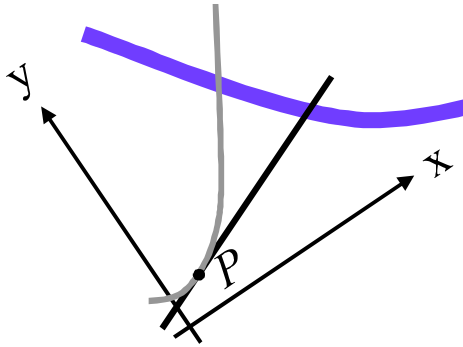
Universidade Federal de Alagoas
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo
Curso de Arquitetura e Urbanismo

Disciplina: Fundamentos para a Análise Estrutural
Código: AURB006 **Turma:** A **Período Letivo:** 2007-2
Professor: Eduardo Nobre Lages

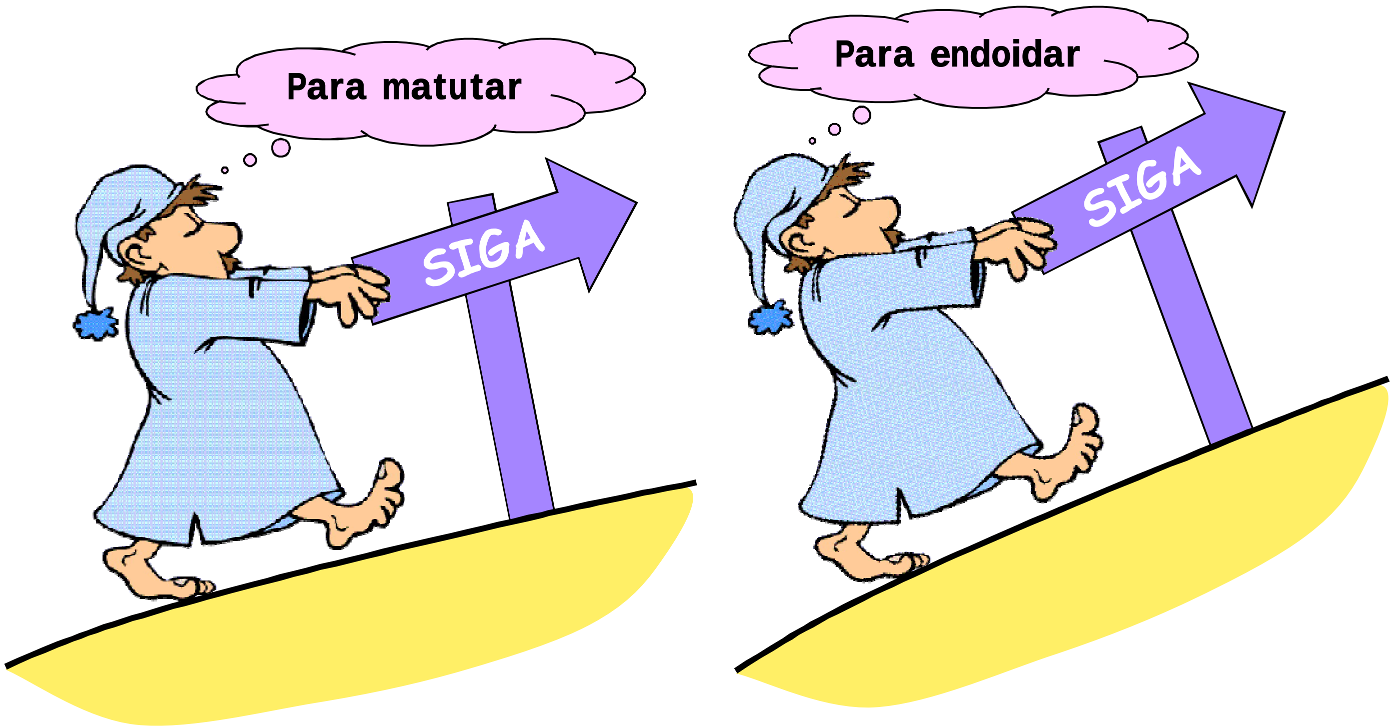
Derivadas



Maceió/AL

Objetivo

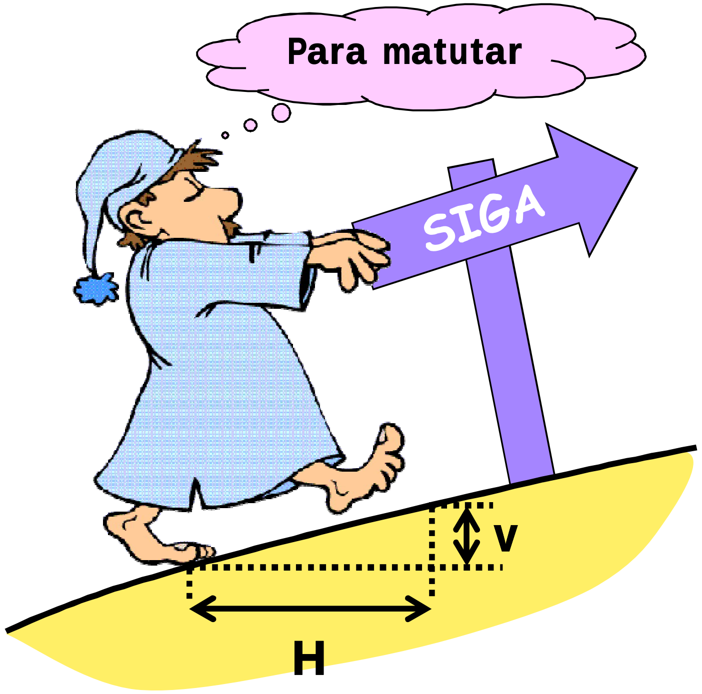
Estudar mudança no valor de funções na vizinhança de pontos.

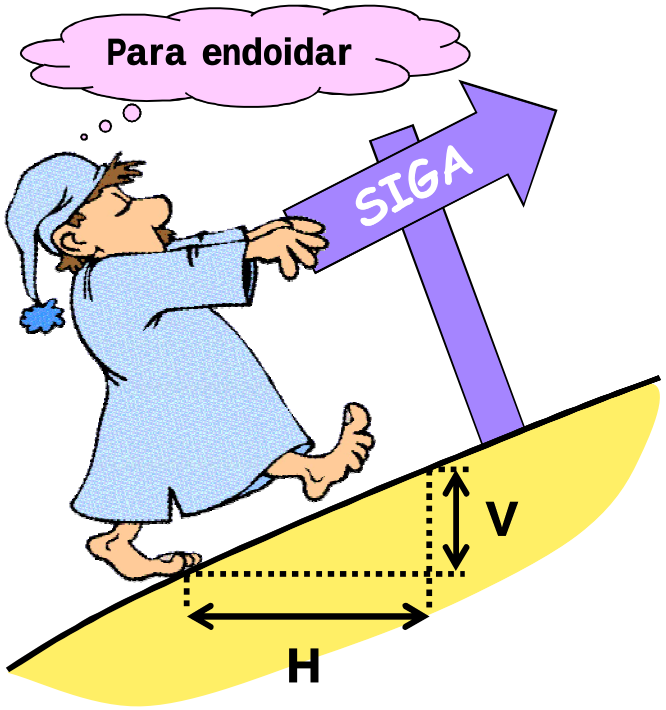


Ao se dar passos de mesma projeção horizontal, qual caminho levará a uma maior **mudança** na altitude?

Motivação

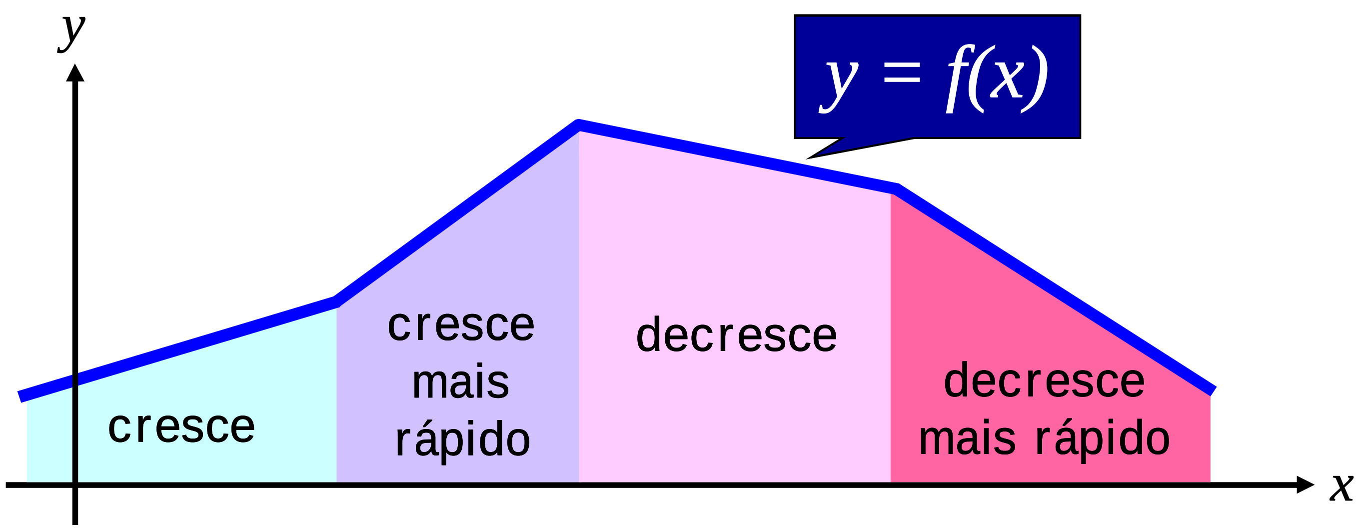
Os valores de funções num determinado ponto nos permitem afirmar a posição relativa entre esses valores, mas são incapazes de nos dizer como elas se modificam na vizinhança desse ponto.





Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Quem está por trás das mudanças nas vizinhanças?

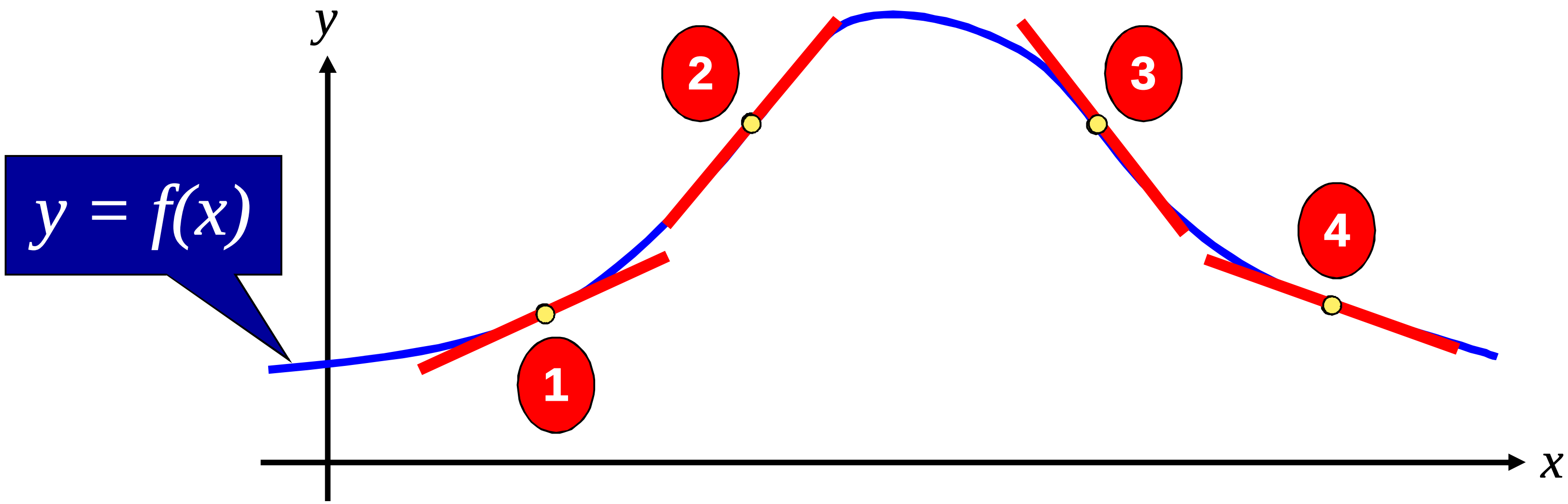


Quem poderia nos indicar esse comportamento?

O coeficiente angular da reta tangente à curva pode indicar se há crescimento ou decrescimento, além da intensidade da mudança.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

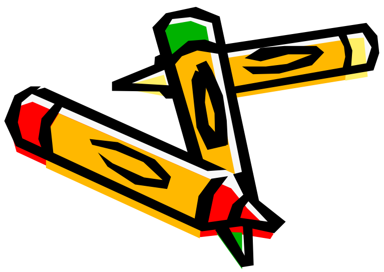
Quem está por trás das mudanças nas vizinhanças?



O que dizer do comportamento da função?

1: cresce 2: cresce mais rápido

3: decresce 4: decresce mais lento



O que dizer dos coeficientes angulares das retas tangentes?

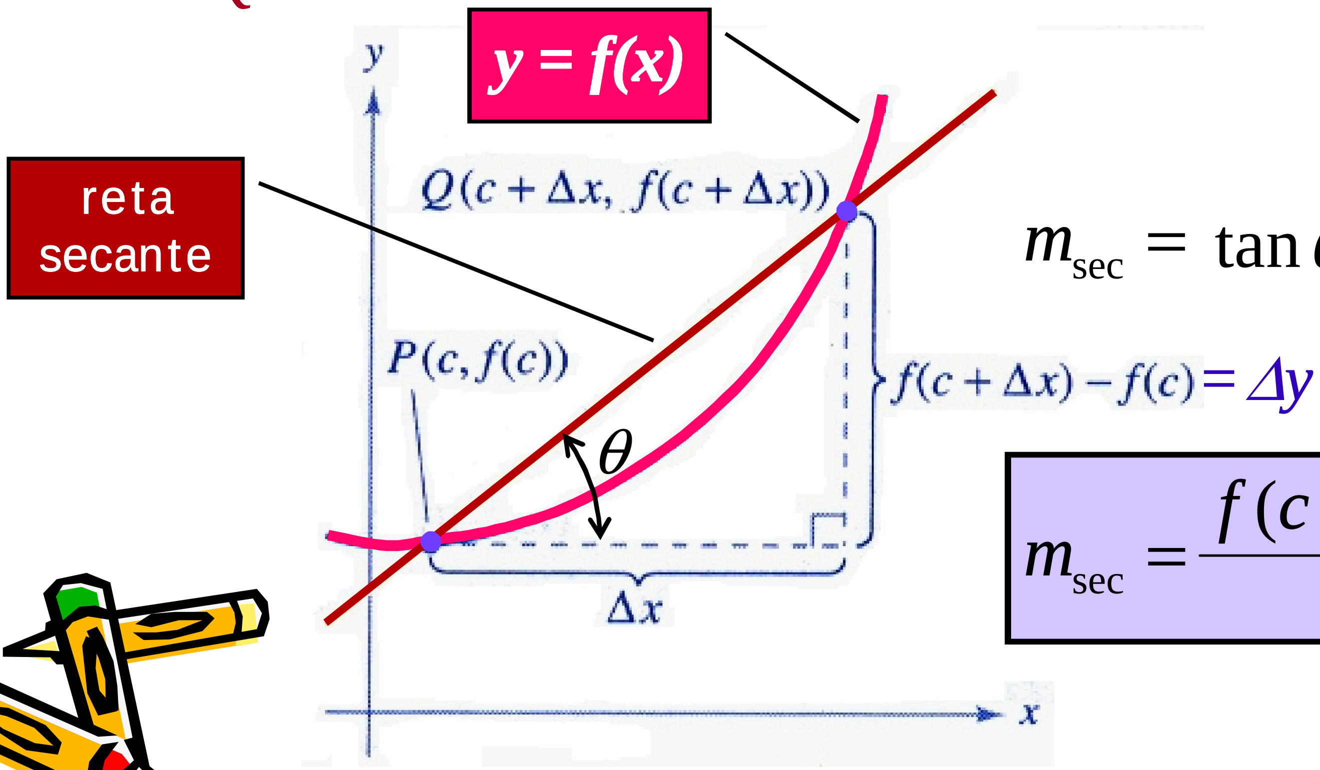
$m_1 > 0$ $m_2 > 0$ $m_2 > m_1$

$m_3 < 0$ $m_4 < 0$ $m_3 < m_4$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

De Volta ao Problema da Reta Tangente

É possível se aproximar do ***coeficiente angular da reta tangente*** usando uma ***reta secante*** que passa pelo ***ponto de tangência*** P e um segundo ponto na curva Q.



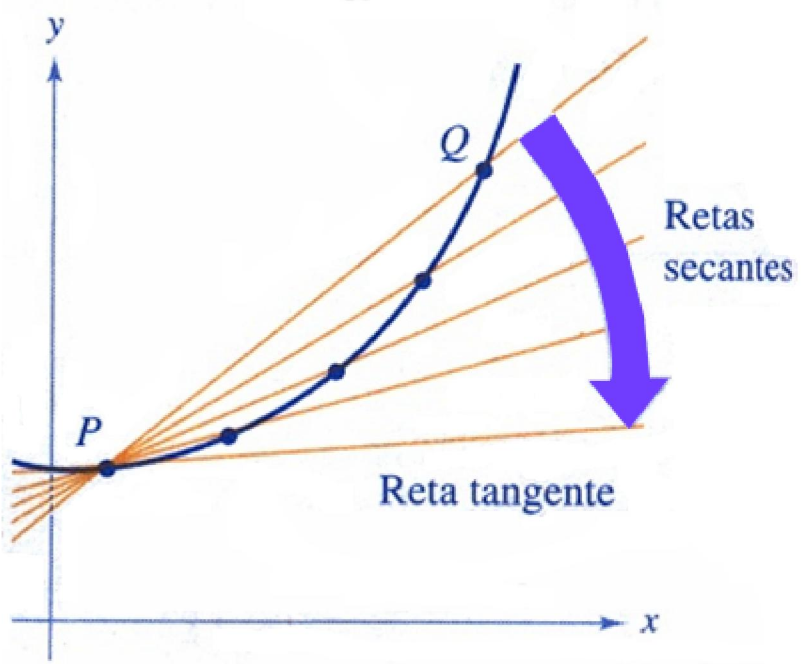
$$m_{\text{sec}} = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

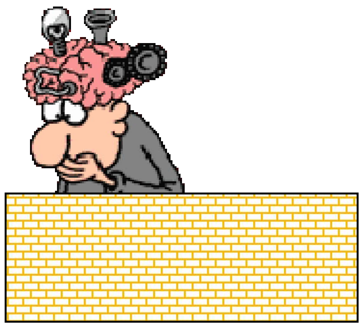
$$\boxed{m_{\text{sec}} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

De Volta ao Problema da Reta Tangente

Conforme o ponto Q se aproxima do ponto P, o ***coeficiente angular*** da ***reta secante*** se aproxima do ***coeficiente angular*** da ***reta tangente***.





Quando essa "posição limite" existir, o coeficiente angular da reta tangente é chamado de **limite** do coeficiente angular da reta secante .

De Volta ao Problema da Reta Tangente

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto c, e supondo que o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

exista, então a reta que passa pelo ponto (c, $f(c)$) e cujo coeficiente angular é m é chamada de **reta tangente** ao gráfico de f no ponto (c, $f(c)$).

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto (c, $f(c)$) também é chamado de **inclinação do gráfico de f em $x = c$**.

De Volta ao Problema da Reta Tangente

Exemplo:

Determine a inclinação da reta tangente à curva definida pela função $f(x) = x^2/2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(2+\Delta x)^2}{2} - \frac{2^2}{2}}{\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{2\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{2\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \Delta x}{2}$$

$$\boxed{m = 2}$$

De Volta ao Problema da Reta Tangente

Exemplo (continuação):

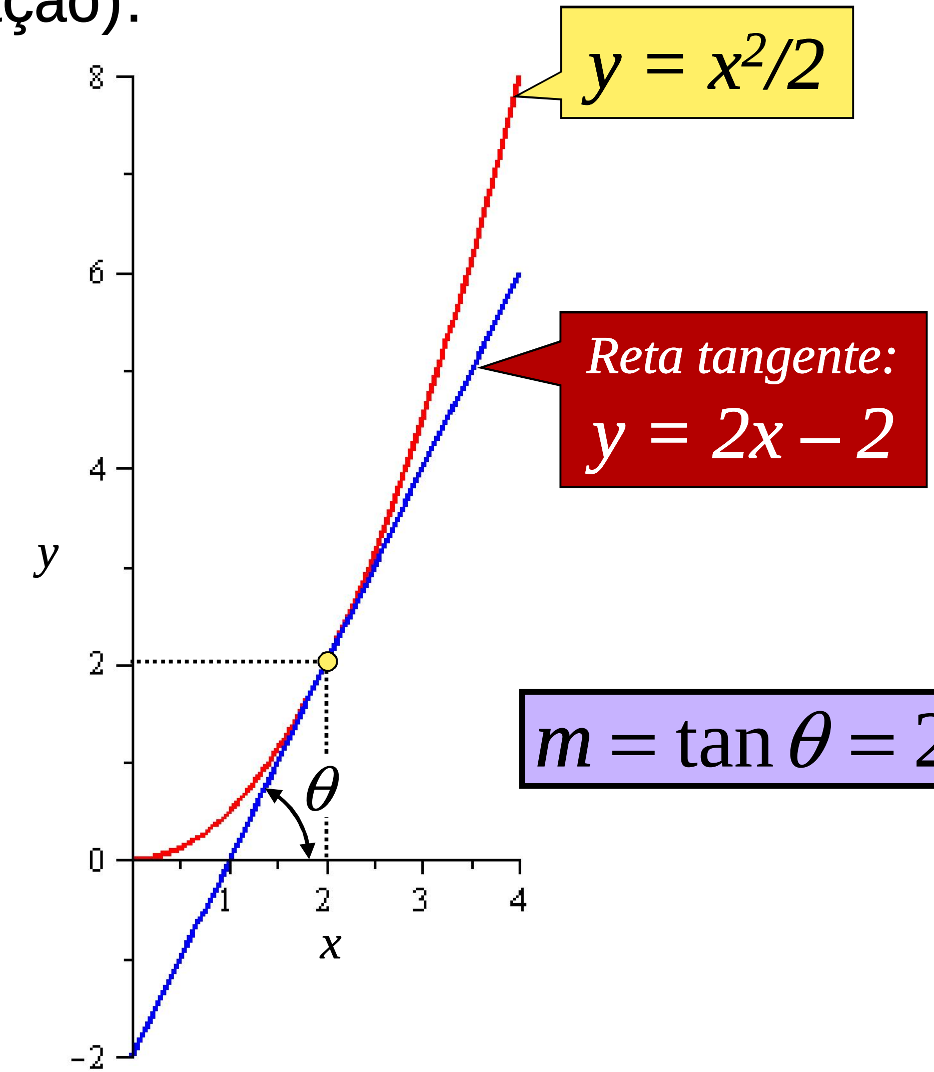
A reta tangente:

$$y = mx + b$$

Como o ponto $(2, f(2))$ da curva também pertence a esta reta, calcula-se o coeficiente linear b impondo-se o atendimento da equação

$$\therefore\ f(2) = 2m + b$$

$$\Rightarrow b = f(2) - 2m$$



$$m = \tan\theta = 2$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

De Volta ao Problema da Reta Tangente

Exemplo:

Determine a inclinação da reta tangente à curva definida pela função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa $x = 3$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

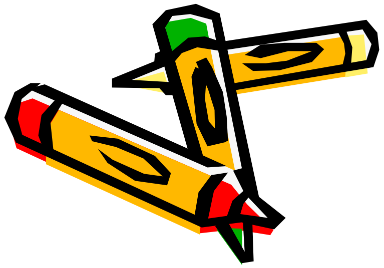
$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3+\Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3+\Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x} \frac{\sqrt{3+\Delta x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+\Delta x} + \sqrt{3}}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3+\Delta x} + \sqrt{3}\right)}$$

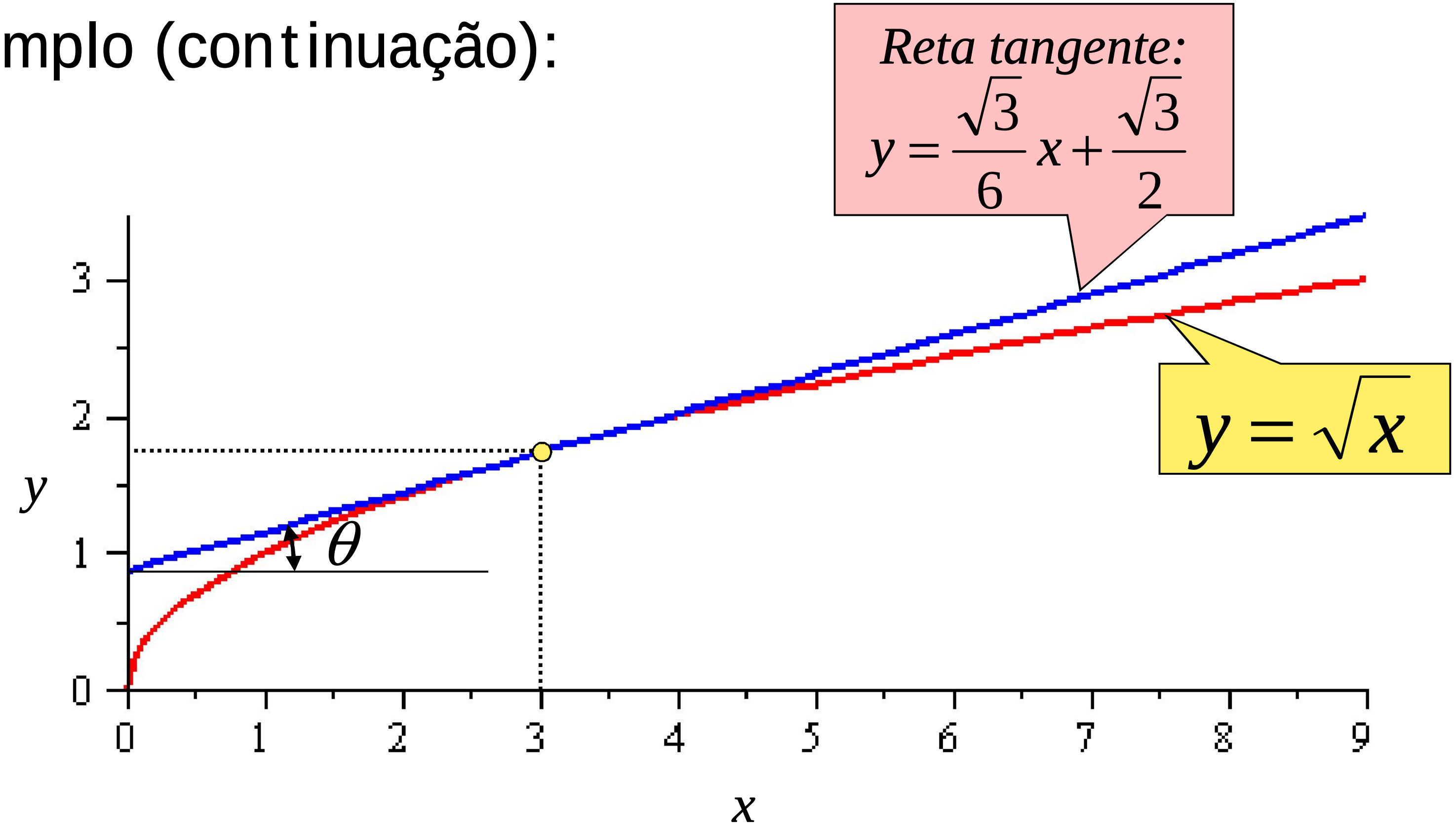
$$\therefore m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{3+\Delta x} + \sqrt{3}}$$

$$\boxed{m = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$



De Volta ao Problema da Reta Tangente

Exemplo (continuação):



$$m = \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Definição da Derivada de uma Função

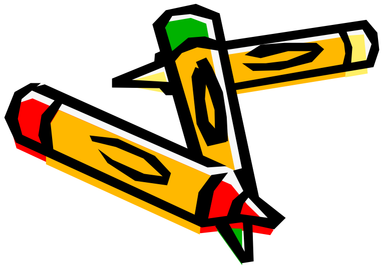
A **derivada** (ou **diferencial**) da função f no ponto x é dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

desde que este limite exista.

O domínio da função f' é o conjunto de pontos para o qual este limite existe.

A derivada de uma função que depende da variável x também é função desta mesma variável.



Esta “nova” função descreve o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$, caso esta reta tangente exista.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Notações

$f'(x)$: “f linha de x”

$\dfrac{dy}{dx}$: “derivada de y em relação a x”
: “dy dx”

y' : “y linha”

$\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]$: “df de x dx”

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Calculando a Derivada via Limites

Exemplo:

Calcule a derivada da função $f(x) = x^3 + 2x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)] - (x^3 + 2x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x + 2\Delta x) - (x^3 + 2x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

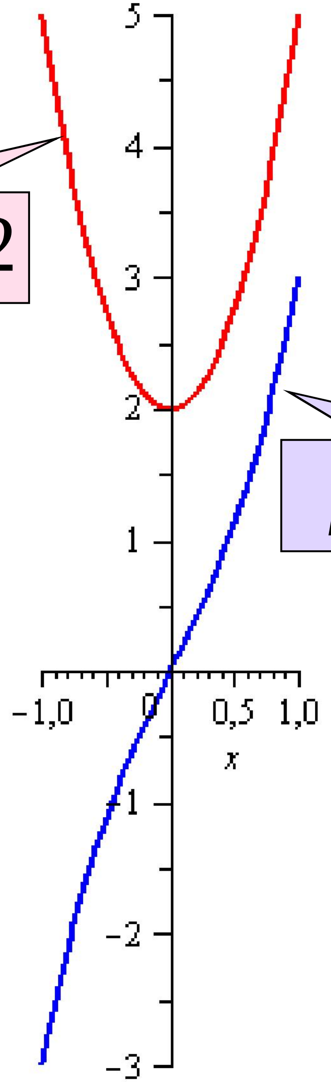
$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2\right)$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 2}$$

Calculando a Derivada via Limites

Exemplo (continuação):

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$



$$f(x) = x^3 + 2x$$

Gráficos da função *f(x)* e de sua derivada *f'(x)* no intervalo [-1;1]

Regras Básicas de Derivação

A Regra da Constante:

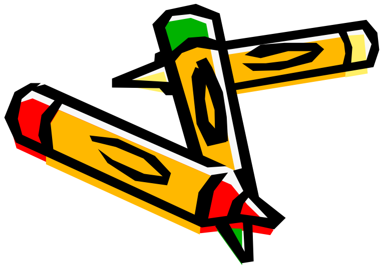
A derivada de uma função constante é nula, isto é, se c é um número real, então

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Verificação: $$\frac{d}{dx}[c] = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0$$

$$= \boxed{0}$$



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Regras Básicas de Derivação

A Regra da Multiplicação por uma Constante:

Se f é uma função derivável e c é um número real, então a função cf também é derivável e

$$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = cf'(x)$$

Verificação: $$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \boxed{cf'(x)}$$

Regras Básicas de Derivação

A Regra da Potência:

Seja n qualquer número real e $f(x) = x^n$, então f é derivável e

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1}$$

Regras Básicas de Derivação

As Regras da Soma e da Diferença:

A soma (ou a diferença) de duas funções deriváveis f e g também é uma função derivável. Além disso, a derivada de $f+g$ (ou $f-g$) é a soma (ou a diferença) das derivadas da f e da g, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = f'(x) \pm g'(x)$$

Regras Básicas de Derivação

A Regra do Produto:

O produto de duas funções deriváveis f e g também é uma função derivável. Além disso, a derivada de fg é o produto da derivada da primeira função com a segunda função, somada ao produto da primeira função com a derivada da segunda função, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Regras Básicas de Derivação

Exemplo:

Calcule a derivada da função $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

Considere $h(x) = f(x)g(x)$ onde $f(x) = 3x - 2x^2$ e

$g(x) = 5 + 4x$

Portanto, $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ regra do produto

Como $f'(x) = 3 - 4x$ e $g'(x) = 4$, regras da soma/diferença e da potência

$$h'(x) = (3 - 4x)(5 + 4x) + (3x - 2x^2)4$$

Simplificando, $h'(x) = \boxed{15 + 4x - 24x^2}$

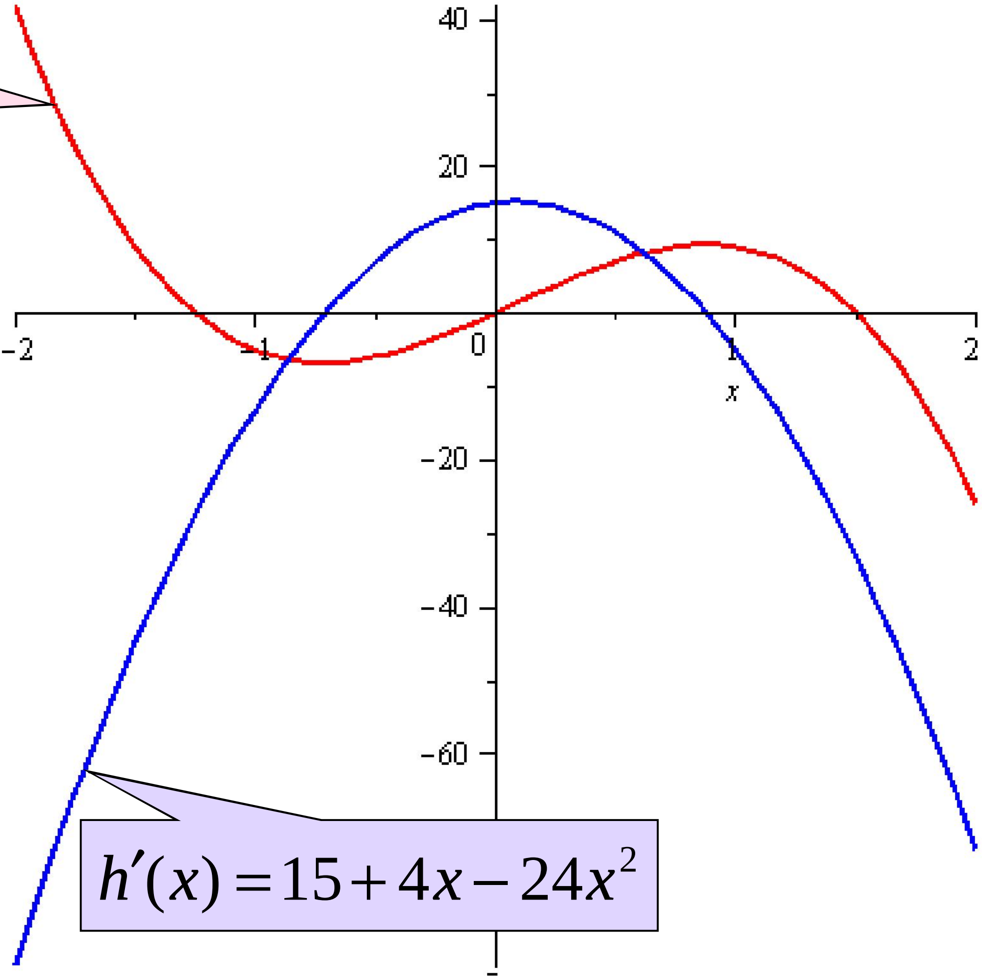
Regras Básicas de Derivação

Exemplo (continuação):

$$h(x) = \left(3x - 2x^2\right)\left(5 + 4x\right)$$

Gráficos da função *h(x)* e de sua derivada *h'(x)* no intervalo [-2;2].

Obs: Os eixos não estão na mesma escala.



$$h'(x) = 15 + 4x - 24x^2$$

Regras Básicas de Derivação

A Regra do Quociente:

O quociente *f/g* de duas funções deriváveis *f* e *g* também é uma função derivável para todos os valores de *x* para os quais $g(x) \neq 0$. Além disso, a derivada de *f/g* é igual à diferença do produto do denominador com a derivada do numerador e do produto do numerador com a derivada do denominador, tudo dividido pelo quadrado do denominador, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Regras Básicas de Derivação

Exemplo:

Calcule a derivada da função $h(x) = \dfrac{5x-2}{x^2+1}$

Considere $h(x) = f(x)/g(x)$ onde $f(x) = 5x-2$ e

$$g(x) = x^2+1$$

Portanto, $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ regra do quociente

Como $f'(x) = 5$ e $g'(x) = 2x$, regras da soma/diferença e da potência

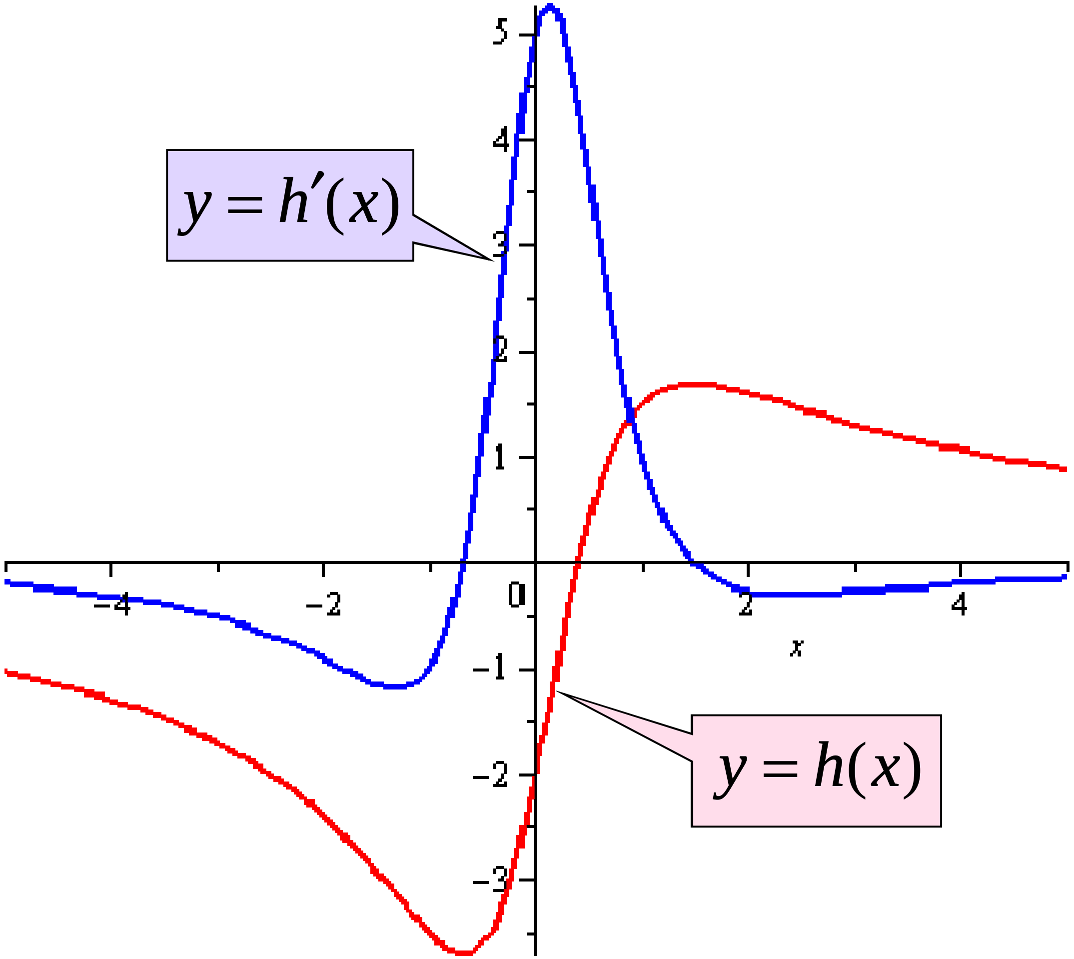
$$h'(x) = \frac{5\left(x^2+1\right) - (5x-2)2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Simplificando, $h'(x) = \boxed{\dfrac{-5x^2+4x+5}{\left(x^2+1\right)^2}}$

Regras Básicas de Derivação

Exemplo (continuação):

Gráficos da função *h(x)* e de sua derivada *h'(x)* no intervalo [-5;5].



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Regra da Cadeia

Esta regra trata da derivada de funções compostas.

Se $y = f(u)$ é uma função derivável na variável u, e $u = g(x)$ é uma função derivável na variável x, então $y = f(g(x))$ é uma função derivável na variável x e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Regra da Cadeia

Exemplo:

Calcule a derivada da função $f(x)=\left(x^2-1\right)^{2/3}$

Considere $f(u)=u^{2/3}$ onde $u=g(x)=x^2-1$

Assim, $f'(u)=\dfrac{2}{3}u^{2/3-1}=\dfrac{2}{3}u^{-1/3}\ \therefore\ f'(g(x))=\dfrac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}$

Ainda, $g'(x)=2x^{2-1}=2x$

Finalizando,

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right]=f'(g(x))g'(x)$$

$$=\left[\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}\right](2x)=\boxed{\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Derivada de Funções Especiais

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = (\sec x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\left[c^x\right] = c^x \ln c \quad \text{para } c > 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Derivadas de Ordem Superior

Aplicação recursiva, em um número apropriado de vezes, da derivada de uma função.

Primeira derivada: $y', \; f'(x), \; \dfrac{dy}{dx}, \; \dfrac{d}{dx}[f(x)]$

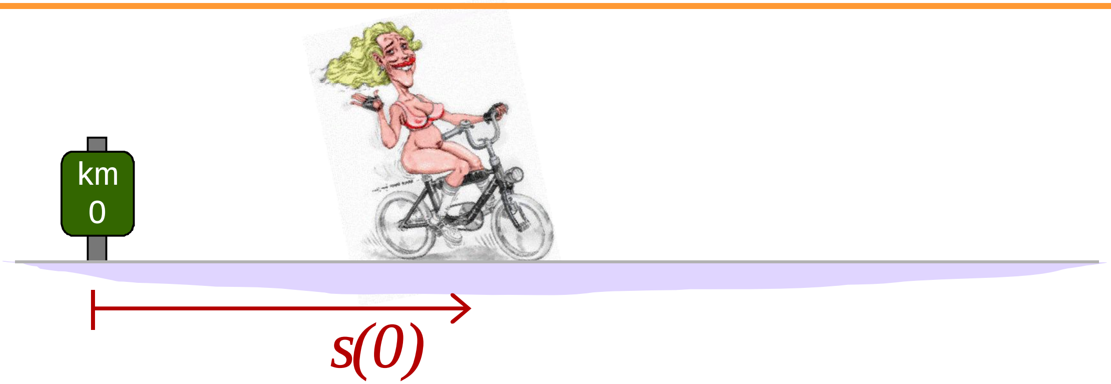
Segunda derivada: $y'', \; f''(x), \; \dfrac{d^2y}{dx^2}, \; \dfrac{d^2}{dx^2}[f(x)]$

Terceira derivada: $y''', \; f'''(x), \; \dfrac{d^3y}{dx^3}, \; \dfrac{d^3}{dx^3}[f(x)]$

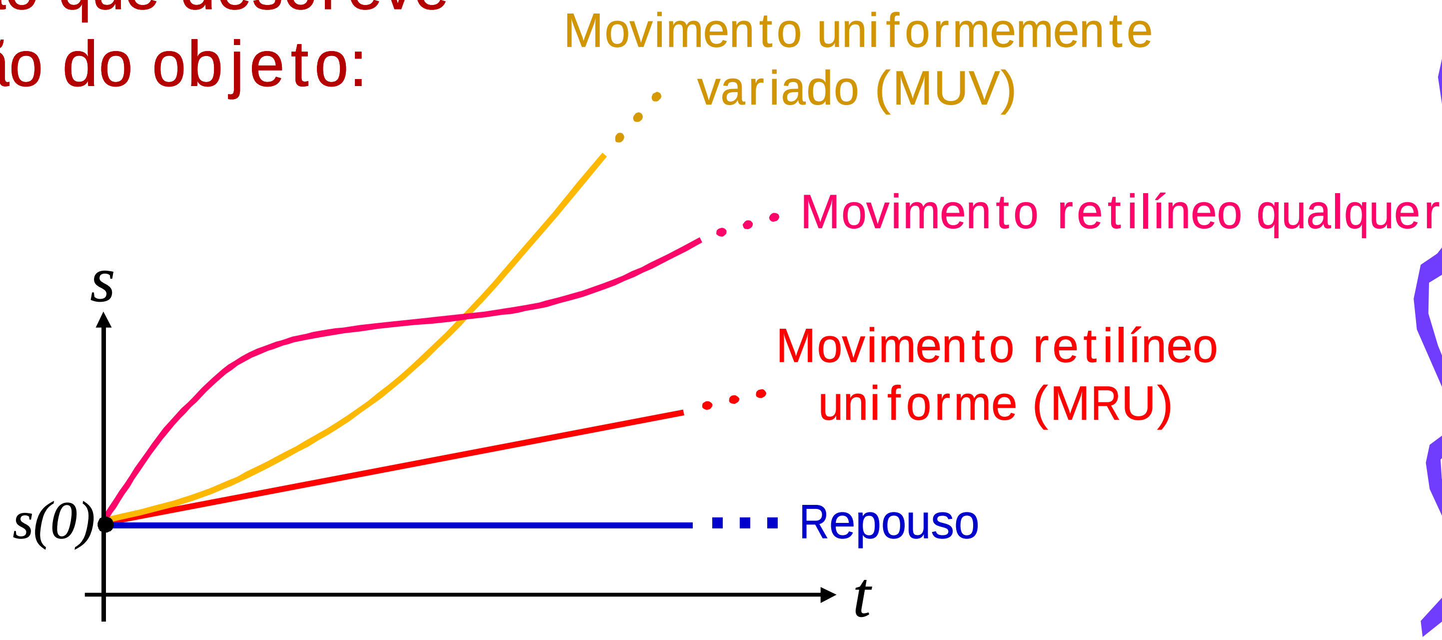
Quarta derivada: $y^{(4)}, \; f^{(4)}(x), \; \dfrac{d^4y}{dx^4}, \; \dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$

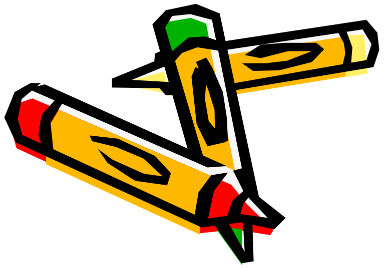
Enésima derivada: $y^{(n)}, \; f^{(n)}(x), \; \dfrac{d^ny}{dx^n}, \; \dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

As Derivadas de Ordem Superior no Estudo do Movimento Retilíneo



A função que descreve a posição do objeto:





Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

As Derivadas de Ordem Superior no Estudo do Movimento Retilíneo

A velocidade do objeto no instante t, ou **velocidade instantânea**, é dada por:

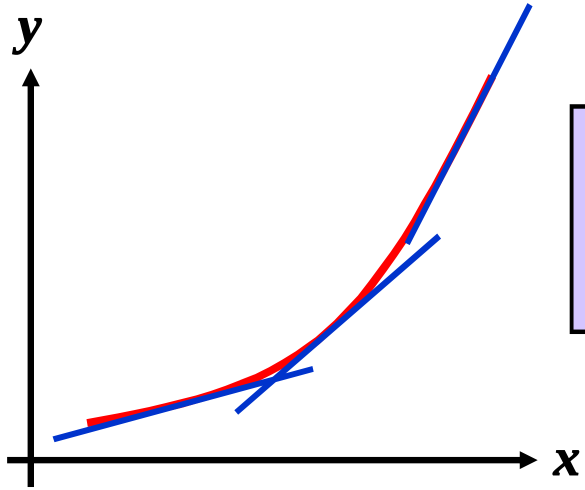
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{d}{dt}\left[s(t)\right]}$$

A aceleração do objeto no instante t, ou **aceleração instantânea**, é dada por:

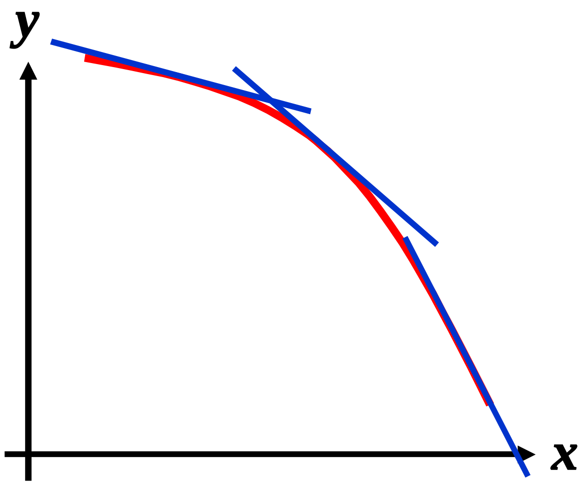
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(t) = \frac{d}{dt}\left[v(t)\right]}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left[s(t)\right]\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[s(t)\right]}$$

A Derivada Segunda e a Concavidade da Curva Descrita por uma Função



A função derivada ***y'*** é **crescente**.
A segunda derivada ***y''*** é **positiva**
A **concavidade da curva** é **para cima**.



A função derivada ***y'*** é **decrescente**.
A segunda derivada ***y''*** é **negativa**.
A **concavidade da curva** é **para baixo**.

Aplicações de Diferenciação

- Restrição de funções

  Necessidade de atendimento de alguma informação conhecida da função derivada para alguns pontos do domínio da função derivada.

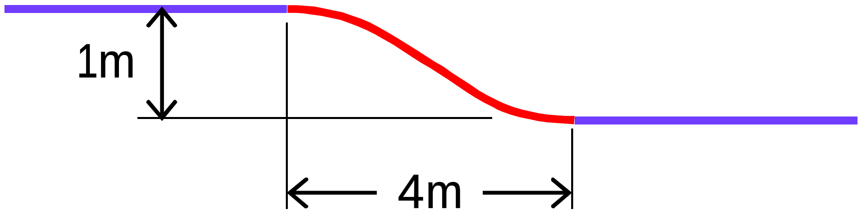
- Otimização de funções

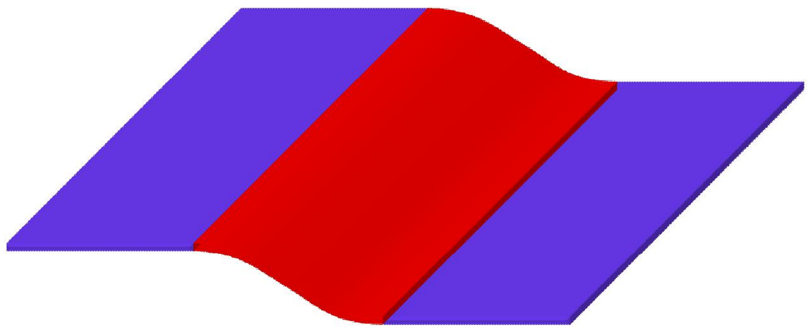
  Determinação dos pontos extremos (máximo e mínimo) de funções (comprimento, área, volume, custo etc).

Aplicações de Diferenciação
- Restrição de Funções -

Exemplo:

A seção lateral de uma coberta é formada por dois trechos horizontais, desnivelados de 1m, ligados por uma curva de transição polinomial do 3º grau, cuja projeção horizontal é de 4m.

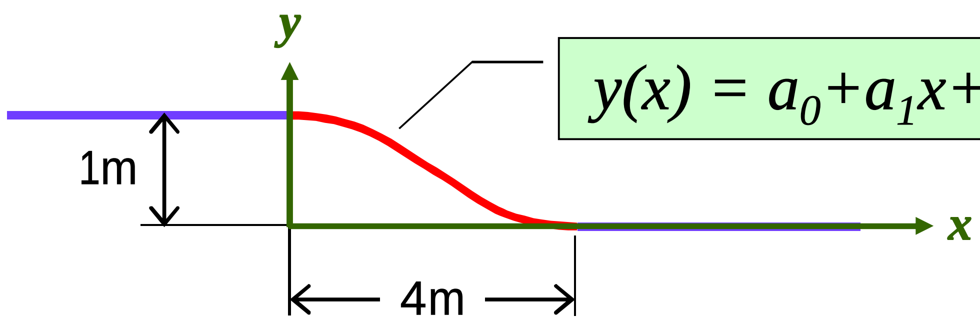




Descrever matematicamente a curva de transição **suave** entre os dois níveis da coberta.

Aplicações de Diferenciação
- Restrição de Funções -

Exemplo (continuação):



$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Restrições

$$\begin{cases} y(0) = 1 & \Rightarrow & a_0 = 1 \\ y(4) = 0 & \Rightarrow & a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 0 \\ y'(0) = 0 & \Rightarrow & a_1 = 0 \\ y'(4) = 0 & \Rightarrow & a_1 + 8a_2 + 48a_3 = 0 \end{cases}$$

$a_0 = 1$ $\quad$ $a_1 = 0$

$a_2 = -3/16$ $\quad$ $a_3 = 1/32$

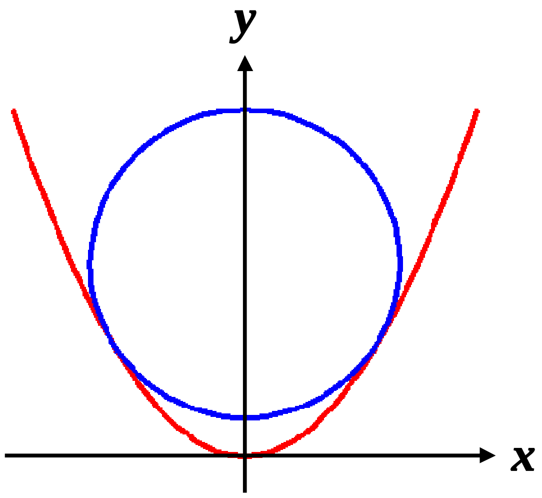
$$\boxed{y(x) = 1 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3}$$

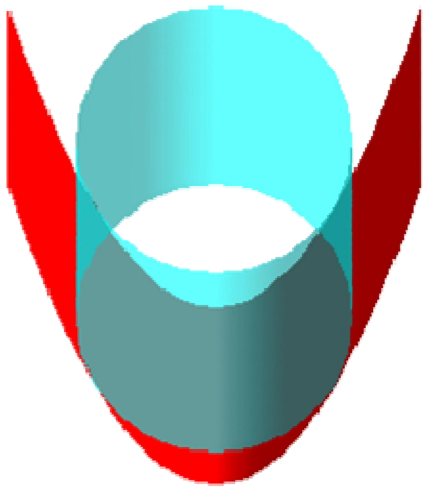
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Restrição de Funções -

Exemplo:

Uma escultura é concebida pela composição de uma folha, na forma de uma parábola ($y = x^2$), combinada com um cilindro de raio unitário, conforme esquema abaixo.



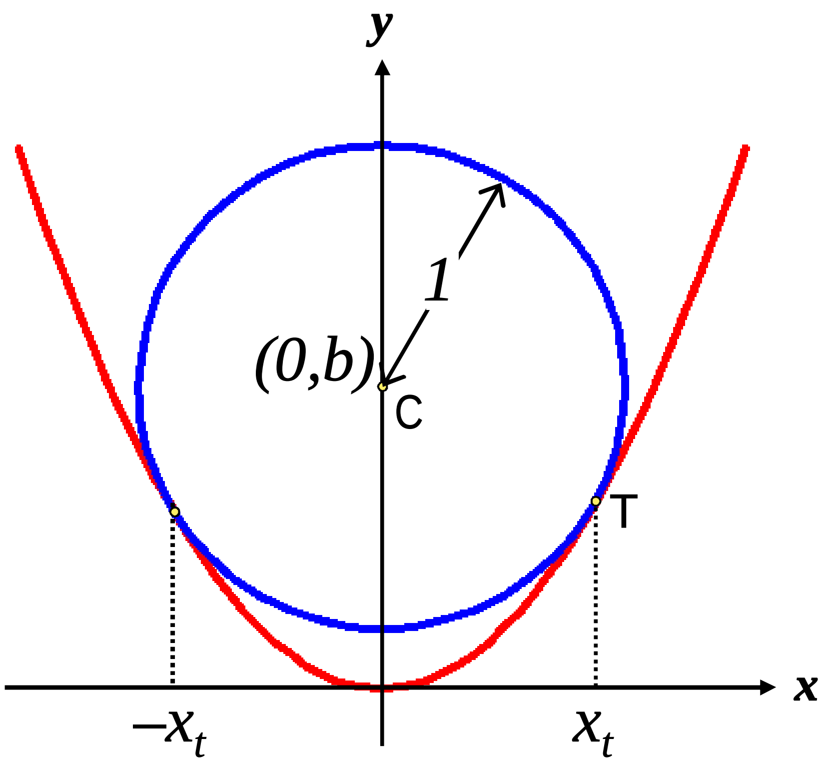


Determinar a ordenada do centro da circunferência geratriz do cilindro.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação - Restrição de Funções -

Exemplo (continuação):



Restrição geométrica

A circunferência tangencia a parábola.

$$y'_p(x_t) = y'_c(x_t)$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação - Restrição de Funções -

Exemplo (continuação):

Curvas
$$\begin{cases} y_p(x) = x^2 \quad \Rightarrow y_p'(x) = 2x \\ y_c(x) = b - \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow y_c'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

Restrição geométrica
$$\begin{cases} 2x_t = \dfrac{x_t}{\sqrt{1-x_t^2}} \quad \Rightarrow x_t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ordenada do centro
$$\begin{cases} C:(0,b) \quad T:\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{4}\right) \\ \overline{CT} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{b = \dfrac{5}{4}} \end{cases}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Definição de Extremos:

Seja f uma função definida num intervalo I que contenha c.

1. $f(c)$ é o **mínimo de f em I** se $f(c) \leq f(x)$ para todo x pertencente a I.
2. $f(c)$ é o **máximo de f em I** se $f(c) \geq f(x)$ para todo x pertencente a I.

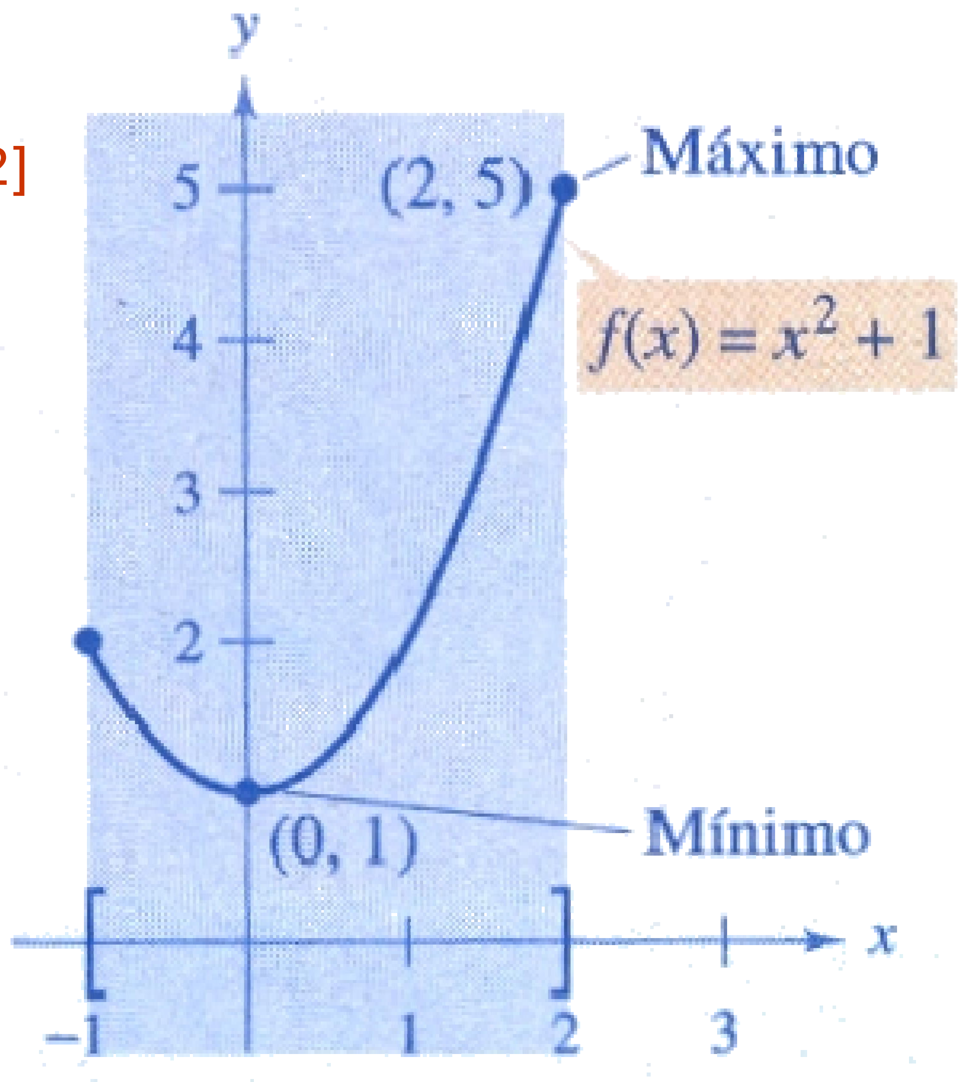
O mínimo e o máximo de uma função em um intervalo são os **valores extremos**, ou **extremos**, da função neste intervalo.

O mínimo e o máximo de uma função em um intervalo são chamados também de **mínimo absoluto** e **máximo absoluto** neste intervalo.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

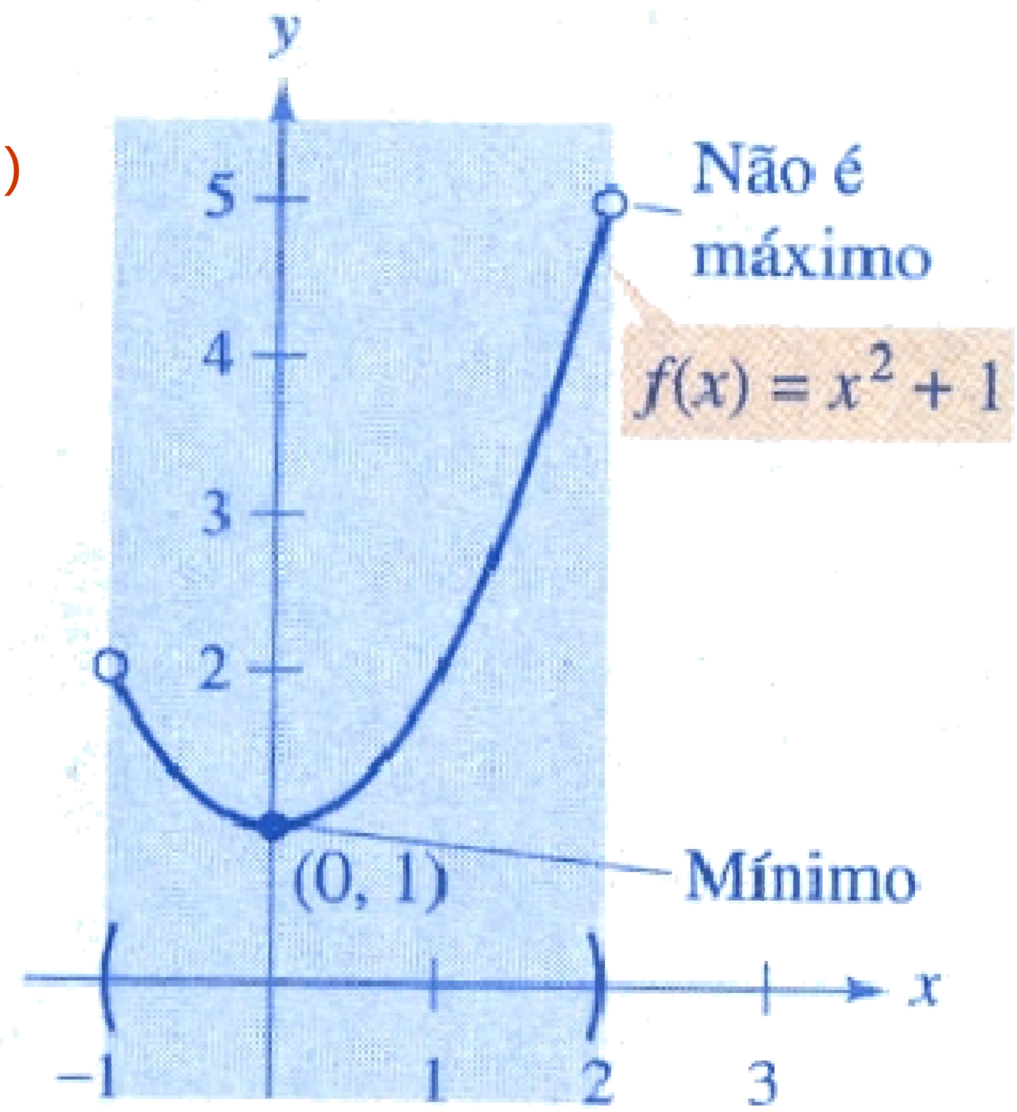
Função contínua no intervalo fechado [-1, 2]



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

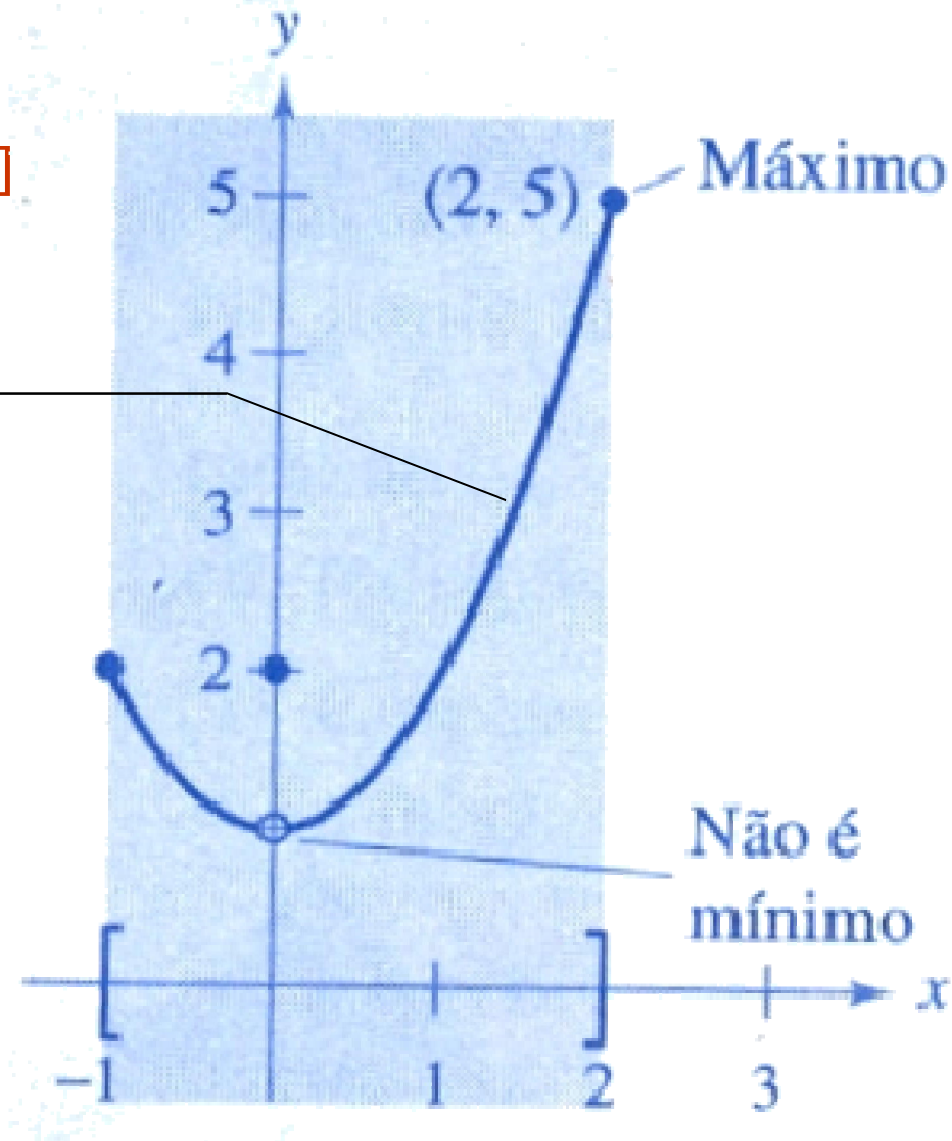
Função contínua no intervalo aberto (-1, 2)



Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Função descontínua no intervalo fechado [-1, 2]

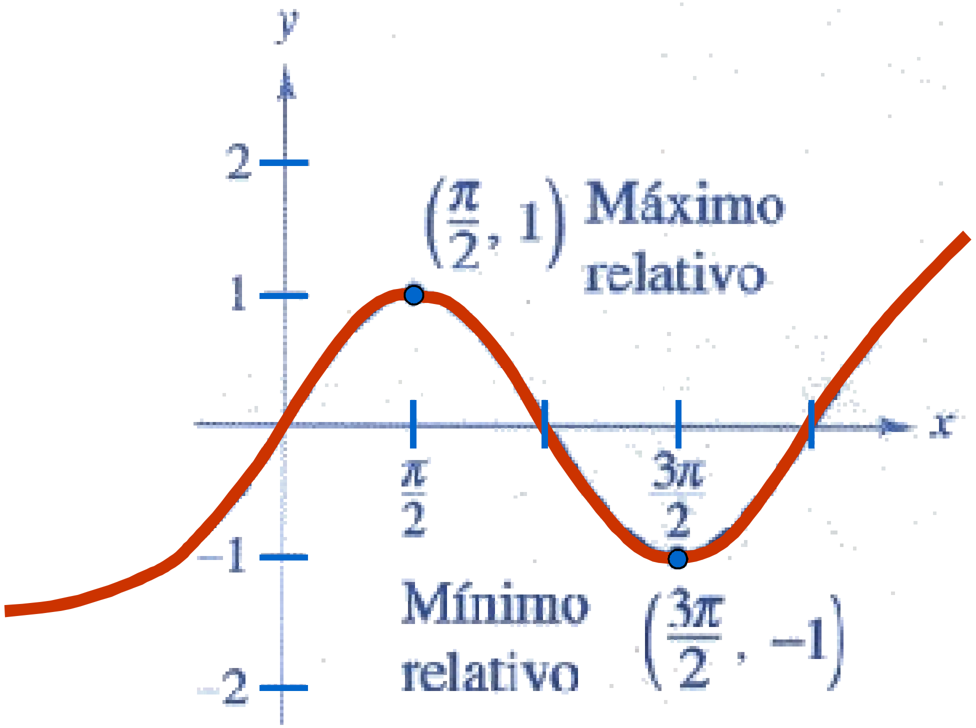
$$g(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$



Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Definição de Extremo Relativo:

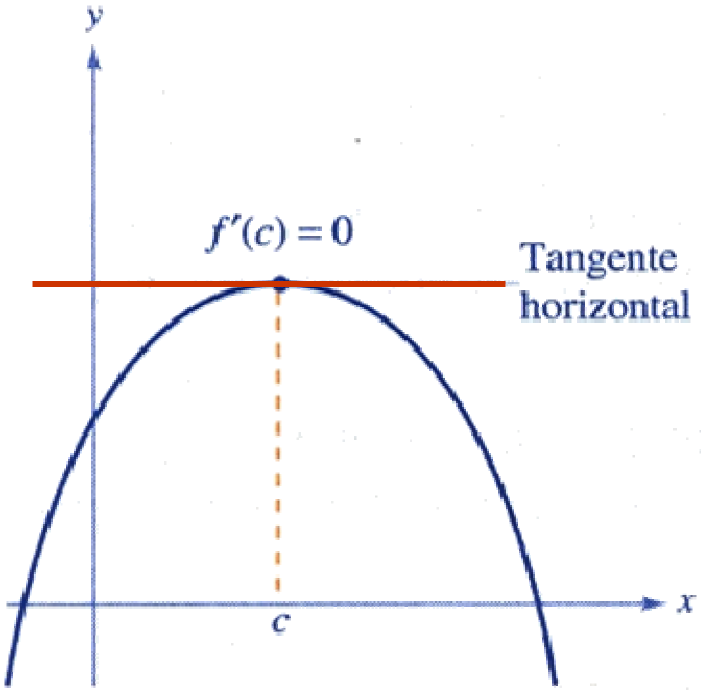
1. Se existe um intervalo aberto contendo c no qual $f(c)$ é um máximo, então $f(c)$ é chamado de **máximo relativo** de f.
2. Se existe um intervalo aberto contendo c no qual $f(c)$ é um mínimo, então $f(c)$ é chamado de **mínimo relativo** de f.

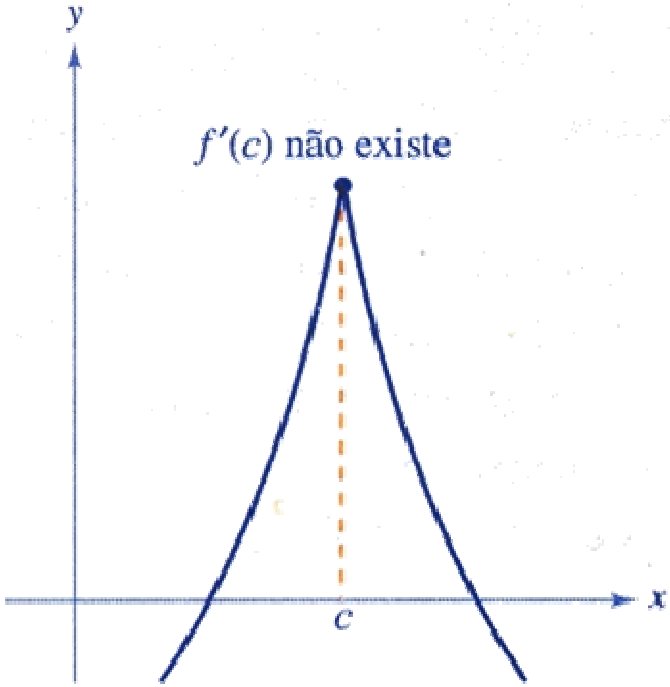


Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Definição de Número Crítico:

Seja f uma função definida em c. Se $f'(c) = 0$ ou se f não é diferenciável em c, então c é um **número crítico** de f.





Teorema: Se f tem um mínimo relativo ou um máximo relativo em $x = c$, então c é um número crítico de f.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Encontrando Extremos em um Intervalo Fechado:

Para encontrar os extremos de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$ deve-se

1. Achar os números críticos em (a, b).
2. Calcular f em cada número crítico em (a, b).
3. Calcular f nas extremidades de (a, b).
4. O menor desses valores é o mínimo. O maior é o máximo.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Exemplo:

Ache os extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ no intervalo $[-1, 2]$.

Passo 1: Achar os pontos críticos

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \therefore \; 12x^3 - 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

Passo 2: Achar o valor da função nos pontos críticos

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = -1$$

Passo 3: Calcular o valor da função nas extremidades do intervalo

$$f(-1) = 7 \quad \text{e} \quad f(2) = 16$$

Passo 4: Identificar os valores extremos

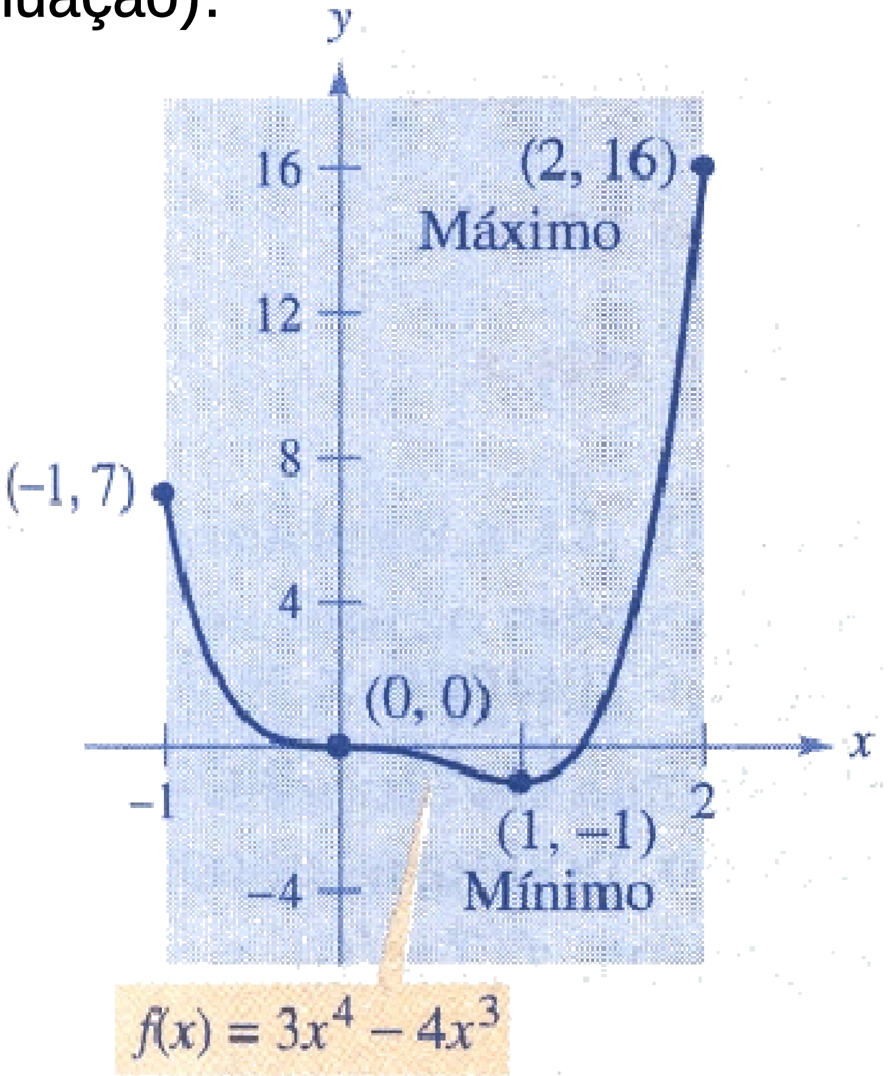
Valor mínimo igual a -1 em $x = 1$

Valor máximo igual a 16 em $x = 2$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Exemplo:

Ache os extremos de $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ no intervalo [-1, 3].

Passo 1: Achar os pontos críticos

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = 2\,\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \therefore \quad 2\,\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

No entanto, $x = 0$ também é número crítico, uma vez que $f'(0)$ não existe.

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

Passo 2: Achar o valor da função nos pontos críticos

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = -1$$

Passo 3: Calcular o valor da função nas extremidades do intervalo

$$f(-1) = -5 \quad \text{e} \quad f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0,24$$

Passo 4: Identificar os valores extremos

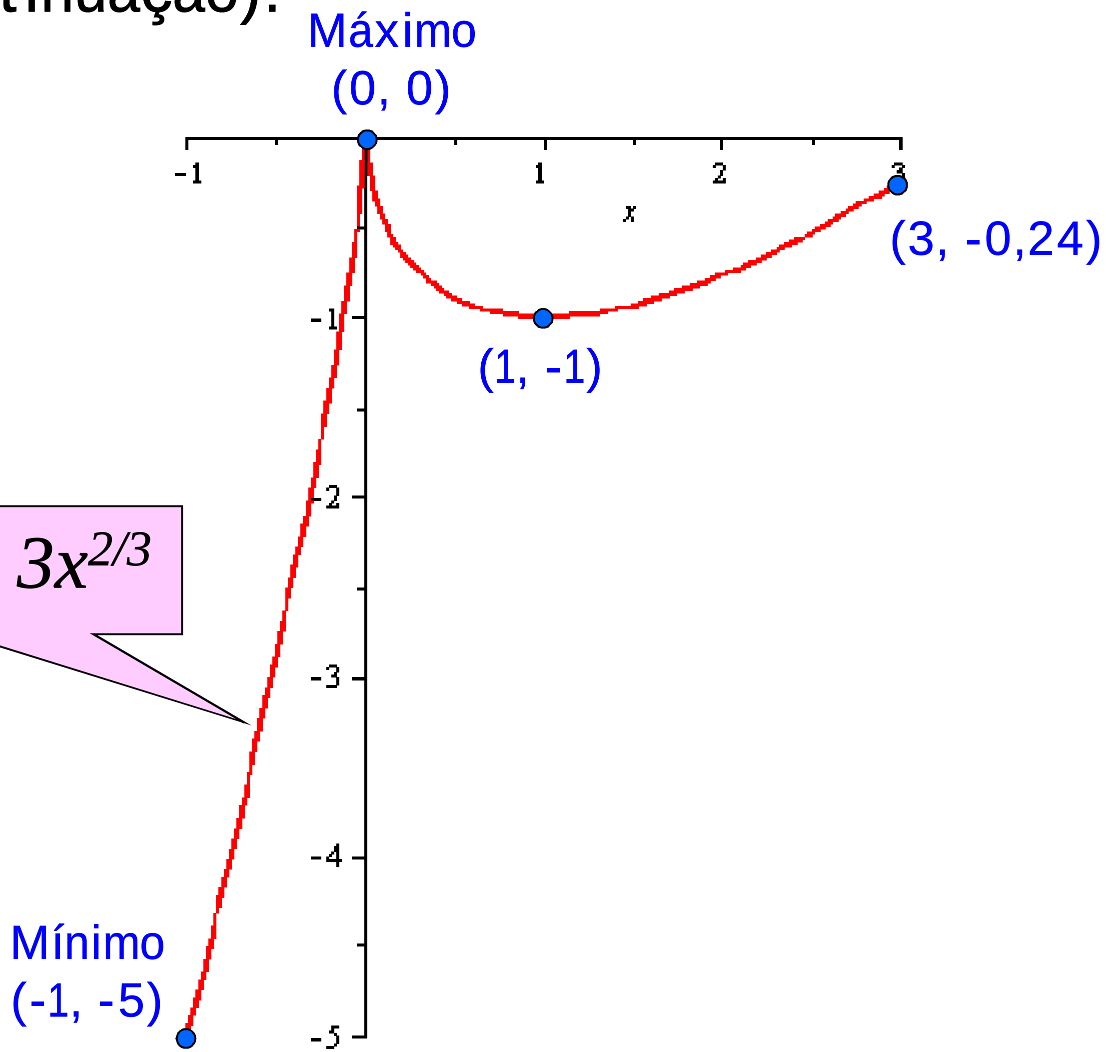
Valor mínimo igual a -5 em $x = -1$

Valor máximo igual a 0 em $x = 0$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

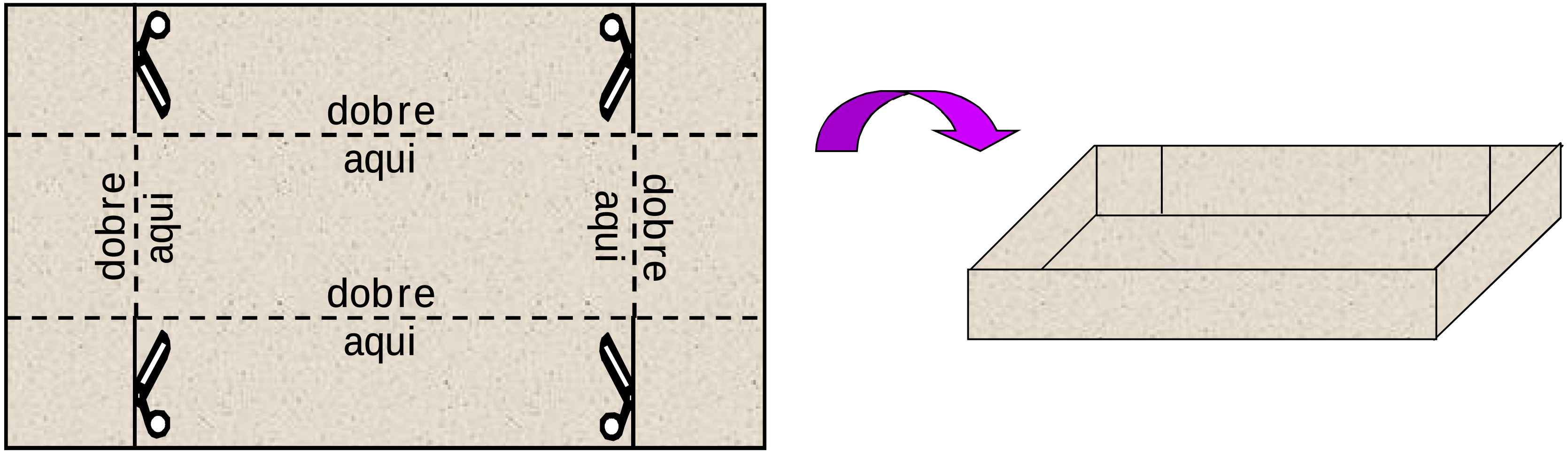


$$f(x) = 2x - 3x^{2/3}$$

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Exemplo (revisitando o problema da caixa):

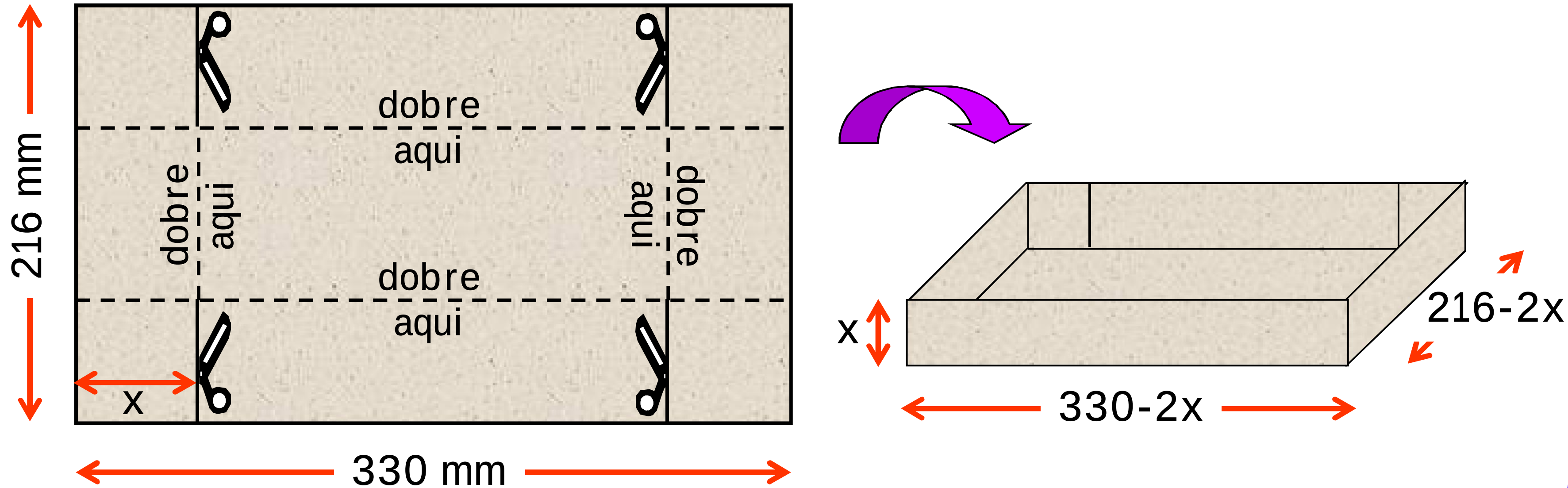
Deseja-se construir uma caixa aberta a partir de uma folha de papel Ofício 2 cortando arestas de quadrados iguais nos cantos e dobrando os lados para cima (agora com a técnica da aba), conforme esquematização abaixo.



Determinar a medida de corte que resulte em uma caixa de maior volume. Qual o volume da caixa otimizada?

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):



$$V(x) = x(330-2x)(216-2x)$$

$$\boxed{\begin{gathered} V(x) = 4x^3 - 1092x^2 + 71280x \\ 0 \le x \le 108 \text{ mm} \end{gathered}}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

Ache o ponto de máximo da função

$$V(x) = 4x^3 - 1092x^2 + 71280x$$

no intervalo [0, 108].

Passo 1: Achar os pontos críticos

$$f'(x) = 12x^2 - 2184x + 71280$$

$$f'(x) = 0 \;\therefore\; 12x^2 - 2184x + 71280 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 91 - \sqrt{2341} \approx 42{,}6 \\ x = 91 + \sqrt{2341} \approx \cancel{139{,}4} \end{cases}$$

Fora do domínio

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

Passo 2: Achar o valor da função no ponto crítico

$$V(91-\sqrt{2341}) = 457912 + 18728\sqrt{2341}$$

$$\approx 1364045{,}3$$

Passo 3: Calcular o valor da função nas extremidades do intervalo

$$V(0) = V(108) = 0$$

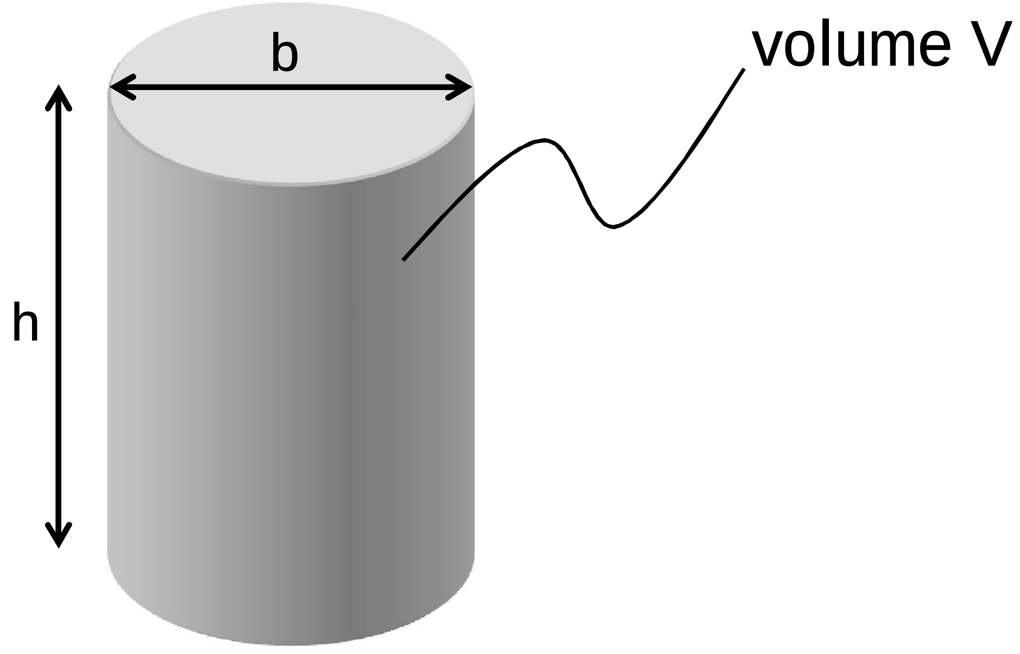
Passo 4: Identificar o valor máximo

Valor máximo igual a 1364045,3 mm^3 (1364,0 cm^3) para x = 42,6 mm (4,26 cm)

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo:

Deseja-se construir um recipiente no formato de um cilindro fechado para comportar um volume conhecido. Descobrir as dimensões do cilindro (diâmetro e altura) correspondente ao recipiente ótimo (menor gasto de material).



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Aplicações de Diferenciação
- Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

Relação entre as dimensões do cilindro em função da restrição do volume

$$V=\frac{\pi b^2}{4}h \quad \Rightarrow \quad h=\frac{4V}{\pi b^2}$$

Área da superfície do cilindro

$$A=2\frac{\pi b^2}{4}+\pi bh$$

$$A=2\frac{\pi b^2}{4}+\pi b\left(\frac{4V}{\pi b^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A(b)=\frac{\pi b^2}{2}+\frac{4V}{b}$$

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

Ache o ponto de mínimo da função correspondente à área da superfície do cilindro no intervalo [*0*, ∞[, onde

$$A(b) = \frac{\pi b^2}{2} + \frac{4V}{b}$$

Passo 1: Achar os pontos críticos

$$A'(b) = \pi b - \frac{4V}{b^2} = \frac{\pi b^3 - 4V}{b^2}$$

$$A'(b) = 0 \quad \therefore \quad \frac{\pi b^3 - 4V}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

O outro número crítico existente, $b = 0$, será tratado como extremidade do intervalo.

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

Exemplo (continuação):

Passo 2: Achar o valor da função no ponto crítico

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Passo 3: Calcular o valor da função nas extremidades do intervalo

$$\lim_{b \to 0} A(b) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{b \to \infty} A(b) = \infty$$

Passo 4: Identificar o valor extremo de interesse

Valor mínimo igual a $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ em $b = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$

Aplicações de Diferenciação - Otimização de Funções -

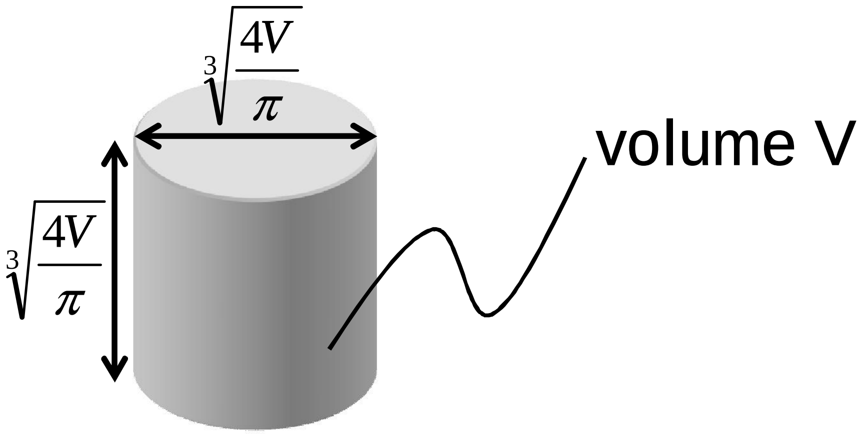
Exemplo (continuação):

Altura do cilindro para o projeto da superfície mínima

$$h = \frac{4V}{\pi b^2} \qquad b_o = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \qquad \therefore\ h_o = \frac{4V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ h_o = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

$$\boxed{h_o = b_o}$$



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL