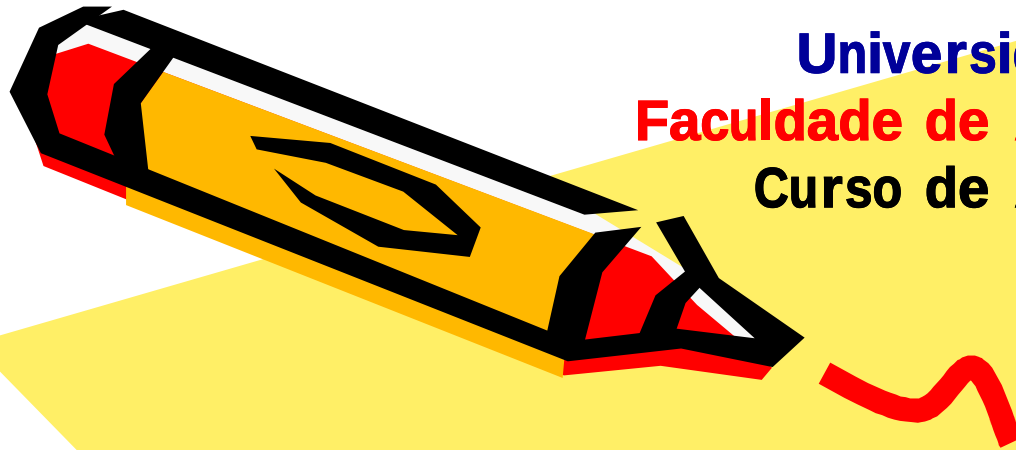
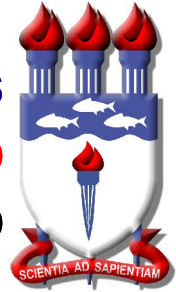
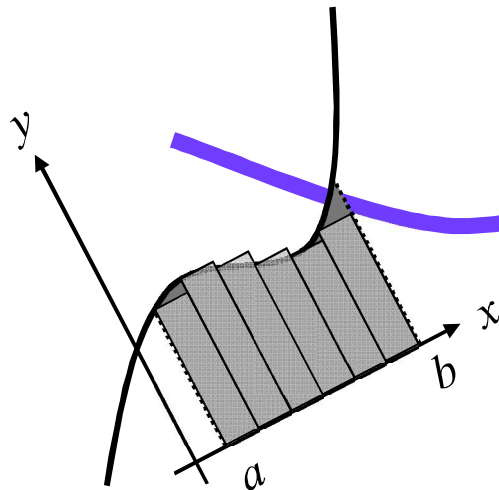


Universidade Federal de Alagoas
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo
Curso de Arquitetura e Urbanismo



Disciplina: Fundamentos para a Análise Estrutural
Código: AURB006 **Turma:** A **Período Letivo:** 2007-2
Professor: Eduardo Nobre Lages

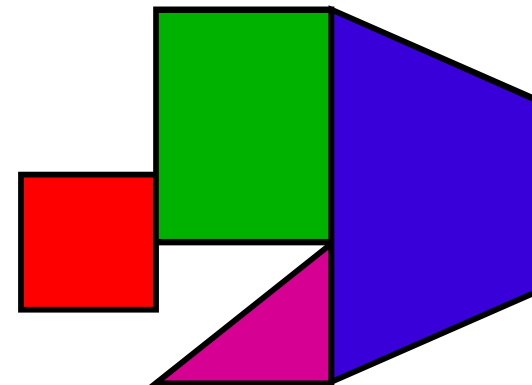
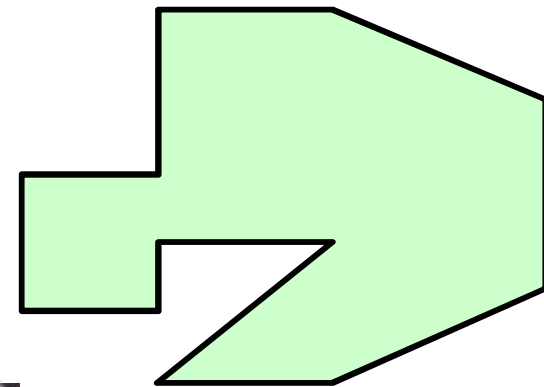
Integrais



Maceió/AL

Objetivo

Dividir para conquistar.



Primitivas

Definição: Uma função F é uma primitiva (ou antiderivada) de $f(x)$ no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Exemplo: Quem é uma primitiva da função $f(x) = 3x^2$?

Conhecendo-se a regra básica de derivação da potência, tem-se que $F(x) = x^3$

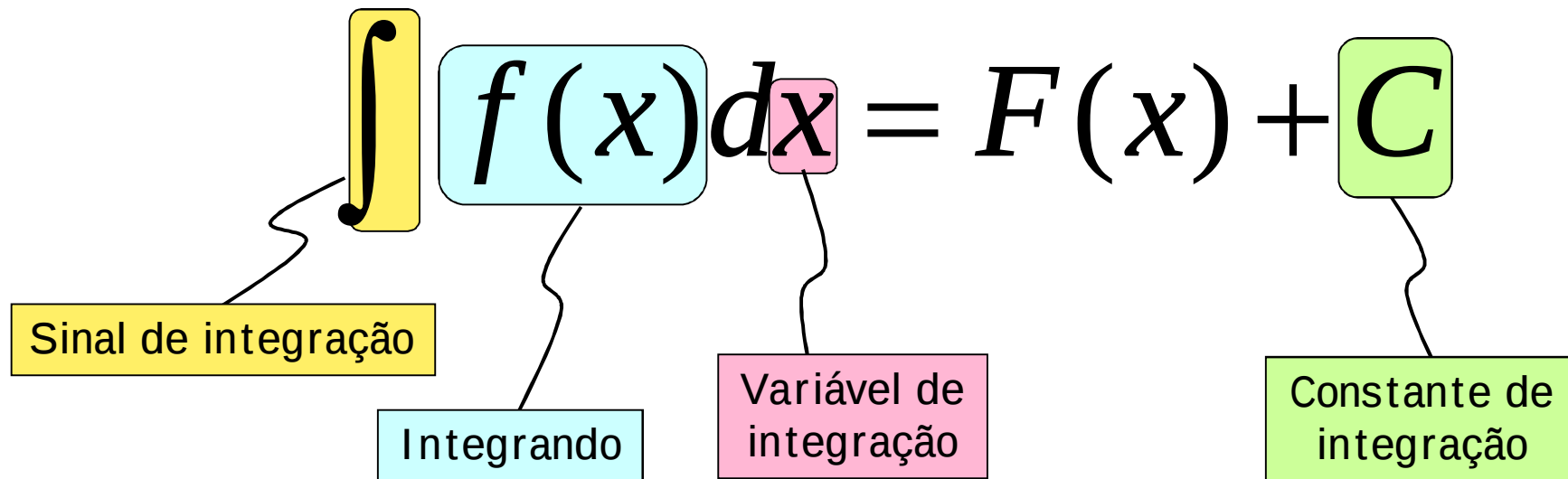
Além de $F_1(x) = x^3$, note que $F_2(x) = x^3 + 53$ também é uma primitiva de f , assim como $F_3(x) = x^3 - 21$.

A família de todas as primitivas de $f(x) = 3x^2$ é representada por $G(x) = x^3 + C$, onde C representa genericamente uma constante.



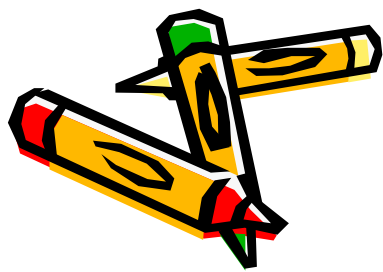
Notação

A operação de encontrar a família de todas as primitivas de uma função é chamada de integral indefinida (ou primitivação) e é representada na forma



The diagram shows the integral notation $\int f(x) dx = F(x) + C$ with four colored boxes highlighting its components. Each box has a label below it connected by a line:

- Sinal de integração** (yellow box) points to the integral symbol $\int$.
- Integrando** (light blue box) points to the function $f(x)$.
- Variável de integração** (pink box) points to the differential dx .
- Constante de integração** (light green box) points to the constant C .



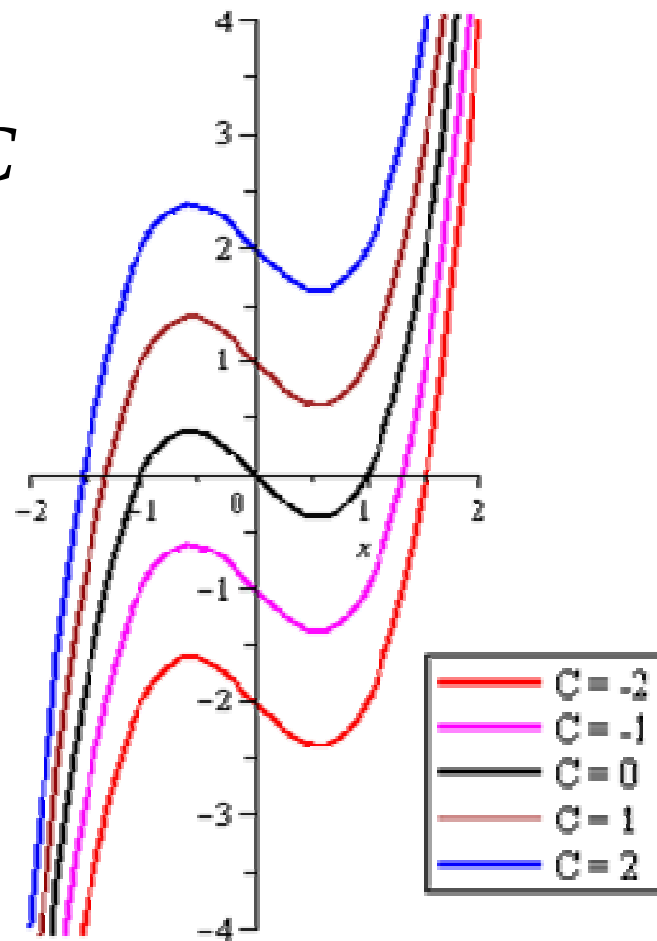
A diferenciação e a integração são operações inversas, no mesmo sentido de que a divisão e a multiplicação são operações inversas.

Condições Iniciais e Soluções Particulares

A integral indefinida tem infinitas soluções (cada uma diferindo das outras por uma constante), a exemplo de

$$\int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$$

Se se conhecer um ponto pertencente a uma curva de interesse (condição inicial) é possível determinar a chamada solução particular, calculando-se o valor adequado de C .

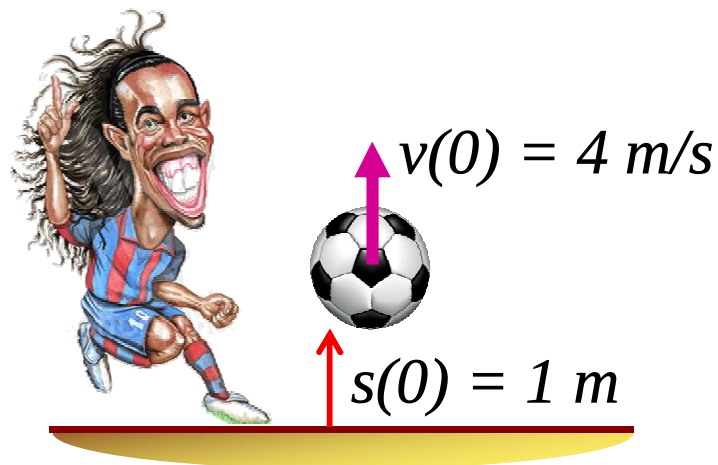
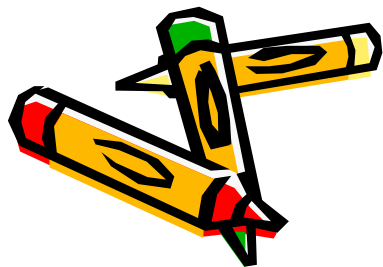


Condições Iniciais e Soluções Particulares

Exemplo (movimento vertical):

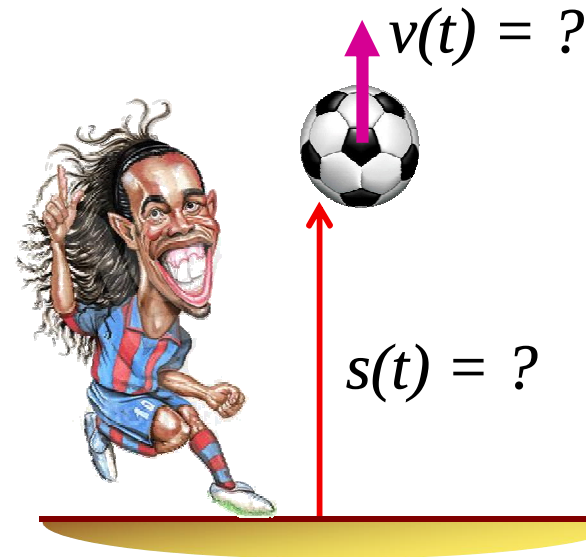
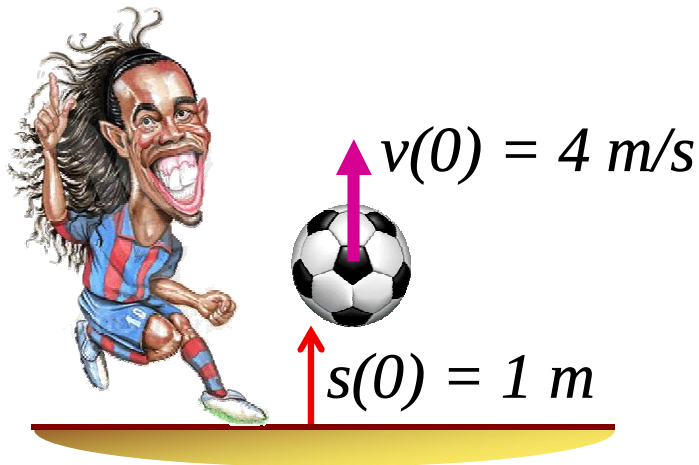
Uma bola é jogada para cima com velocidade inicial de 4 m/s de uma altura inicial de 1 m .

- a) Encontre a função posição dando a altura s como função do tempo t .
- b) Quando a bola atinge o chão?



Condições Iniciais e Soluções Particulares

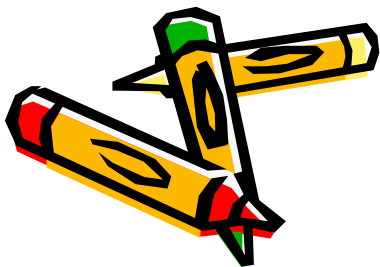
Exemplo (continuação):



$$a(t) = -9,8 \text{ m/s}^2 = \frac{d}{dt}[v(t)] \longrightarrow v(t) = -9,8t + C_1$$

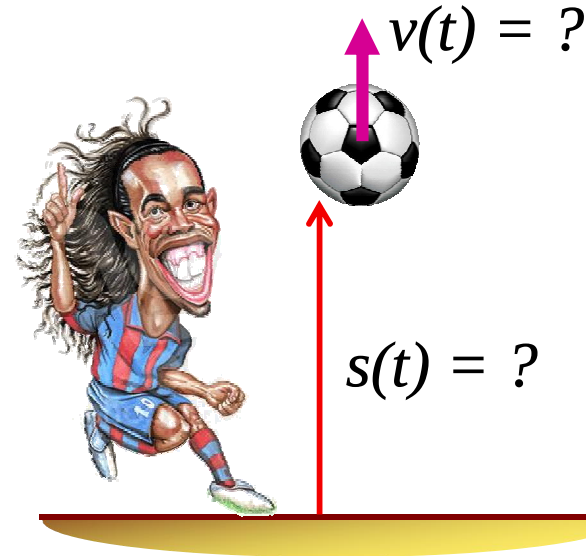
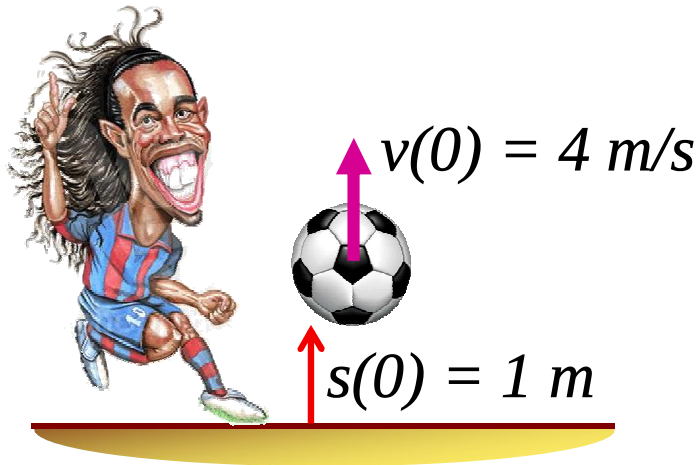
$$\text{Como } v(0) = 4 \text{ m/s} \longrightarrow v(0) = 4 = -9,8(0) + C_1 \\ \therefore C_1 = 4$$

Histórico da velocidade: $v(t) = -9,8t + 4$



Condições Iniciais e Soluções Particulares

Exemplo (continuação):



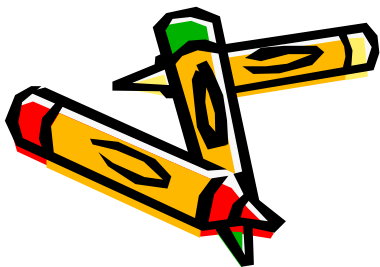
$$v(t) = -9,8t + 4 = \frac{d}{dt}[s(t)] \longrightarrow s(t) = -4,9t^2 + 4t + C_2$$

$$\text{Como } s(0) = 1 \text{ m} \longrightarrow s(0) = 1 = -4,9(0)^2 + 4(0) + C_2$$

$$\therefore C_2 = 1$$

Histórico da posição:

$$s(t) = -4,9t^2 + 4t + 1$$

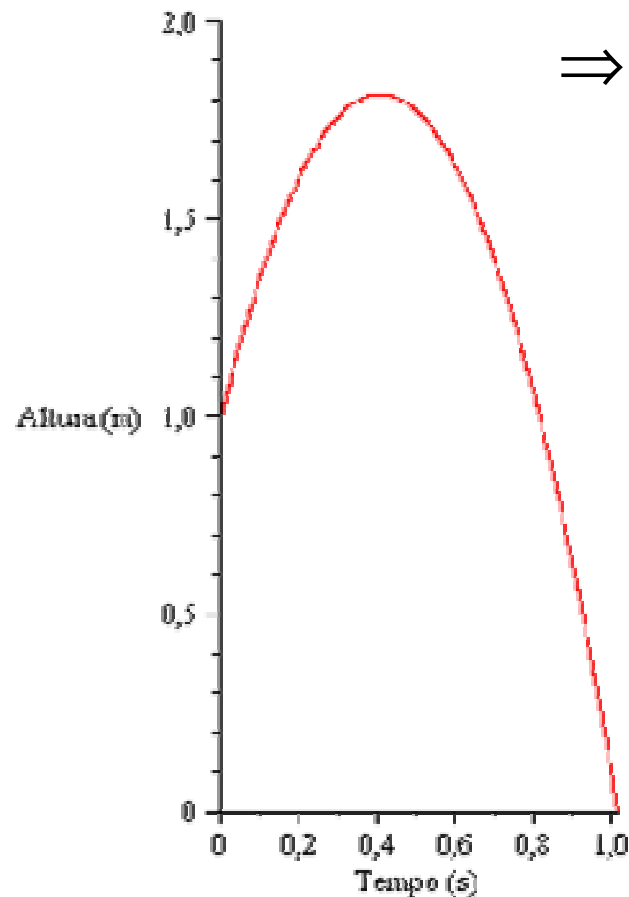


Condições Iniciais e Soluções Particulares

Exemplo (continuação):

Bola atingir o chão: $s(t) = -4,9t^2 + 4t + 1 = 0$

$$\Rightarrow t = \begin{cases} \text{Fora do domínio físico} \\ \text{1,02 s} \end{cases}$$



Propriedades

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x)dx \right] = f(x)$$



Fórmulas de Integração

$$\int 0 dx = C$$

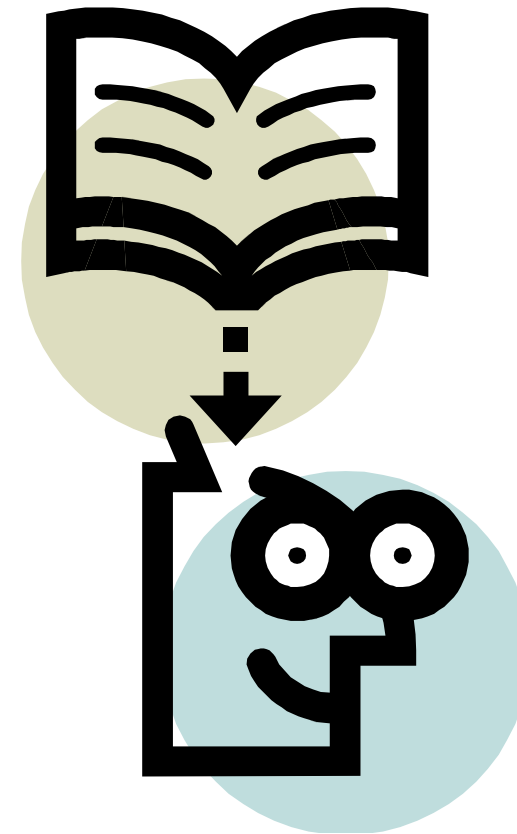
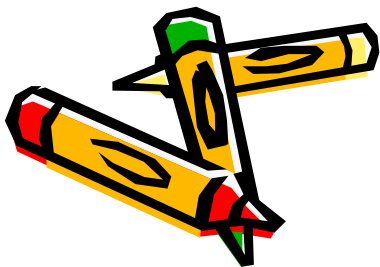
$$\int k dx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

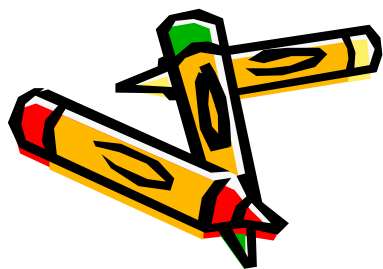
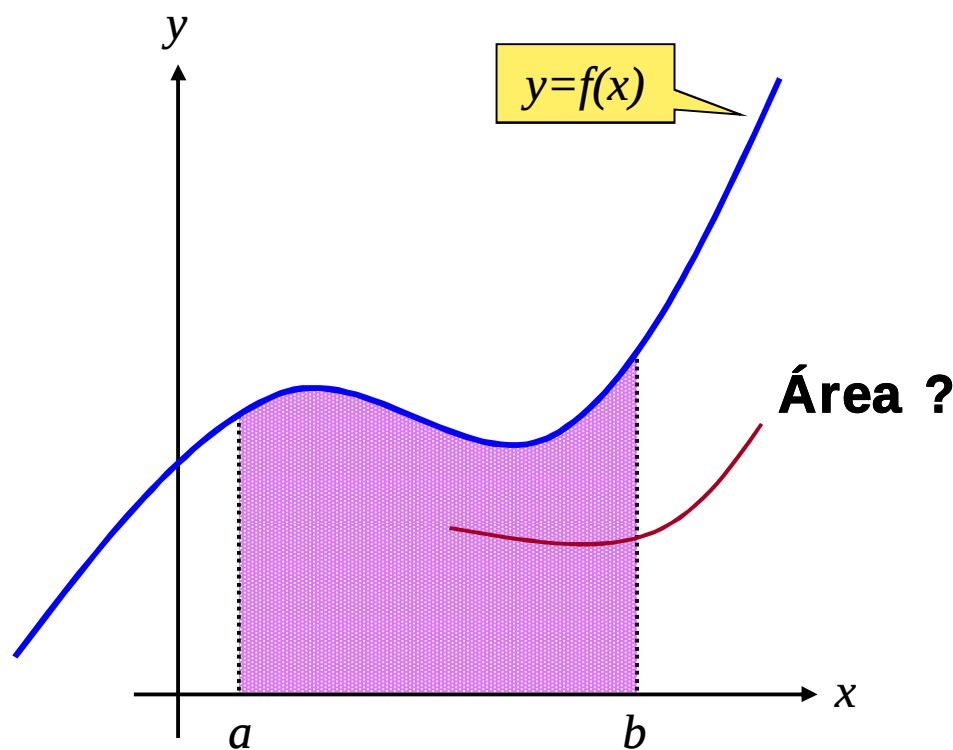
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$



De Volta ao Problema da Área

Considere a região delimitada pelo gráfico da função $f(x)$, o eixo x , e as retas verticais $x = a$ e $x = b$.



De Volta ao Problema da Área

Definição: Uma partição P de um intervalo $I=[a, b]$ é uma coleção finita de subintervalos de I que não se sobrepõem e cuja união é o próprio I .

Uma partição geralmente é descrita especificando-se um conjunto finito de números:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b$$

Subintervalos: $I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad 1 \leq k \leq n$

onde
$$I = \bigcup_{k=1}^n I_k$$

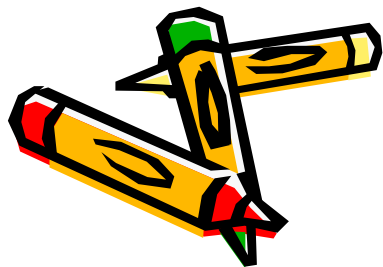
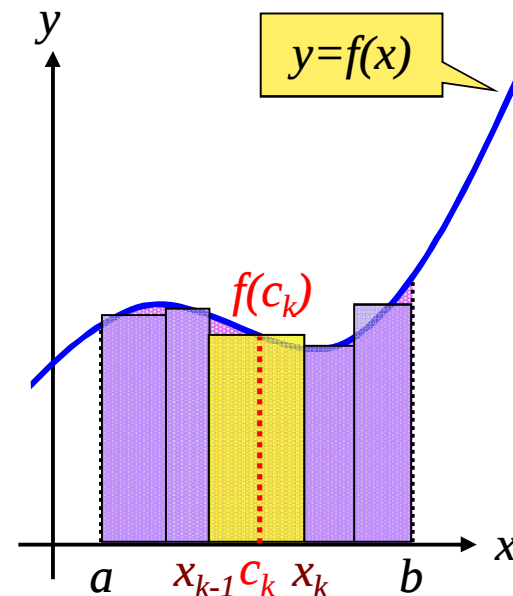
Raio da partição: $\rho(P) = \max_k |x_k - x_{k-1}|$



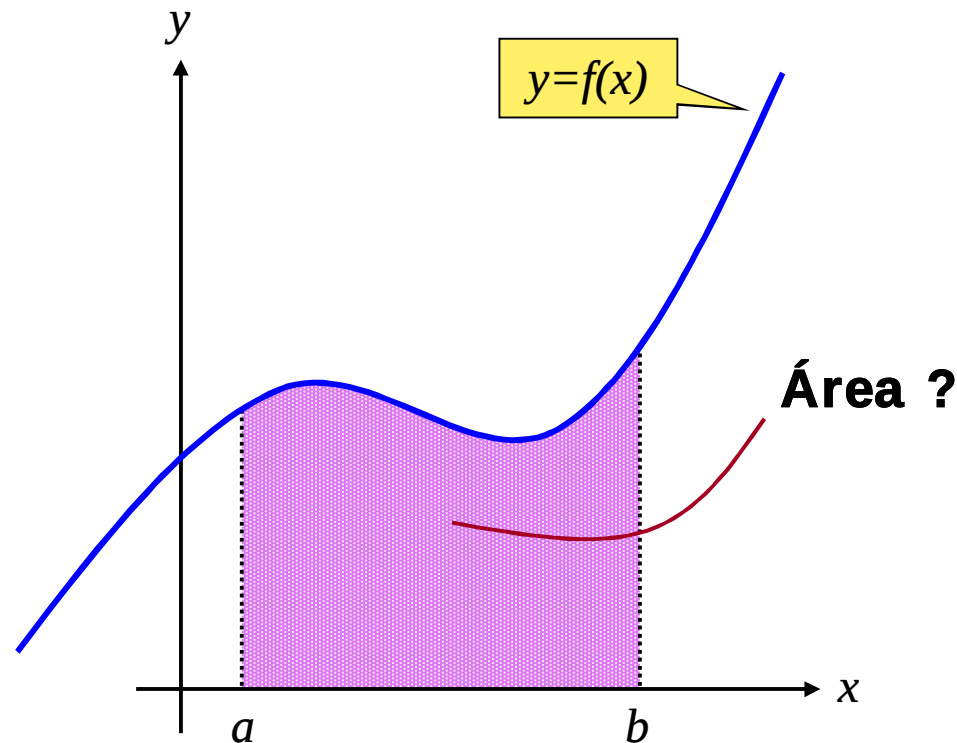
De Volta ao Problema da Área

Definição: A soma de Riemann de f correspondente à partição $P=(x_0; x_1; \dots ; x_n)$ e a escolha dos pontos intermediários c_k é dada por

$$R(P, f) = \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$



De Volta ao Problema da Área




$$\text{Área} = \lim_{\rho(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x) dx$$

Integral definida

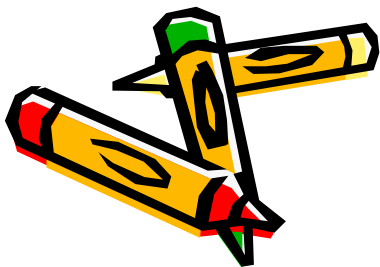
Teorema Fundamental do Cálculo

Se a função f for contínua no intervalo $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Quando aplicar este teorema, a seguinte notação é conveniente:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplos:

$$1) \int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20$$

$$\begin{aligned} 2) \int_2^3 (x^2 - 3) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x \right]_2^3 = \\ &= \left(\frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2 \right) = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

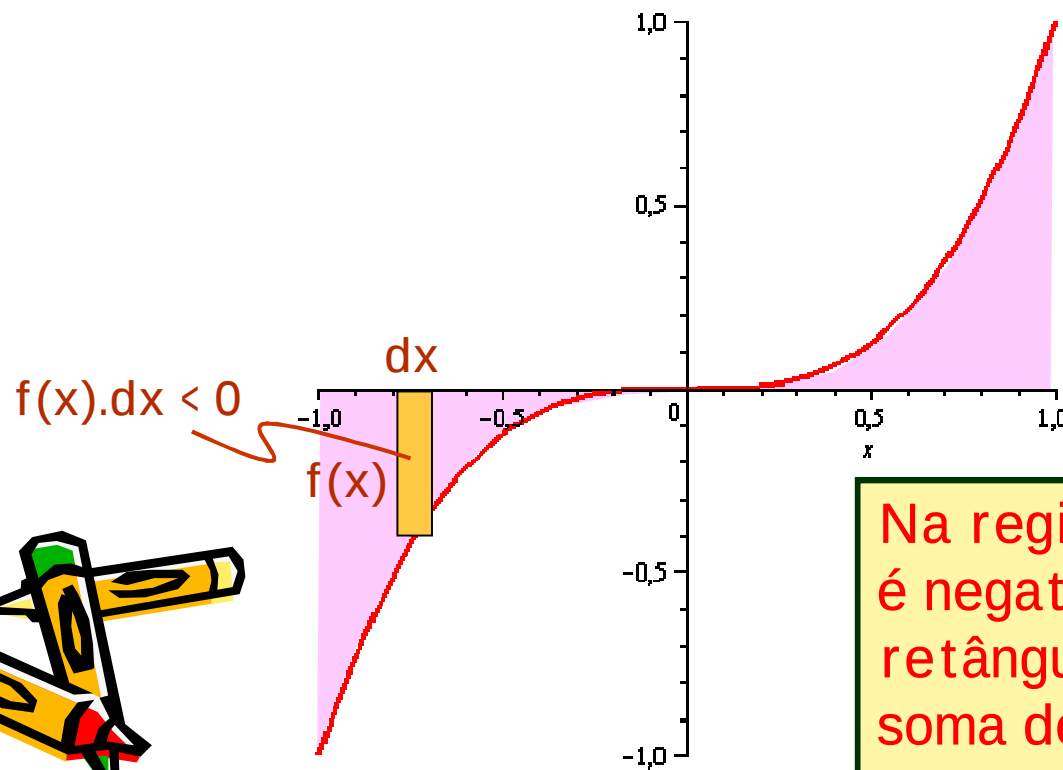
Note que na integral definida não é necessário incluir a constante de integração C na primitiva (ela seria cancelada na diferença dos dois termos).



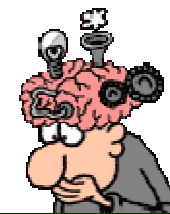
Integral Definida e a Área

Exemplo:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \boxed{0} \quad ?$$

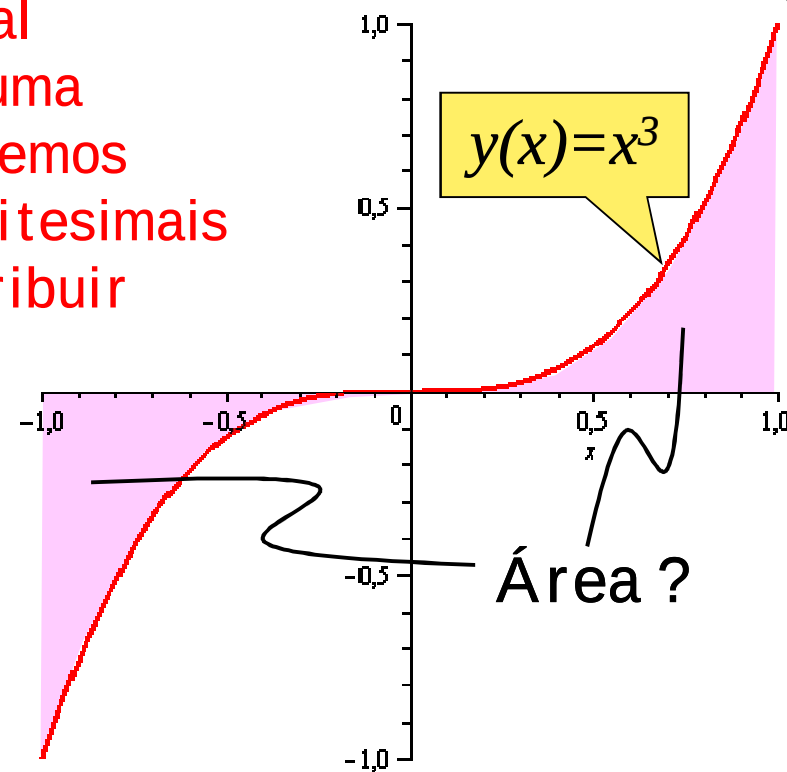


Na região onde o integrando é negativo a contribuição do retângulo infinitesimal da soma de Riemann é negativa.



Integral Definida e a Área

Se desejamos utilizar a integral definida para gerar a área de uma região delimitada por curvas, temos que ajustar os retângulos infinitesimais da soma de Riemann para contribuir sempre positivo.



Exemplo:

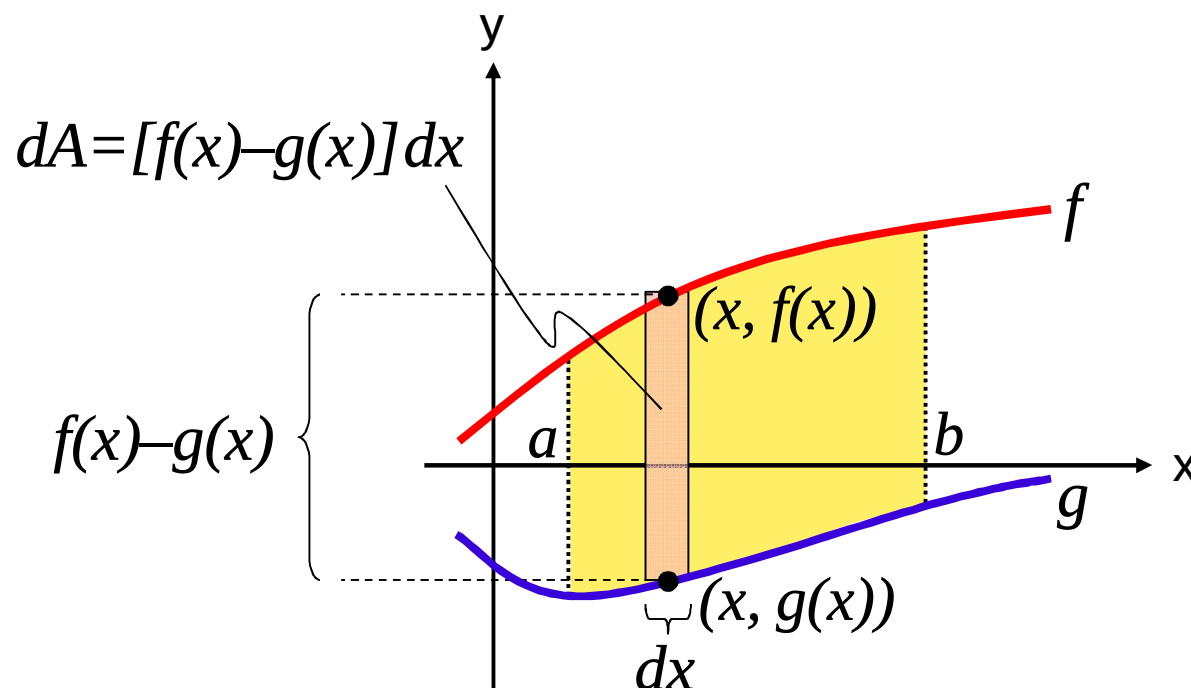
$$A = \int_{-1}^0 (-x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx = L = \frac{1}{2}$$

Inf. $y(x)=x^3$
Sup. $y(x)=0$

Inf. $y(x)=0$
Sup. $y(x)=x^3$



Área da Região entre Duas Curvas



Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$, então a área da região limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ é

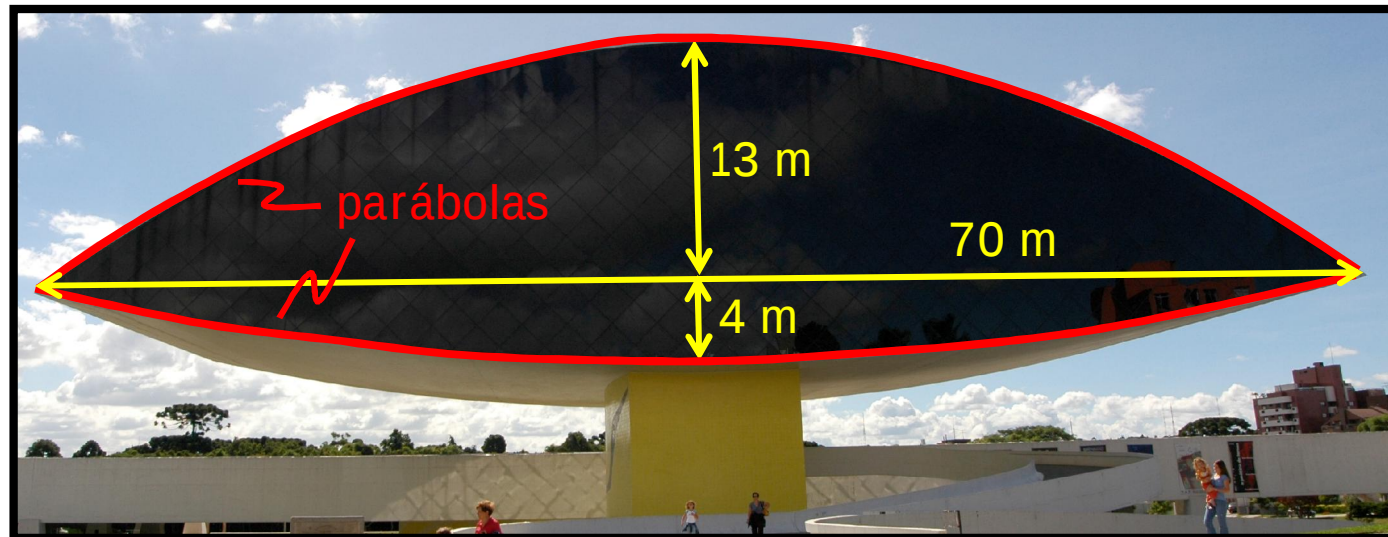
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



Aplicação de Integrações

Exemplo:

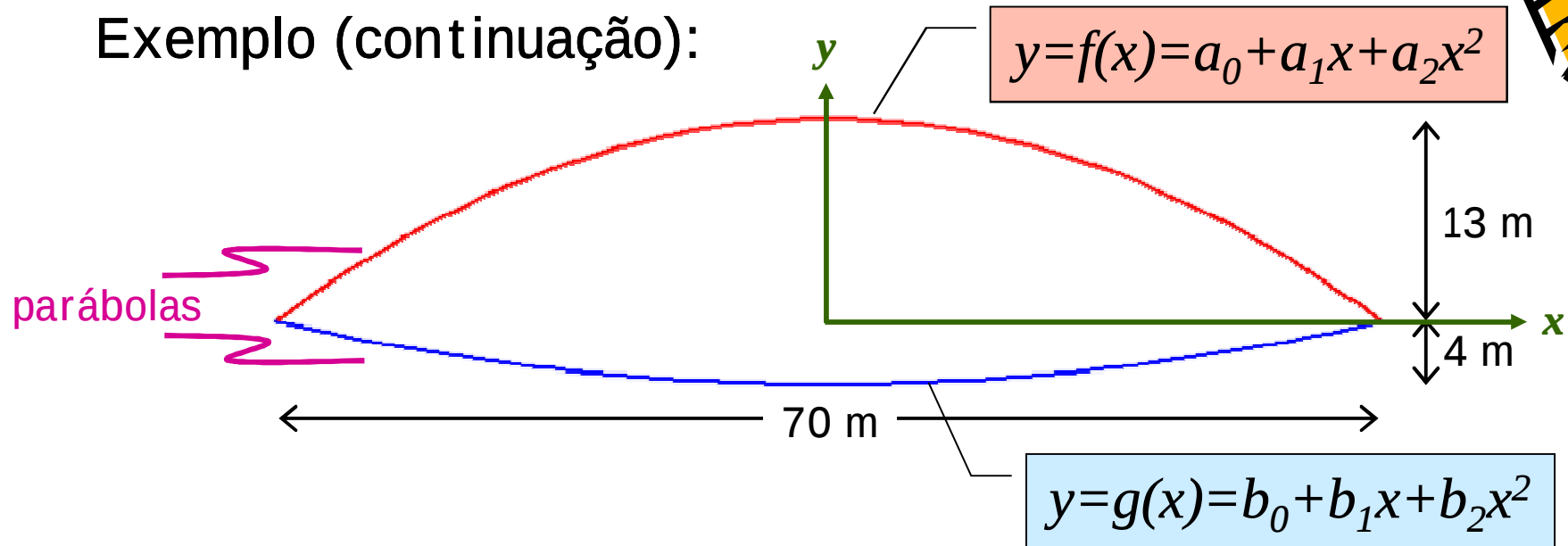
Tanto para o cálculo da carga térmica solar quanto para o estudo da iluminação natural do Museu Oscar Niemeyer (Curitiba/PR), precisa-se conhecer a área da superfície envidraçada da fachada lateral. Tem-se conhecimento das dimensões principais da fachada e de que as curvas limitantes são parábolas do 2º grau.



<http://www.museuoscarniemeyer.org.br>

Aplicação de Integrações

Exemplo (continuação):



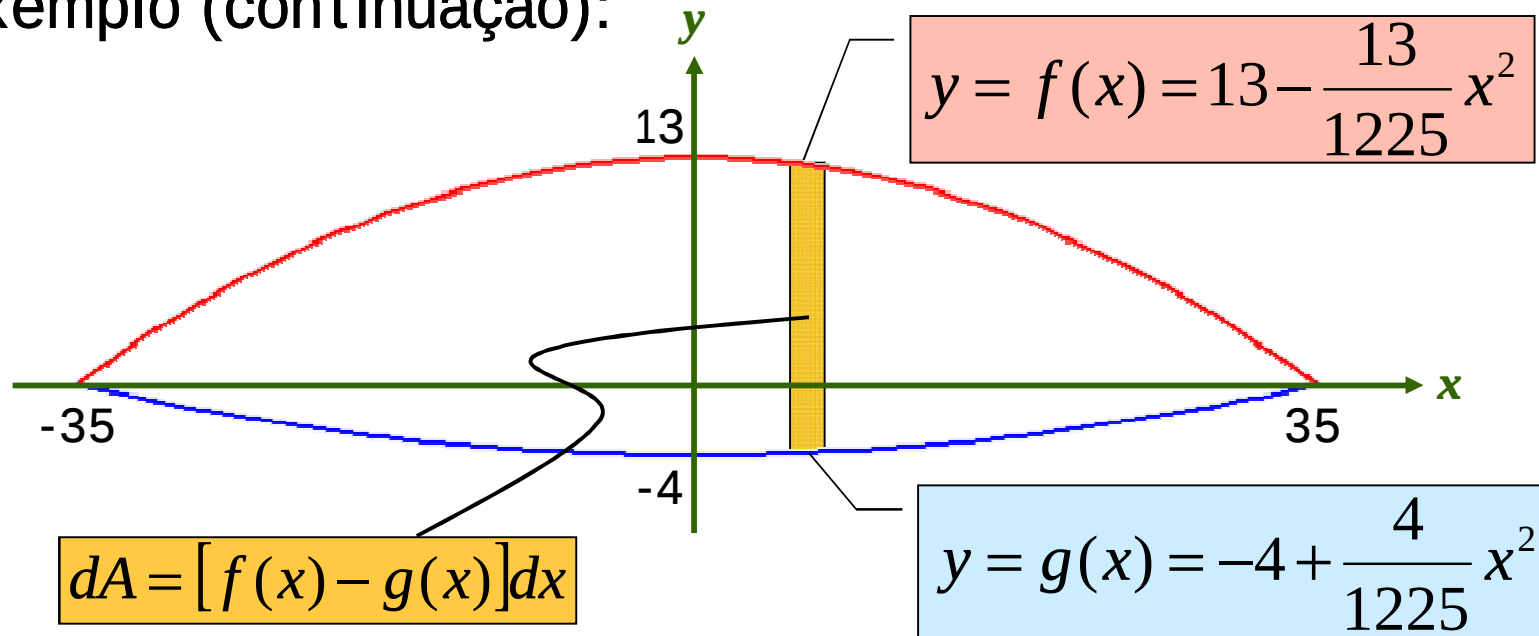
Restrições

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-35) = 0, \quad f(0) = 13 \text{ e } f(35) = 0 \\ \Rightarrow a_0 = 13, \quad a_1 = 0 \text{ e } a_2 = -\frac{13}{1225} \end{array} \right.$$

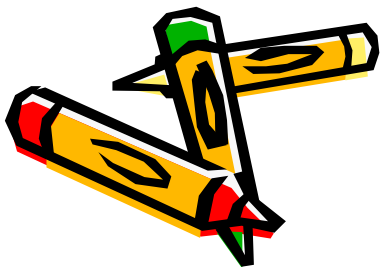
$$\left\{ \begin{array}{l} g(-35) = 0, \quad g(0) = -4 \text{ e } g(35) = 0 \\ \Rightarrow b_0 = -4, \quad b_1 = 0 \text{ e } b_2 = \frac{4}{1225} \end{array} \right.$$

Aplicação de Integrações

Exemplo (continuação):



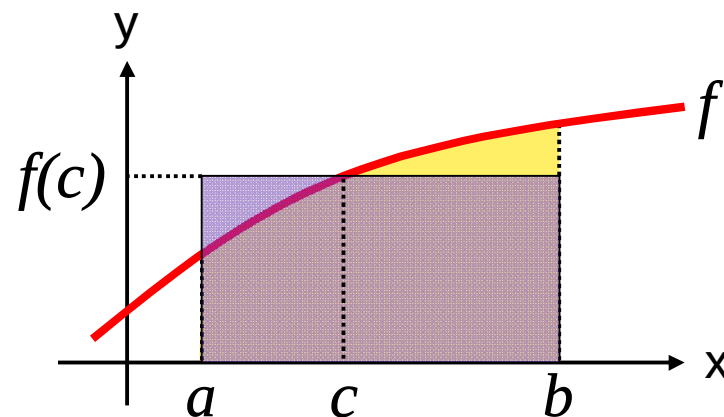
$$A = \int_{-35}^{35} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-35}^{35} \left(17 - \frac{17}{1225}x^2 \right) dx$$
$$= \left[17x - \frac{17}{3675}x^3 \right]_{-35}^{35} = L = \frac{2380}{3} \approx 793,33 \text{ m}^2$$



Teorema do Valor Médio para Integrais

Se f é uma função integrável no intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número c no intervalo fechado $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



Por consequência, o valor médio da função no intervalo fechado $[a, b]$ é

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$



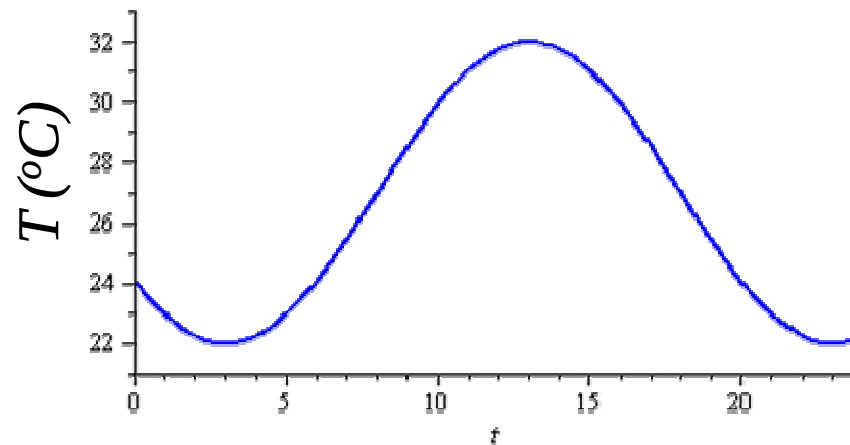
Aplicação de Integrações

Exemplo:

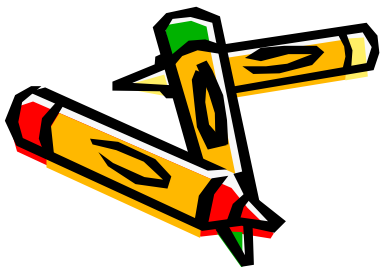
A lei representativa da temperatura (em graus Celsius) em uma casa, que servirá de galeria, durante um dia é dada por

$$T = 27 + 5 \sin \left[\frac{\pi(t-8)}{10} \right]$$

onde t é o tempo em horas, com $t=0$ representando meia-noite.



Para a elaboração do projeto de climatização da galeria, pede-se determinar a temperatura média diária.



Aplicação de Integrações

Exemplo (continuação):

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{1}{24} \int_0^{24} T(t) dt \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{24} \left\{ 27 + 5 \sin \left[\frac{\pi(t-8)}{10} \right] \right\} dt = L = 26,3 \text{ } ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

