela à reta $r(A, B)$, o ponto de encontro desta com a reta $r(A, \vec{w})$ existe e será denotado por X''. Analogamente, traçando por X a reta paralela à reta $r(A, C)$, esta encontra a reta $r(A, \vec{v})$ no ponto X'. Confira na figura.

Pela regra do paralelogramo, vemos que $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AX'} + \overrightarrow{AX''}$. Como X' é um ponto da reta $r(A, \vec{v})$ e X'' é um ponto da reta $r(A, \vec{w})$, existem escalares λ e μ que satisfazem a *equação vetorial*

$$\pi : \ X = A + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \text{ onde } \lambda \text{ e } \mu \text{ são parâmetros reais.}$$

.

Quando escrevemos $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, estamos dizendo que o vetor $\overrightarrow{AX}$ é uma *combinação linear* de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, com coeficientes λ e μ.

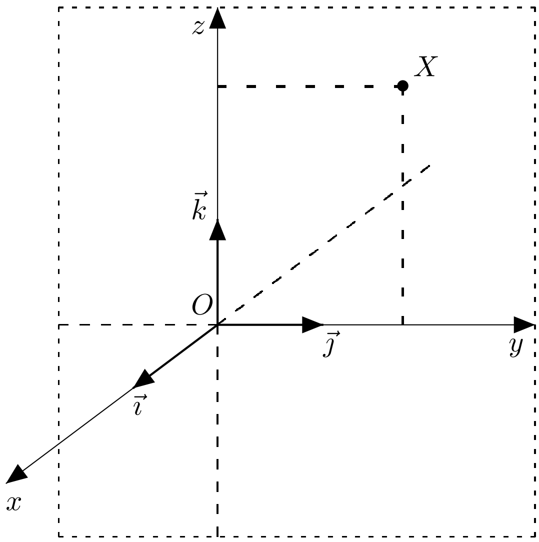
Em coordenadas, temos a seguinte situação: se $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (a, b, c)$, $\vec{w} = (d, e, f)$ com $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ l.i., então $X = (x, y, z)$ pertence ao plano que passa por A e tem a direção dos vetores l.i. $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ quando $\overrightarrow{AX} = X - A$ é uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, isto é,

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = \lambda(a, b, c) + \mu(d, e, f), \text{ para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que $\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu d \\ y = y_0 + \lambda b + \mu e \\ z = z_0 + \lambda c + \mu f \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ são as *equações paramétricas* do plano π, com parâmetros λ e μ.

Exemplo

- A equação vetorial do plano coordenado yz no espaço cartesiano pode ser dada por $X = (x, y, z) = (0, y, z) = (0, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, $y, z \in \mathbb{R}$,



pois o plano coordenado yz passa pela origem $O = (0, 0, 0)$ e é gerado pelos vetores $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Observe que as próprias coordenadas y e z são os parâmetros desta equação. Observe também que podemos escrever as equações paramétricas deste plano como:

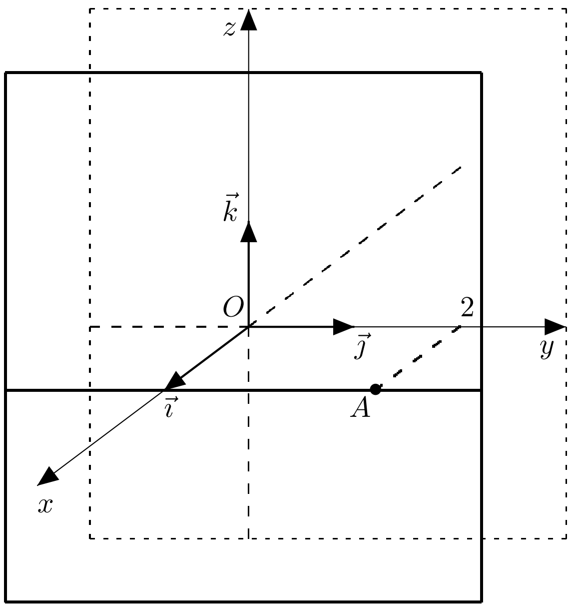
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 1y + 0z \\ z = 0 + 0y + 1z \end{cases}, \; y, z \in \mathbb{R}.$$

Como exercício, descreva os demais planos coordenados de $\mathbb{R}^3$, os planos xy e xz.

A equação de um plano que passa pelo ponto $A = (1, 2, 0)$ e é paralelo ao plano yz é portanto dada por:

$$\pi: \; X = A + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

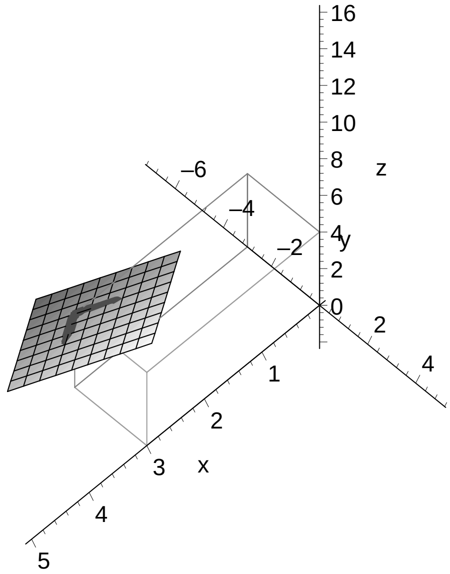
$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



Parametricamente,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad , y, z \in \mathbb{R}.$$

- Mais geralmente, vamos apresentar um desenho obtido no Maple de plano passando por um ponto $A = (x_0, y), z_0)$ e direção dada pelos vetores $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$, e os comandos para sua obtenção.



Comandos no Maple

```
> restart; # limpa memória

> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

> with(plots): with(plottools):

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined


> A := [3,-3,4]:

> v := vector([0,2,3]):  w := vector([1,2,3]):

> P := (t,s) -> convert(evalm(A+t*v+s*w),list):

> plano:= plot3d(P(t,s),t=-1..2,s=-1..2,grid=[10,10]):

> caixaA := cuboid([0,0,0],A, style=wireframe):

> vetorv := arrow(A,v,.2, .2, .2, cylindrical_arrow, color=red):

> vetorw := arrow(A,w,.2, .2, .2, cylindrical_arrow, color=red):

> display({plano,caixaA,vetorv,vetorw}, labels=[x,y,z], axes=normal);
```

...

Apresentaremos a seguir algumas definições que precisamos ter em mente, quando trabalhamos com vetores, sobre dependência e independência linear, algumas reescritas:

1. *Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes (l.d.) se existem escalares x e y <u>não ambos nulos</u> que satisfazem $x\vec{v} + y\vec{w} = \vec{0}$.*

   OBSERVAÇÃO 1: É imediato ver que se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d., então existe um escalar λ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{w}$.

   OBSERVAÇÃO 2: Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d. se, e só se, A,B e C são colineares (estão sobre uma mesma reta).

2. *Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes (l.i.) se uma combinação linear nula $x\vec{v} + y\vec{w} = \vec{0}$ só é possível para $x = y = 0$.*

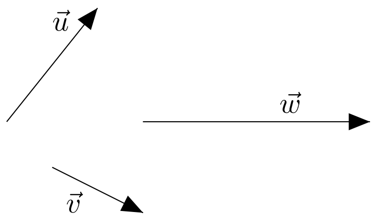
   OBSERVAÇÃO 1: Se $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ for nulo então eles não podem ser l.i.

   OBSERVAÇÃO 2: Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ são l.i., então A, B e C determinam um plano.

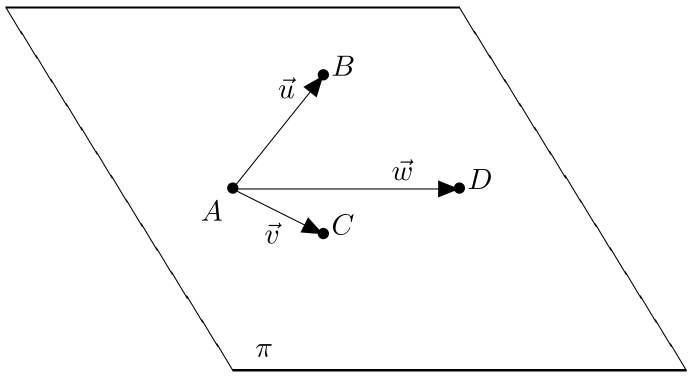
3. *Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes (l.d.) se existem escalares <u>não todos nulos</u> x, y e z que satisfazem $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.*

   OBSERVAÇÃO 1: Se um dos vetores for nulo, então o conjunto de vetores é l.d. Por exemplo, se $\vec{u} = \vec{0}$, temos $1\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$, já que $1\vec{u} = 1\vec{0} = \vec{0}$.

   OBSERVAÇÃO 2: Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i. e $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.d. então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Já vimos que se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ forem l.i. podemos considerar o plano que passa por A e é gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Dizer que $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ significa que o ponto $D = A + \vec{w}$ pertence ao plano considerado.



vetores livres l.d.



Por isso dizemos que <u>três</u> vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d. quando são <u>coplanares</u>.

4. *Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes (l.i.) se uma combinação linear $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ for possível somente quando $x = y = z = 0$.*

   OBSERVAÇÃO: Neste caso, nenhum dos vetores pode ser nulo e os segmentos orientados que representam os vetores <u>não são coplanares</u>.

É óbvio que no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ três vetores são sempre l.d., pois já estão contidos no plano. Esntão existem no máximo <u>dois</u> vetores linearmente independentes no plano.

Por exemplo, $\vec{\imath} = (1, 0)$ e $\vec{\jmath} = (0, 1)$ são respectivamente <u>vetores unitários</u> nos sentidos positivos dos eixos Ox e Oy.

Temos que qualquer vetor $\vec{v} = (a, b)$ do plano se escreve como $\vec{v} = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, isto é, como uma combinação linear de $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$. É fácil de ver que $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ é um conjunto l.i. pois $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \vec{0} \Longleftrightarrow x(1, 0) + y(0, 1) = (0, 0) \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow x = y = 0$

Dizemos que $\mathcal{C}$ é a *base canônica* de $\mathbb{R}^2$.

Em geral $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ l.i. no plano $\mathbb{R}^2$ é uma *base* de $\mathbb{R}^2$, sendo que qualquer vetor $\vec{w}$ se escreve de maneira única como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo: *Mostrar que $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (3, 5)$ são l.i. e escrever $\vec{w} = (1, -1)$ como uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

$$x(2,1)+y(3,5)=(0,0) \iff \begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+5y=0 \end{cases} \overset{\star}{\iff} x=y=0$$

Logo, $\{\vec{u},\vec{v}\}$ é l.i. e é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Agora,

$$\vec{w}=(1,-1)=\alpha(2,1)+\beta(3,5) \iff \begin{cases} 2\alpha+3\beta=1 \\ \alpha+5\beta=-1 \end{cases}$$

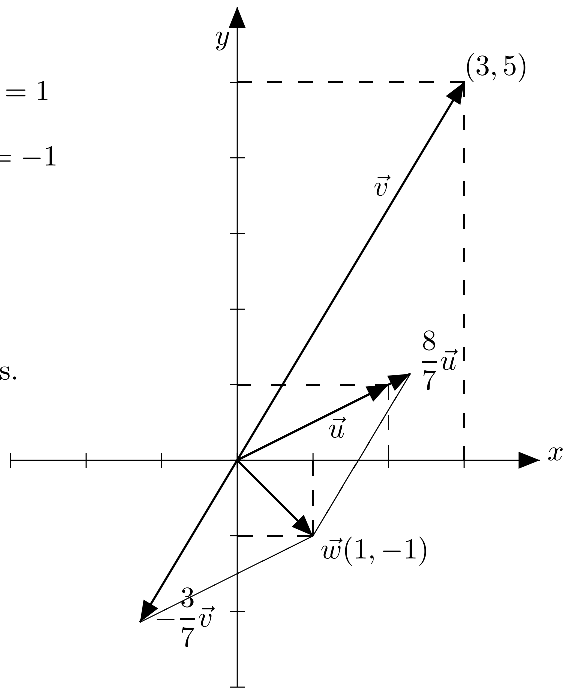
$$\overset{\star}{\iff} \alpha=\frac{8}{7}, \beta=-\frac{3}{7}$$

Logo $\vec{w}=\dfrac{8}{7}u-\dfrac{3}{7}\vec{v}$.

($\star$) Exercício: resolva por Eliminação de Gauss.

Geometricamente, temos a figura ao lado.

Observe a regra do paralelogramo.



Na mesma linha de raciocínio, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, quatro vetores são sempre contidos no próprio espaço, onde existem <u>no máximo</u> três vetores l.i. **Exemplo:** $\vec{\imath}=(1,0,0)$, $\vec{\jmath}=(0,1,0)$ e $\vec{k}=(0,0,1)$ são respectivamente os vetores unitários no sentido positivo dos eixos cartesianos Ox, Oy e Oz. O conjunto $\mathcal{C}=\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ é claramente l.i. e a grande vantagem é que qualquer vetor $\vec{v}=(x,y,z)$ do espaço se escreve como combinação linear dos vetores de $\mathcal{C}$ de forma natural: $\vec{v}=(x,y,z)=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, onde os coeficientes da combinação linear são exatamente as coordenadas de $\vec{v}$.

Dizemos que $\mathcal{C}=\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ é a *base canônica* de $\mathbb{R}^3$. Em geral, um conjunto de três vetores $\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ no espaço $\mathbb{R}^3$ é chamado *base* se for um conjunto <u>l.i.</u> e, neste caso, dado um vetor $\vec{t}$ qualquer no espaço, podemos encontrar escalares a, b e c tais que $\vec{t}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$

Quando os vetores são dados em coordenadas, temos o problema de saber quando eles são <u>l.i.</u> ou <u>l.d.</u> e como calcular os coeficientes de uma combinação linear de um vetor $\vec{t}$ numa base $\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

que não seja a canônica. Temos também muitos outros problemas de caráter geométrico que as técnicas algébricas de geometria analítica permitem resolver. No próximo capítulo vamos estudar um destes métodos.

Antes, fazemos um parêntesis sobre o conceito de *versor*.

Def: Dado um vetor não nulo $\vec{v}$, o versor de $\vec{v}$ é o vetor unitário (módulo 1) na direção e sentido de $\vec{v}$

Um vetor $\vec{v}$ não nulo tem módulo $|\vec{v}| \neq 0$.

Um vetor que tenha a mesma direção e mesmo sentido de v é um vetor da forma $\lambda\vec{v}$ com $\lambda > 0$. Assim, procuramos um vetor da forma $\lambda\vec{v}$ tal que $|\lambda\vec{v}| = 1$, para ser unitário.

Logo, $|\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}| = 1$, $\lambda > 0$ donde $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{v}|}$.

O versor de v é portanto o vetor $\dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Observação 1: Dado qualquer $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos que $\vec{v} = |\vec{v}| \times versor(\vec{v})$.

Observação 2: Os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$ e também da base canônica de $\mathbb{R}^3$ são versores dos eixos cartesianos no sentido positivo.