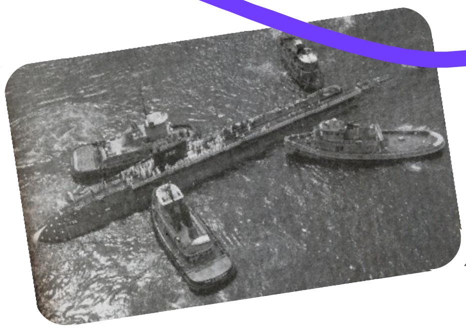
Universidade Federal de Alagoas
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo
Curso de Arquitetura e Urbanismo

Disciplina: Fundamentos para a Análise Estrutural
Código: AURB006 **Turma:** A **Período Letivo:** 2007-2
Professor: Eduardo Nobre Lages

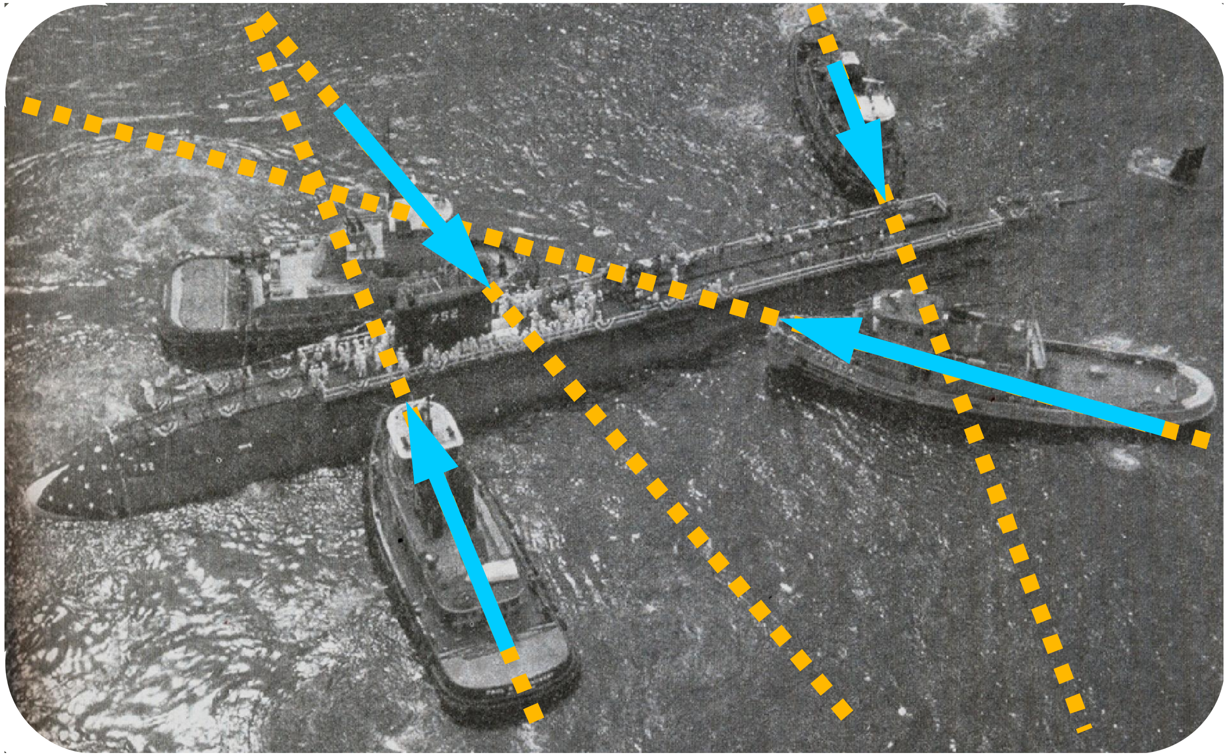
Equilíbrio dos Corpos Rígidos



Maceió/AL

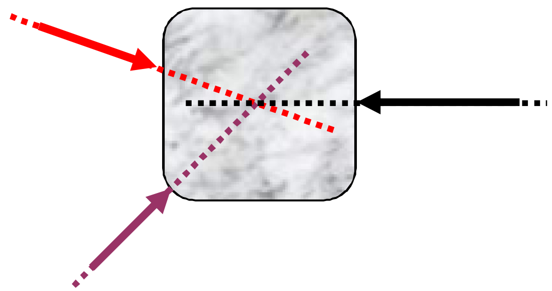
Objetivo

Estudo do efeito de sistemas de forças não concorrentes.

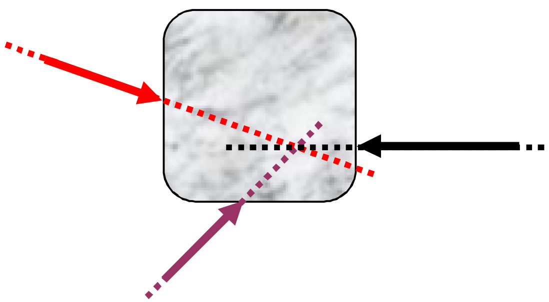


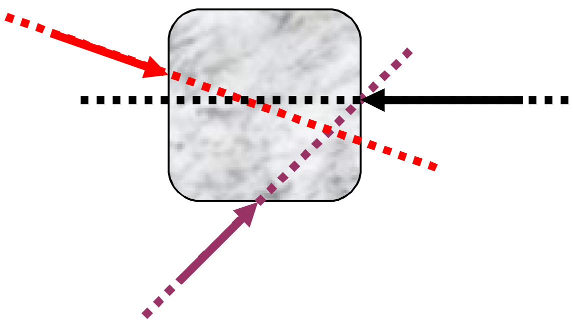
Forças Concorrentes e Não Concorrentes

- Forças concorrentes centradas
  - Podem induzir apenas a translações



- Forças não concorrentes e concorrentes não centradas
  - Podem induzir a translações e/ou rotações

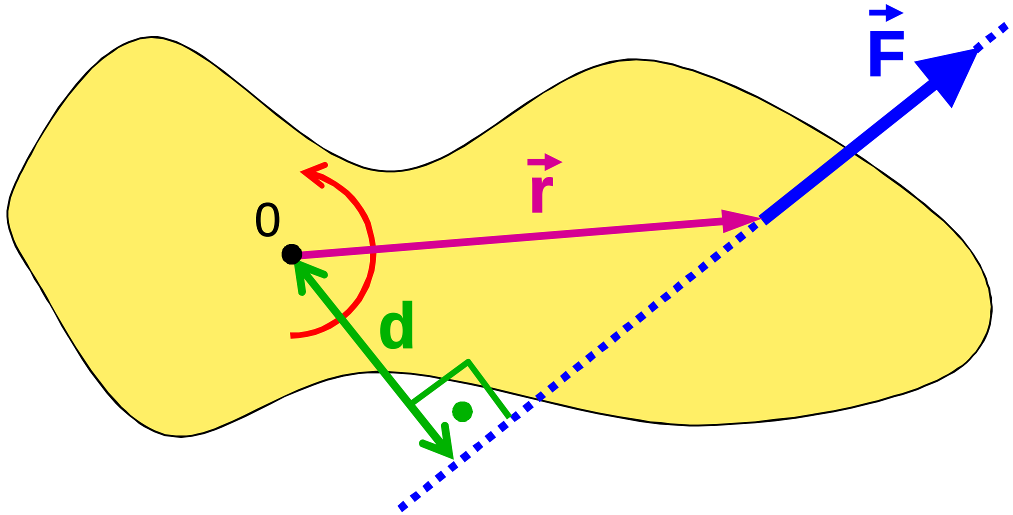




Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Momento de uma Força em Relação a um Ponto

Uma <u>força</u> aplicada num corpo cria, em relação a um <u>ponto de referência</u>, uma <u>tendência de giro</u> em torno de um eixo perpendicular ao plano formado pelo <u>vetor raio</u> e o vetor força.



Essa tendência de giro é associada a um vetor momento, na direção e sentido da tendência de giro, cuja intensidade é dada por

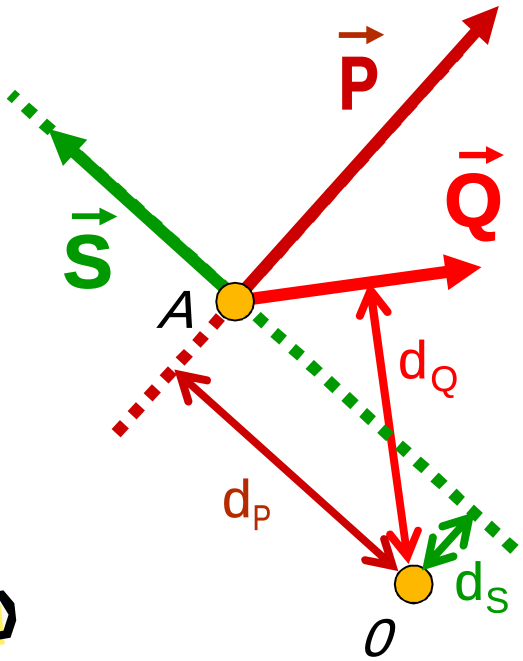
$$M = F\,d$$

onde F é a intensidade da força e d é o braço de alavanca (distância do ponto de referência à linha de ação da força).

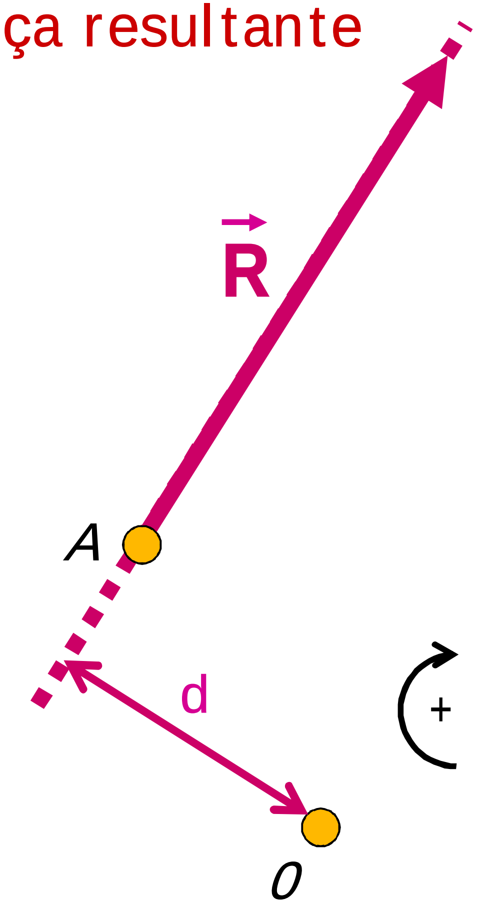
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Teorema de Varignon

O momento gerado por um sistema de forças concorrentes pode ser calculado somando-se os momentos de cada força ou avaliando-se o momento da força resultante equivalente.



$$M = P\, d_P + Q\, d_Q - S\, d_S$$

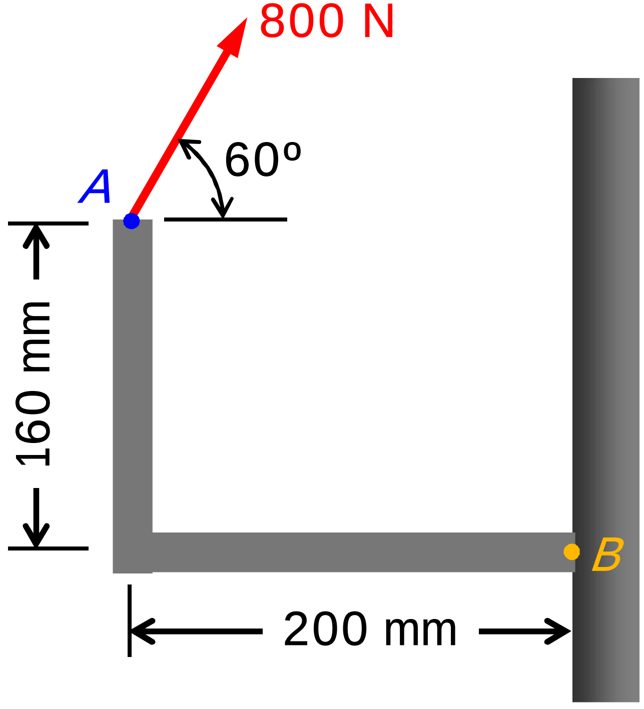


$$M = R\, d$$

Teorema de Varignon

Exemplo:

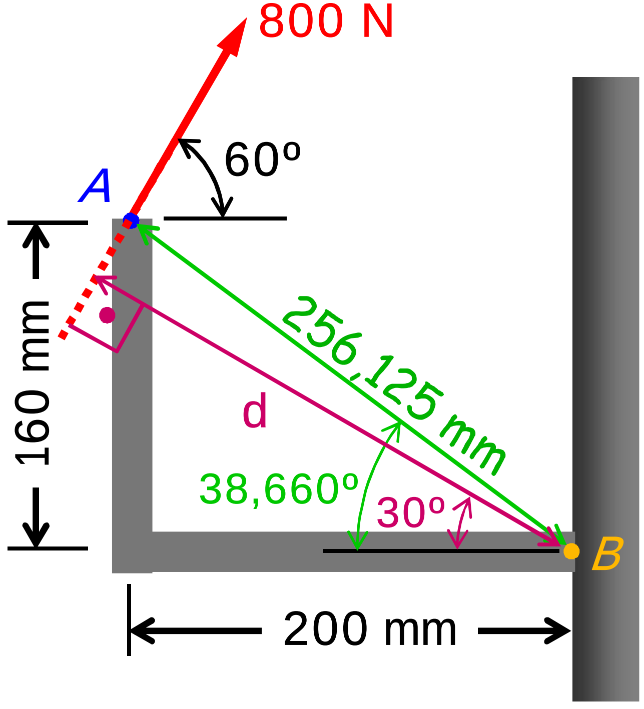
Uma força de 800 N atua sobre um suporte, conforme mostra a ilustração abaixo. Determine o momento da força em relação ao ponto *B*.



Teorema de Varignon

Exemplo (continuação):

1ª estratégia – uso direto da definição



$$M = 800 \cdot d$$

$$d = 256{,}125 \cdot \cos 8{,}660^{\circ}$$

$$d = 253{,}205 \text{ mm}$$

$$M = 800 \cdot 253{,}205$$

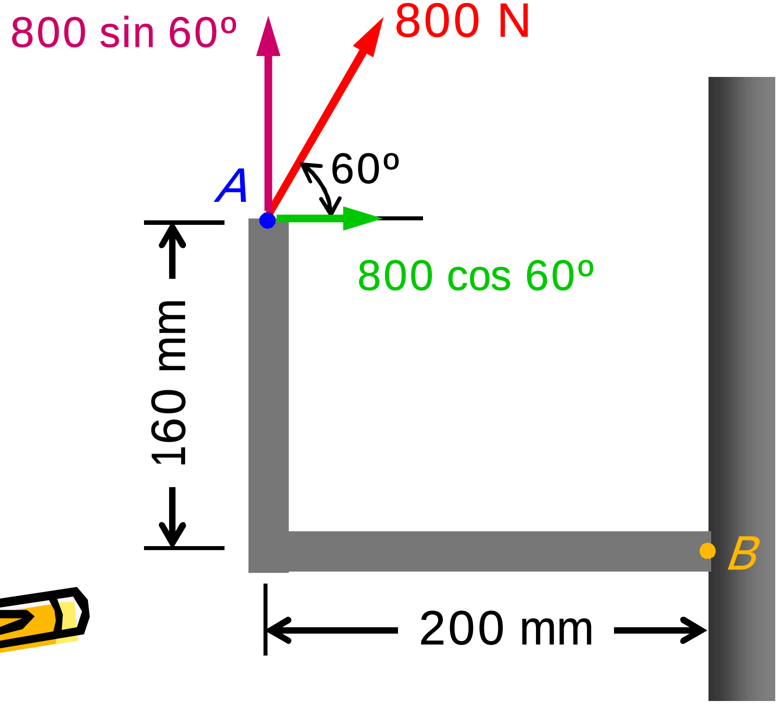
$$\boxed{M = 202564 \text{ N} \cdot \text{mm}}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Teorema de Varignon

Exemplo (continuação):

2ª estratégia – uso do Teorema de Varignon



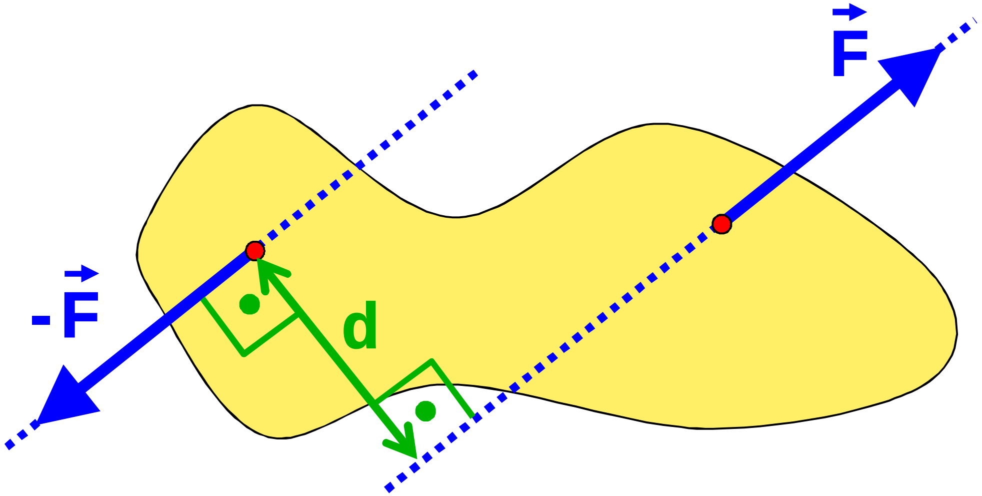
$$\circlearrowleft + \quad M = 800 \cdot \cos 60^{\circ} \cdot 160 + 800 \cdot \sin 60^{\circ} \cdot 200$$

$$\boxed{M = 202564 \text{ N} \cdot \text{mm}} \circlearrowright$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

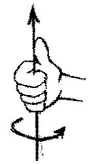
Binário

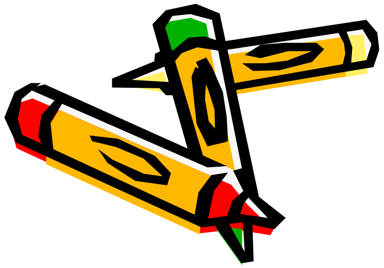
<u>Definição</u>: Sistema particular de duas forças de mesma intensidade, linhas de ação paralelas e sentidos opostos.



As duas forças não irão transladar o corpo sobre o qual atuam, mas tenderão a fazê-lo girar.

O vetor momento representativo da tendência de giro é perpendicular ao plano das forças (regra da mão direita).





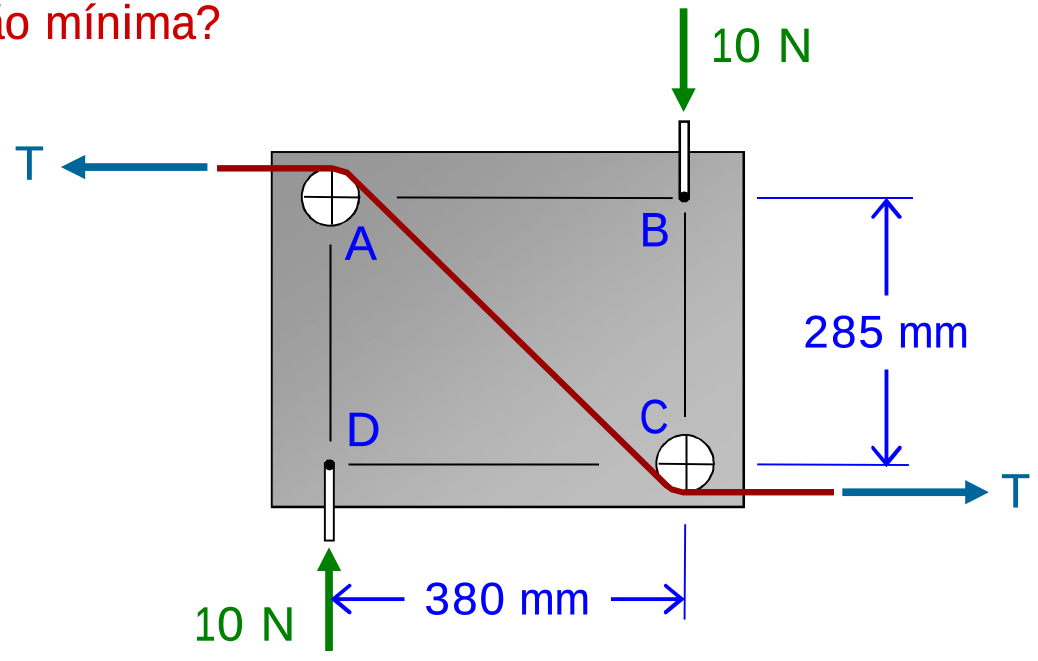
A intensidade do momento, independente do ponto de referência, é dada pelo produto da intensidade da força pelo braço de alavanca, ou seja, $M = F \cdot d$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Binário

Exemplo:

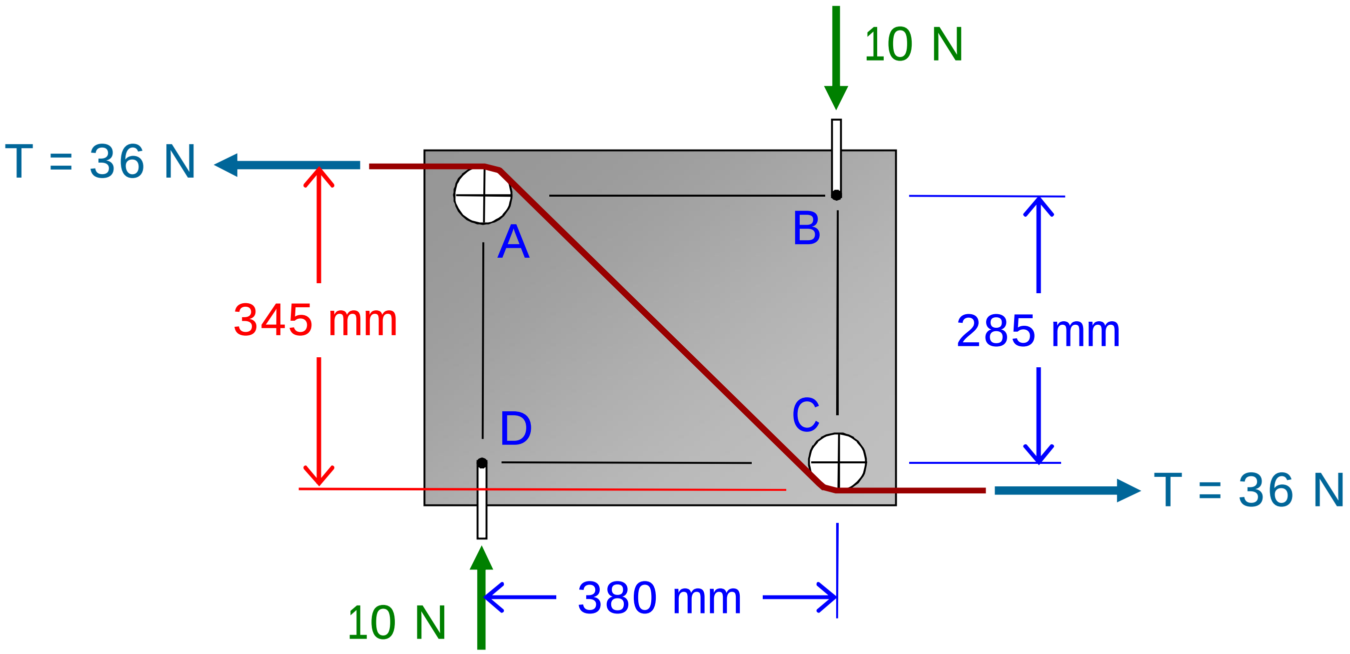
Duas cavilhas de 60 mm de diâmetro são montadas sobre uma placa de aço em A e C e duas barras são presas à placa em B e D. Uma corda é passada em torno das cavilhas, enquanto as barras exercem forças de 10 N sobre a placa. (a) Determine o binário resultante que atua sobre a placa quando T = 36 N. (b) Se apenas a corda for usada, em que direção ela deverá ser puxada para se criar o mesmo binário com a mínima tração na corda? Qual o valor da tração mínima?



Binário

<u>Exemplo</u> (continuação):

(a)



$$+\ M = 10 \cdot 380 - 36 \cdot 345 = -8620\ \text{N} \cdot \text{mm}$$

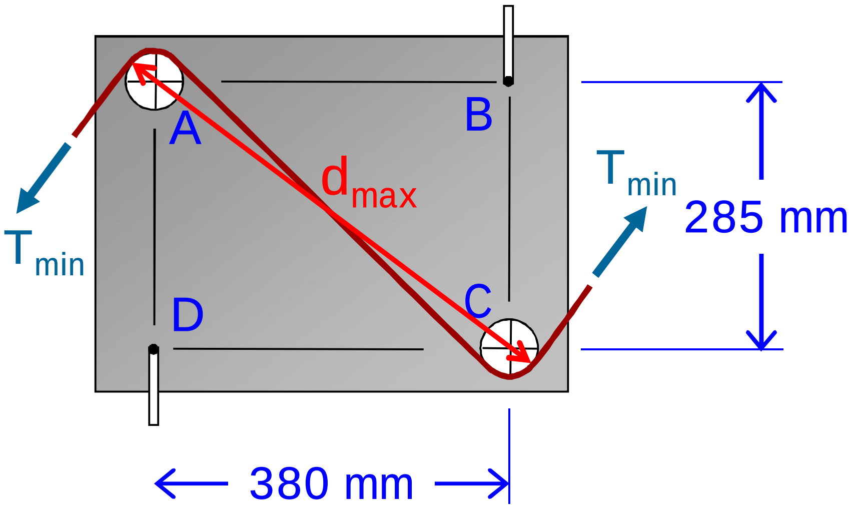
$$\boxed{M = 8620\ \text{N} \cdot \text{mm}}$$

Binário

Exemplo (continuação):

(b) M = 8620 N · mm

Sabe-se que a intensidade do momento gerado por um binário é dada pelo produto da intensidade da força que forma o binário pelo braço de alavanca. Como se deseja minimizar a força, deve-se maximizar o braço de alavanca.



$$M = T_{min} \cdot d_{max}$$

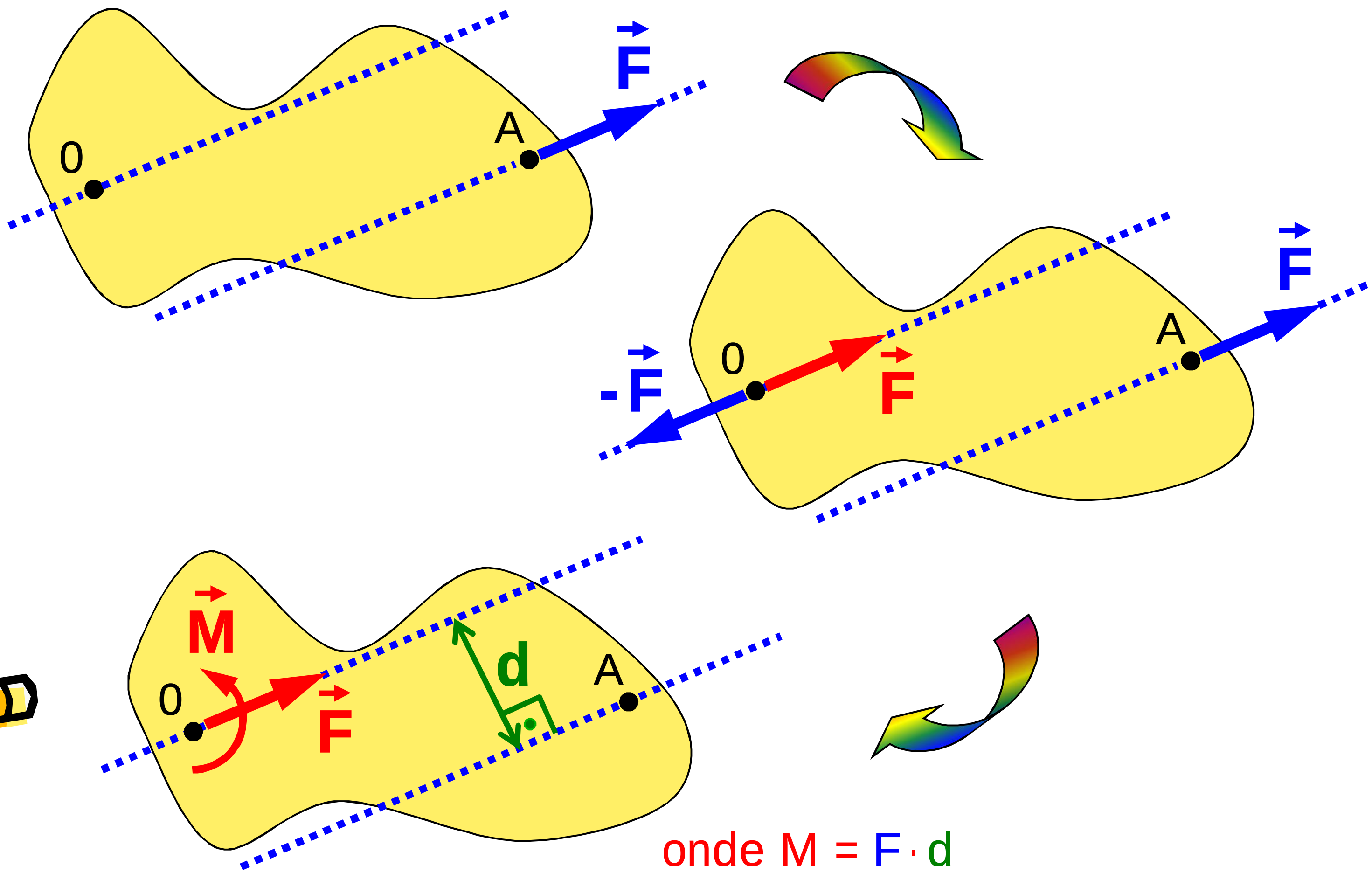
$$d_{max} = \sqrt{380^2 + 285^2} + 60 = 535\ \text{mm}$$

$$T_{min} = \frac{8620}{535} \Rightarrow \boxed{T_{min} = 16{,}1\ \text{N}}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Substituição de uma Força por uma Força e um Binário

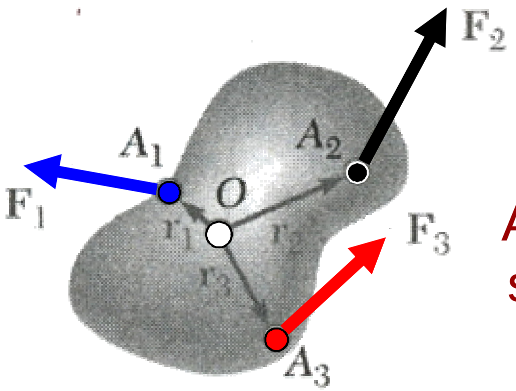
<u>Motivação</u>: Como modificar a linha de ação de uma força mantendo os mesmos efeitos sobre o corpo em que atua?



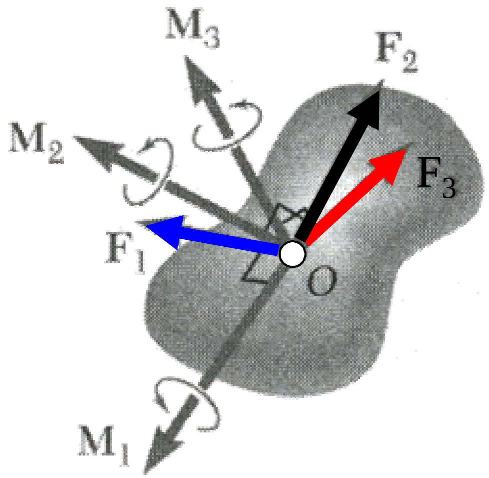
onde $M = F \cdot d$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

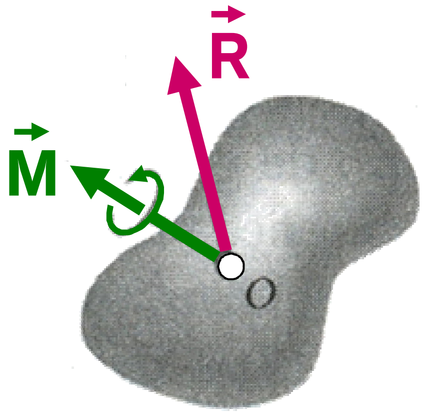
Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário



A estratégia anterior pode ser aplicada com cada uma das forças do sistema original, tendo como referência o mesmo ponto O.



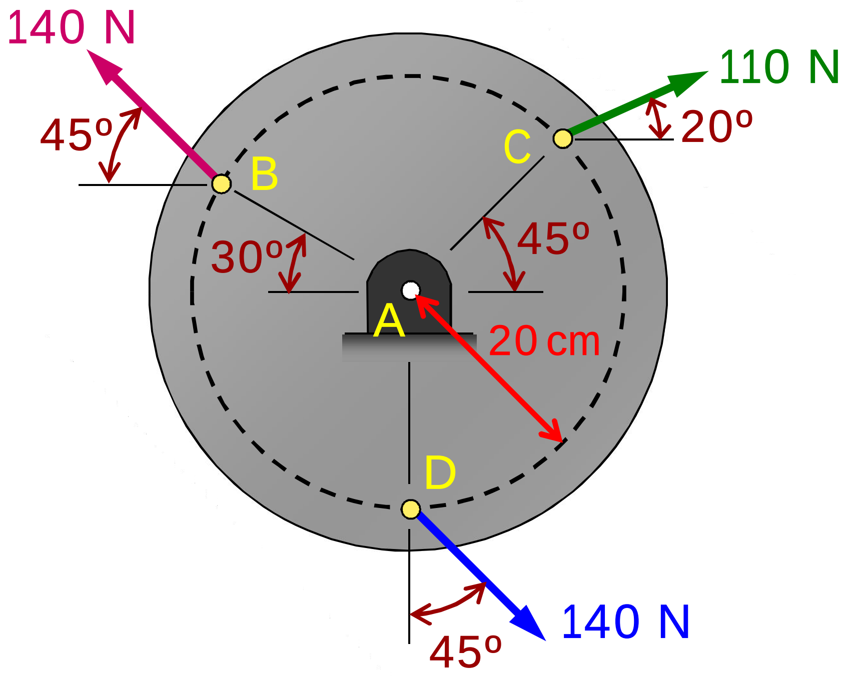
Após isso, combinam-se as forças e os vetores momentos originários dos binários, chegando-se ao sistema resultante equivalente com uma única força e um único vetor momento.



Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo:

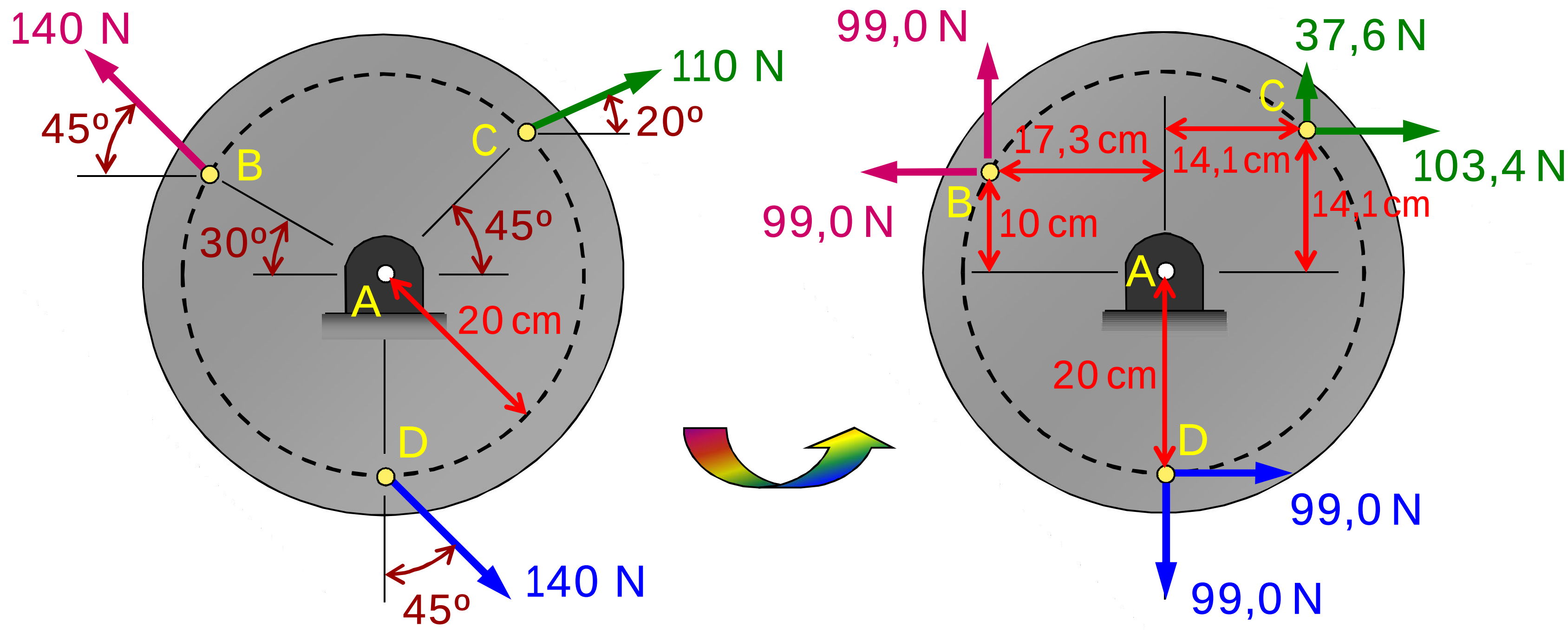
Três cabos presos a um disco exercem sobre o disco as forças mostradas. Substitua as três forças por um sistema força-binário equivalente em A.

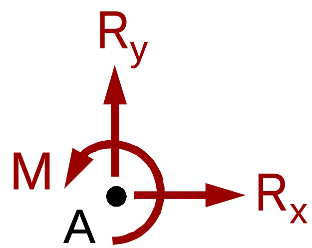


Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo (continuação):





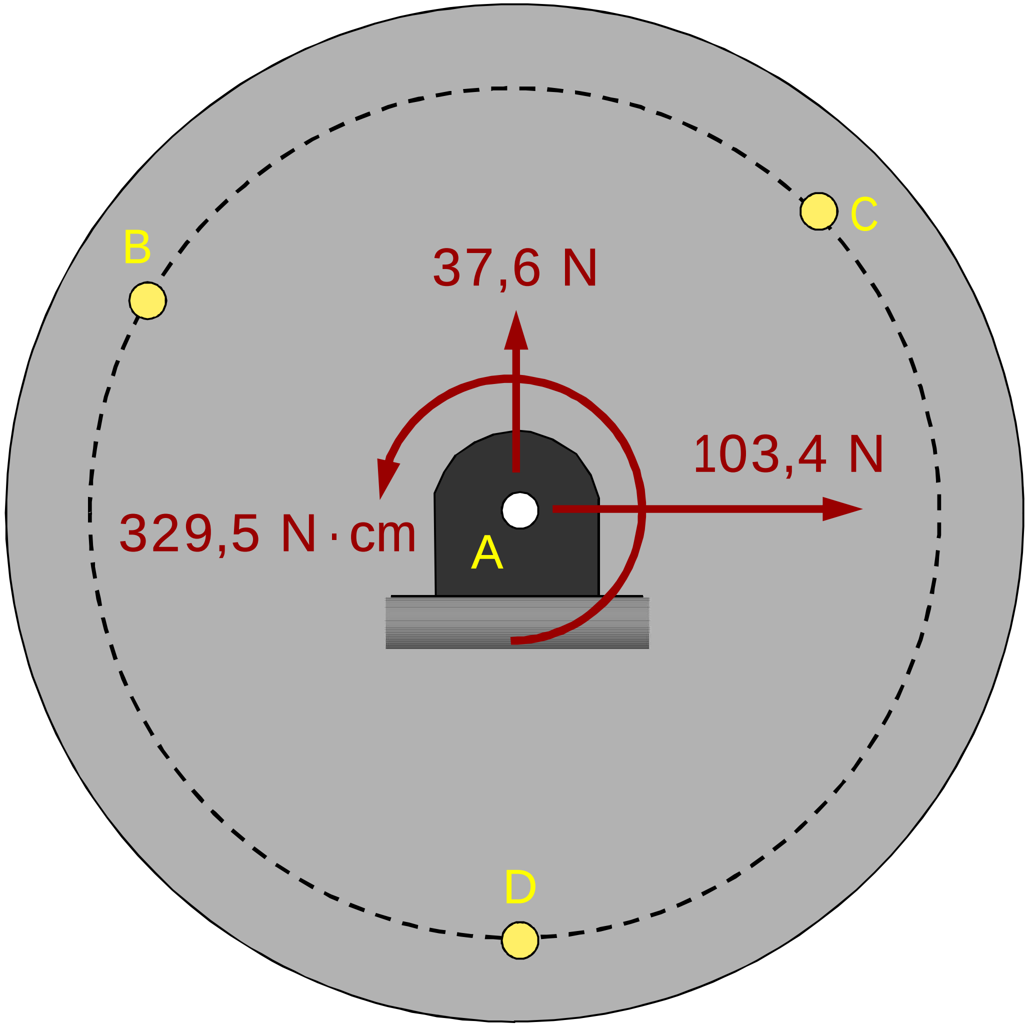
$R_x = 99{,}0 + 103{,}4 - 99{,}0 = 103{,}4\ \text{N}$

$R_y = -\ 99{,}0 + 37{,}6 + 99{,}0 = 37{,}6\ \text{N}$

$M = 99{,}0 \cdot 20 - 103{,}4 \cdot 14{,}1 + 37{,}6 \cdot 14{,}1 + 99{,}0 \cdot 10 - 99{,}0 \cdot 17{,}3 = 329{,}5\ \text{N} \cdot \text{cm}$

Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo (continuação):



Equilíbrio de um Corpo Rígido

Quando o sistema força-binário equivalente de todas as ações atuantes no corpo, em relação a qualquer ponto de referência, é nulo, o corpo está em equilíbrio.

Para um corpo em equilíbrio, o sistema de forças não causa qualquer movimento translacional ou rotacional ao corpo considerado.

Algebricamente o equilíbrio corresponde a

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{M}} = \vec{0}$$

que em termos dos componentes retangulares, para problemas bidimensionais, pode ser expresso como

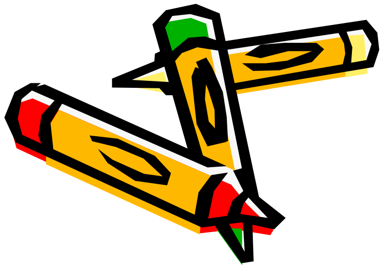
$$R_x = 0,\ R_y = 0 \ \text{ e } \ M_z = 0$$

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

A maioria dos problemas que tratam do equilíbrio de um corpo rígido se enquadra em duas categorias:

- **Verificação**: quando **todas** as forças que atuam no corpo rígido são conhecidas e se deseja saber se a condição de equilíbrio é ou não atendida.

- **Imposição**: quando **algumas** das forças que atuam no corpo rígido são desconhecidas, normalmente as reações de apoio, e se deseja saber quem são essas forças desconhecidas que garantem a condição de equilíbrio.



Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Para identificação da situação física real do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como *diagrama espacial*.

Alguns problemas podem ser estabelecidos:

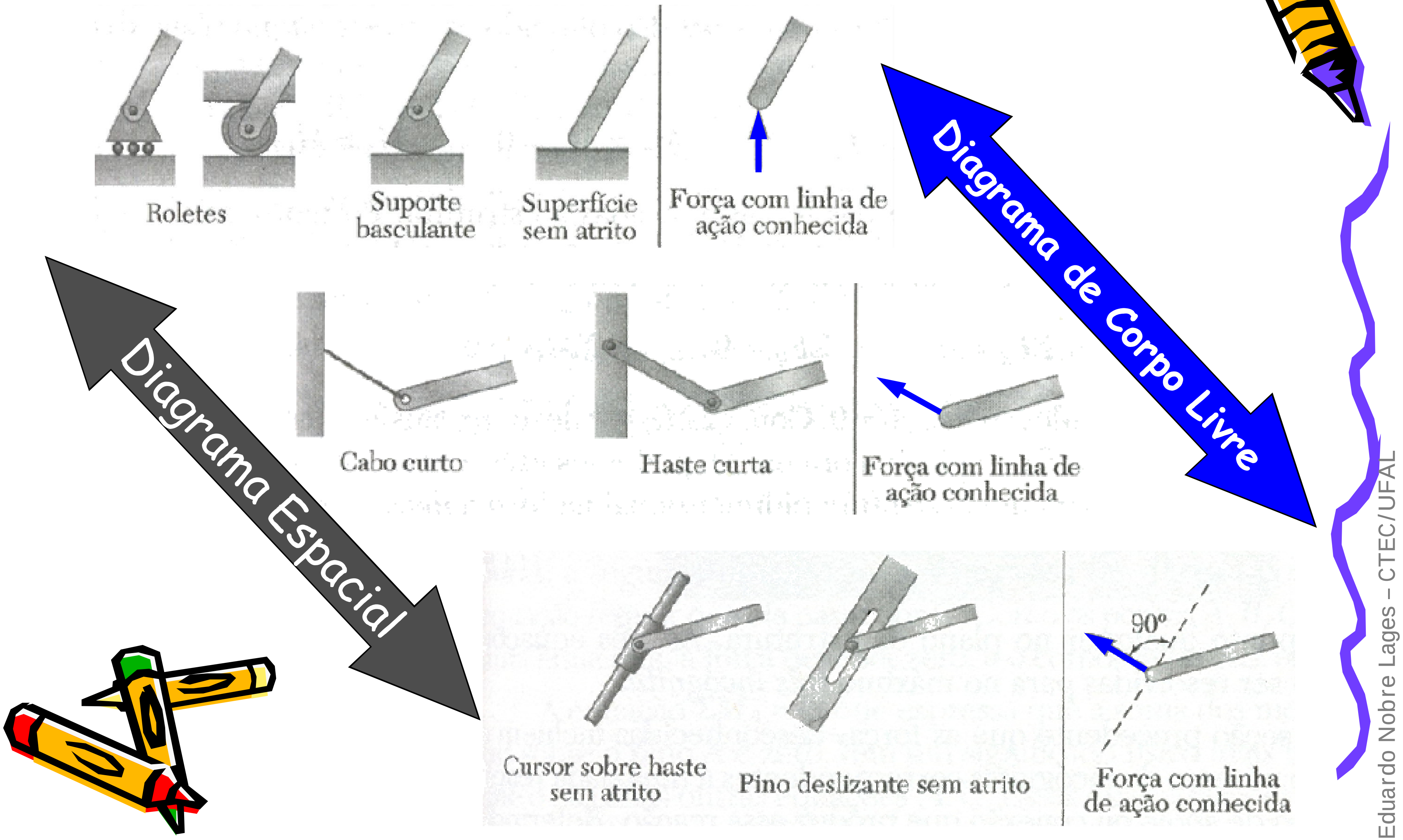
- Quão resistentes devem ser os pilares?
- Quão resistente deve ser a viga?

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

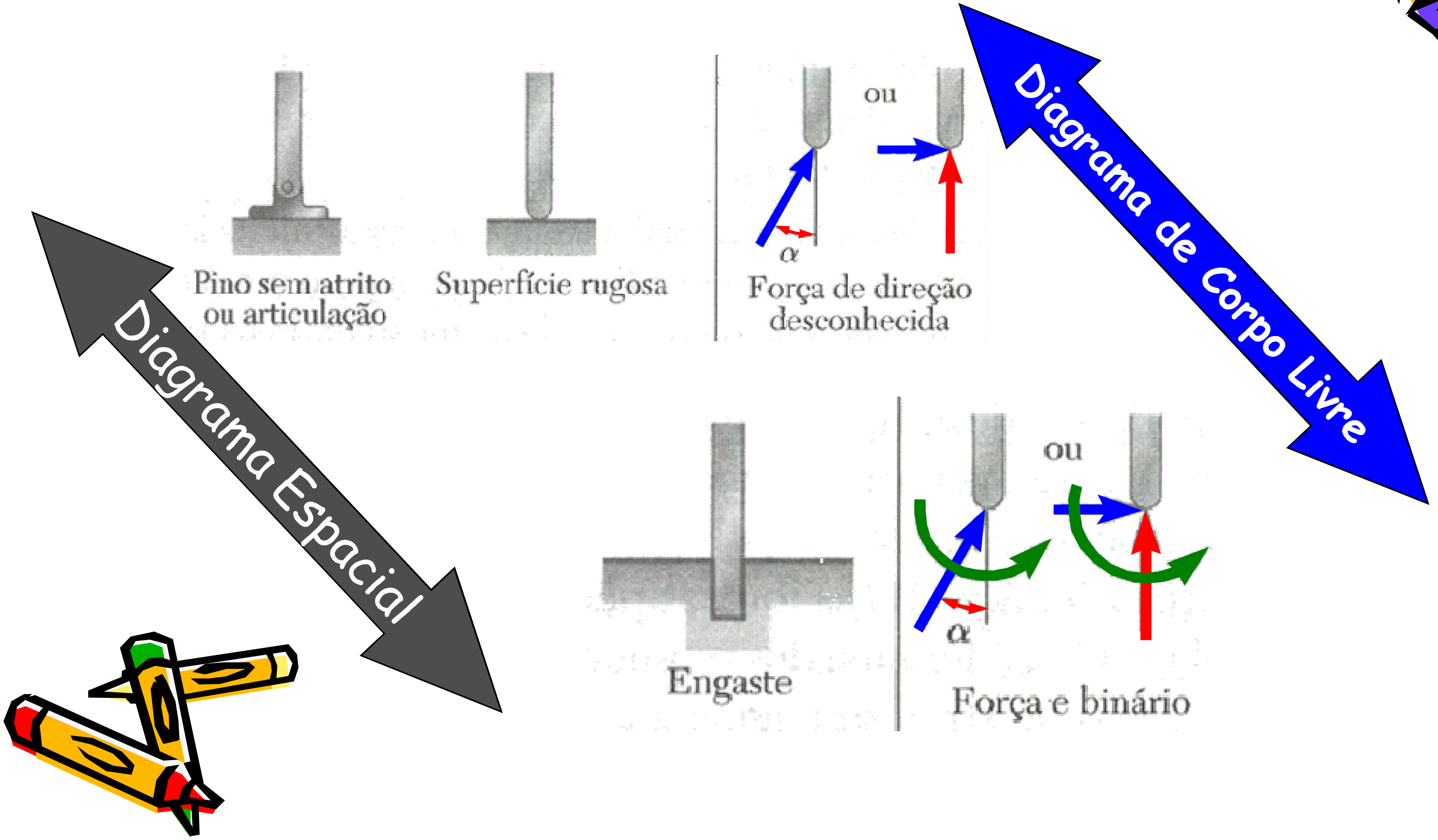
Para os problemas que envolvem o equilíbrio de um corpo rígido, escolhe-se uma porção SIGNIFICATIVA e traça-se um diagrama separado, denominado de ***diagrama de corpo livre***, mostrando essa porção, todas as forças que atuam sobre ela e as cotas (necessárias no cálculo dos momentos das forças).

Reações de Apoio



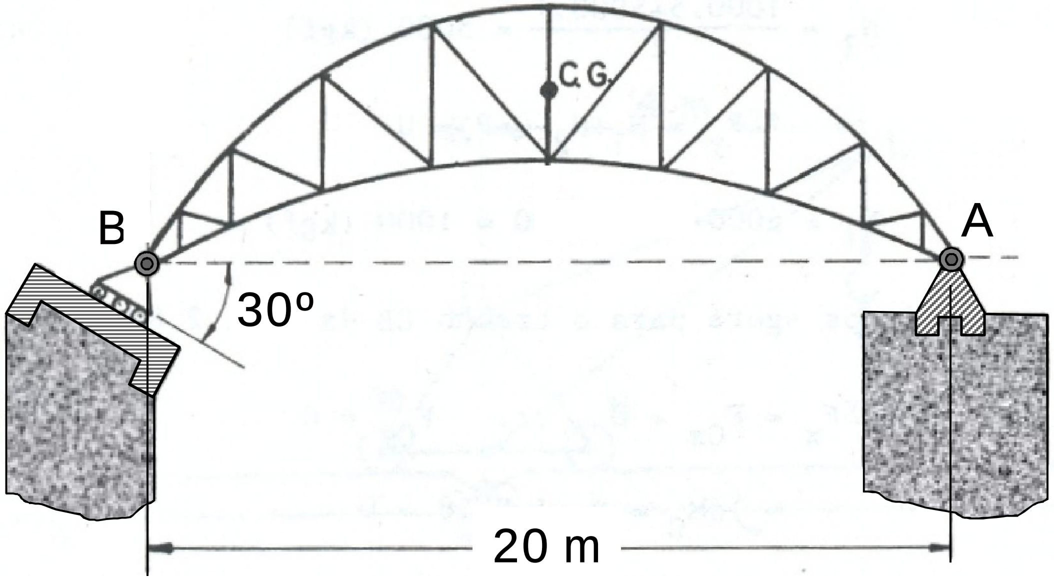
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Reações de Apoio



Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo:



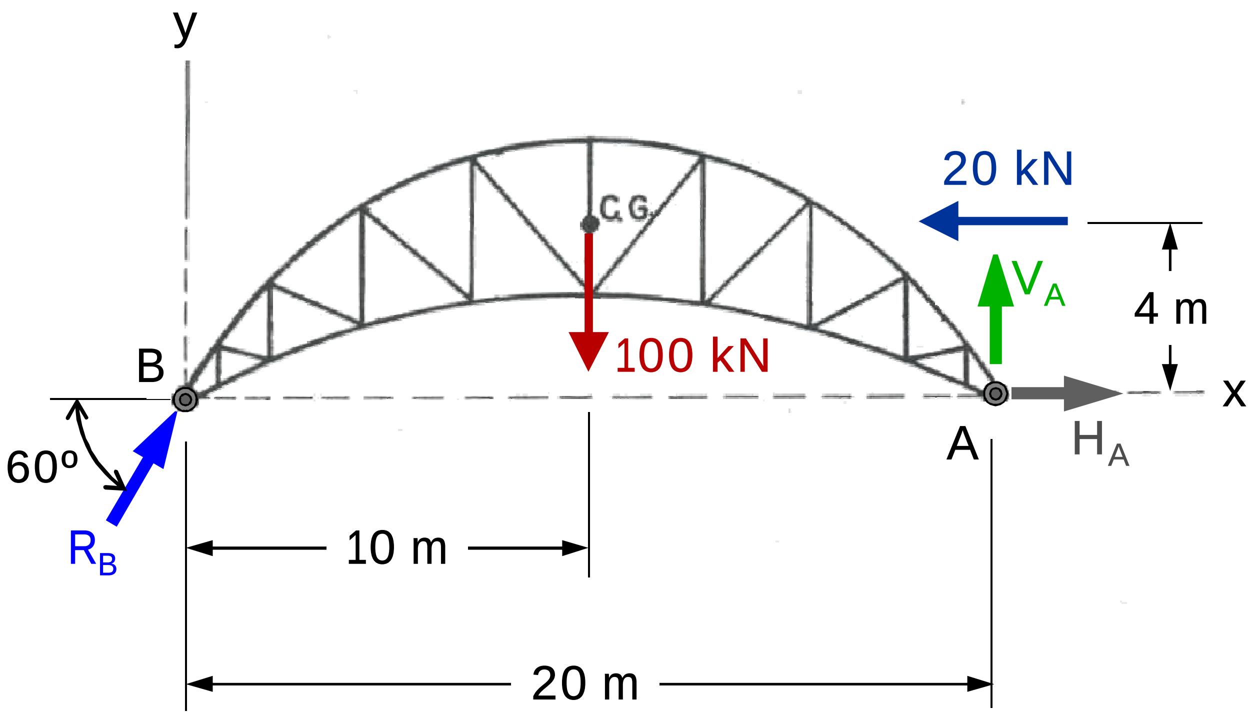
Uma estrutura em arco treliçado é fixa ao suporte articulado no ponto A, e sobre roletes em B num plano de 30º com a horizontal. O vão AB mede 20 m. O peso próprio da estrutura é de 100 kN. A força resultante dos ventos é de 20 kN, e situa-se a 4 m acima de A, horizontalmente, da direita para a esquerda. Determine as reações nos suportes A e B.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

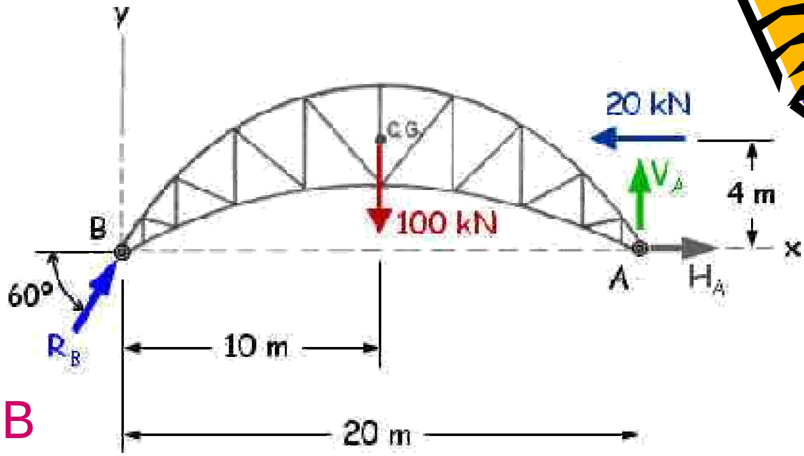
Diagrama de Corpo Livre



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

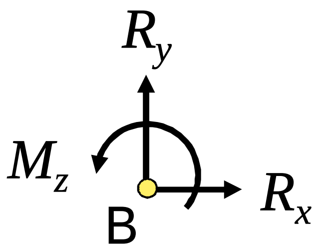


Imposição do Equilíbrio no Ponto B

$$R_x = 0 \therefore R_B \cos 60^o + H_A - 20 = 0$$

$$R_y = 0 \therefore R_B \sin 60^o - 100 + V_A = 0$$

$$M_z = 0 \therefore -100 \cdot 10 + V_A \cdot 20 + 20 \cdot 4 = 0$$



$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot R_B + H_A = 20 \\ 0{,}866 \cdot R_B + V_A = 100 \\ 20 \cdot V_A = 920 \end{cases}$$

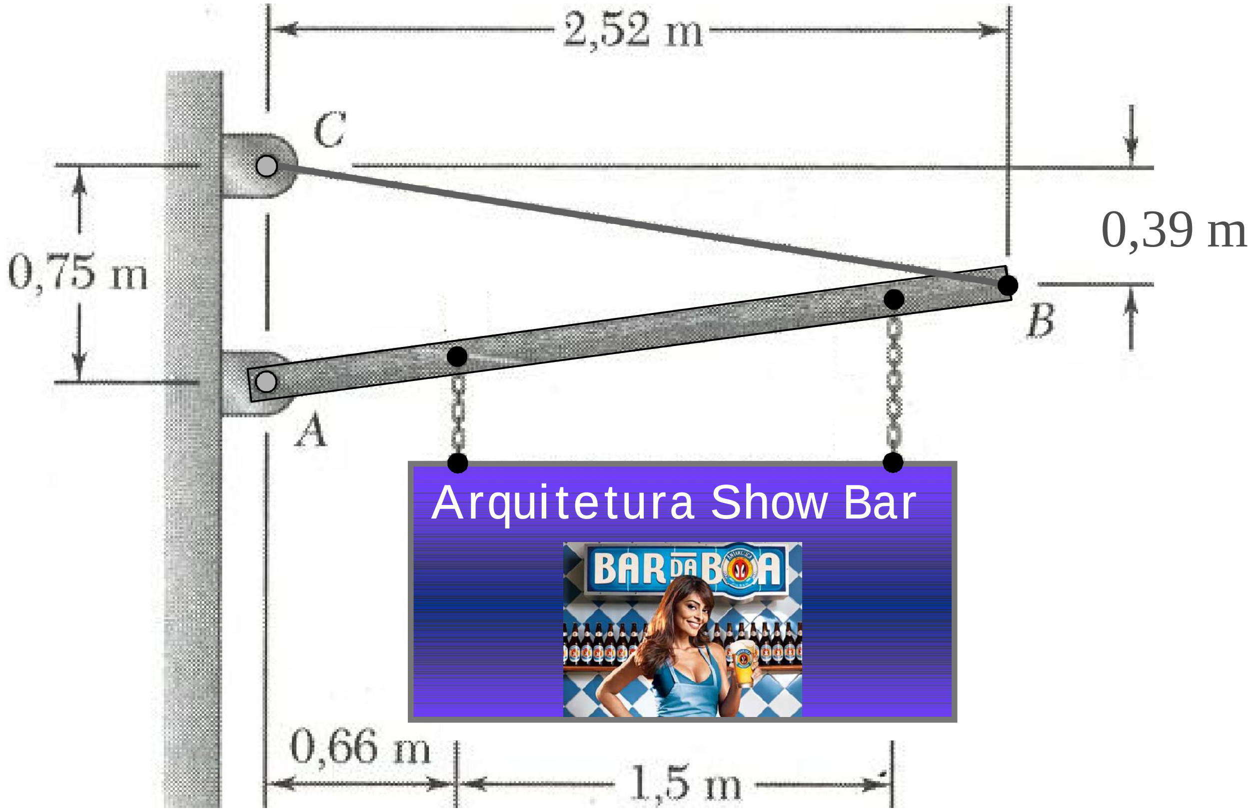
$$H_A = -11{,}2 \text{ kN}$$

$$V_A = 46{,}0 \text{ kN}$$

$$R_B = 62{,}4 \text{ kN}$$

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo:



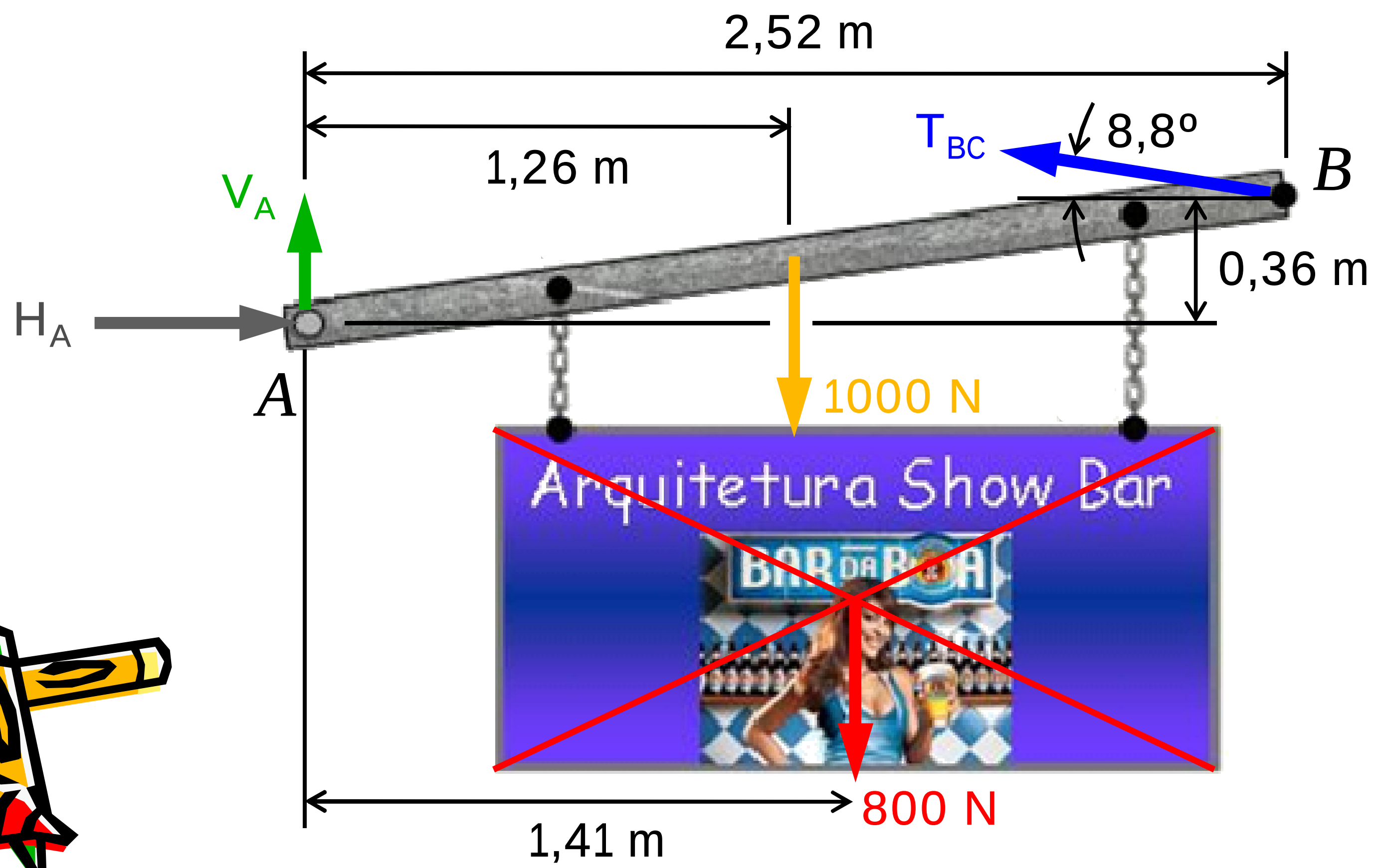
Um letreiro é pendurado por duas correntes no mastro *AB*. O mastro é articulado em *A* e é sustentado pelo cabo *BC*. Sabendo que os pesos do mastro e do letreiro são 1000 N e 800 N, respectivamente, determine a tração no cabo *BC* e a reação na articulação em *A*.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

Exemplo (continuação):

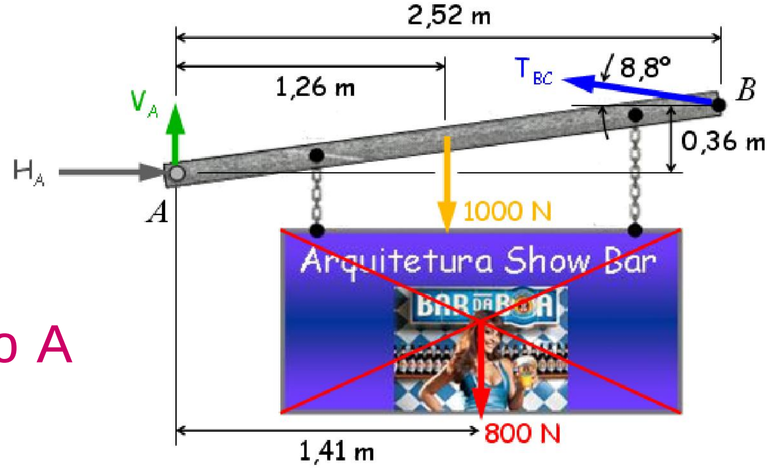
Diagrama de Corpo Livre



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Problemas que Envolvem o Equilíbrio de um Corpo Rígido

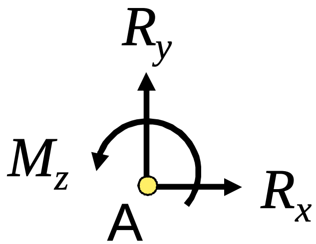
Exemplo (continuação):



Imposição do Equilíbrio no Ponto A

$$R_x = 0 \therefore H_A + T_{BC}\cos 171{,}2^o = 0$$

$$R_y = 0 \therefore V_A - 1000 - 800 + T_{BC}\sin 171{,}2^o = 0$$



$$M_z = 0 \therefore -1000\cdot 1{,}26 - 800\cdot 1{,}41 + T_{BC}\cos 8{,}8^o\cdot 0{,}36 + T_{BC}\sin 8{,}8^o\cdot 2{,}52 = 0$$

$$\begin{cases} H_A - 0{,}988\cdot T_{BC} = 0 \\ V_A + 0{,}153\cdot T_{BC} = 1800 \\ 0{,}741\cdot T_{BC} = 2388 \end{cases}$$

$$H_A = 3184{,}0\ \text{N}$$

$$V_A = 1306{,}9\ \text{N}$$

$$T_{BC} = 3222{,}7\ \text{N}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL