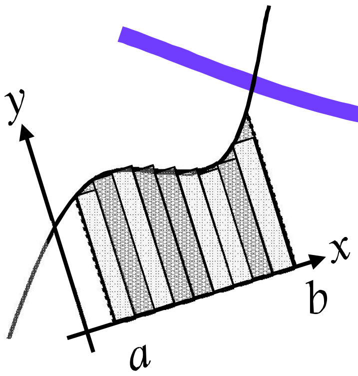
Universidade Federal de Alagoas
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo
Curso de Arquitetura e Urbanismo

Disciplina: Fundamentos para a Análise Estrutural
Código: AURB006 **Turma:** A **Período Letivo:** 2007-2

Professor: Eduardo Nobre Lages

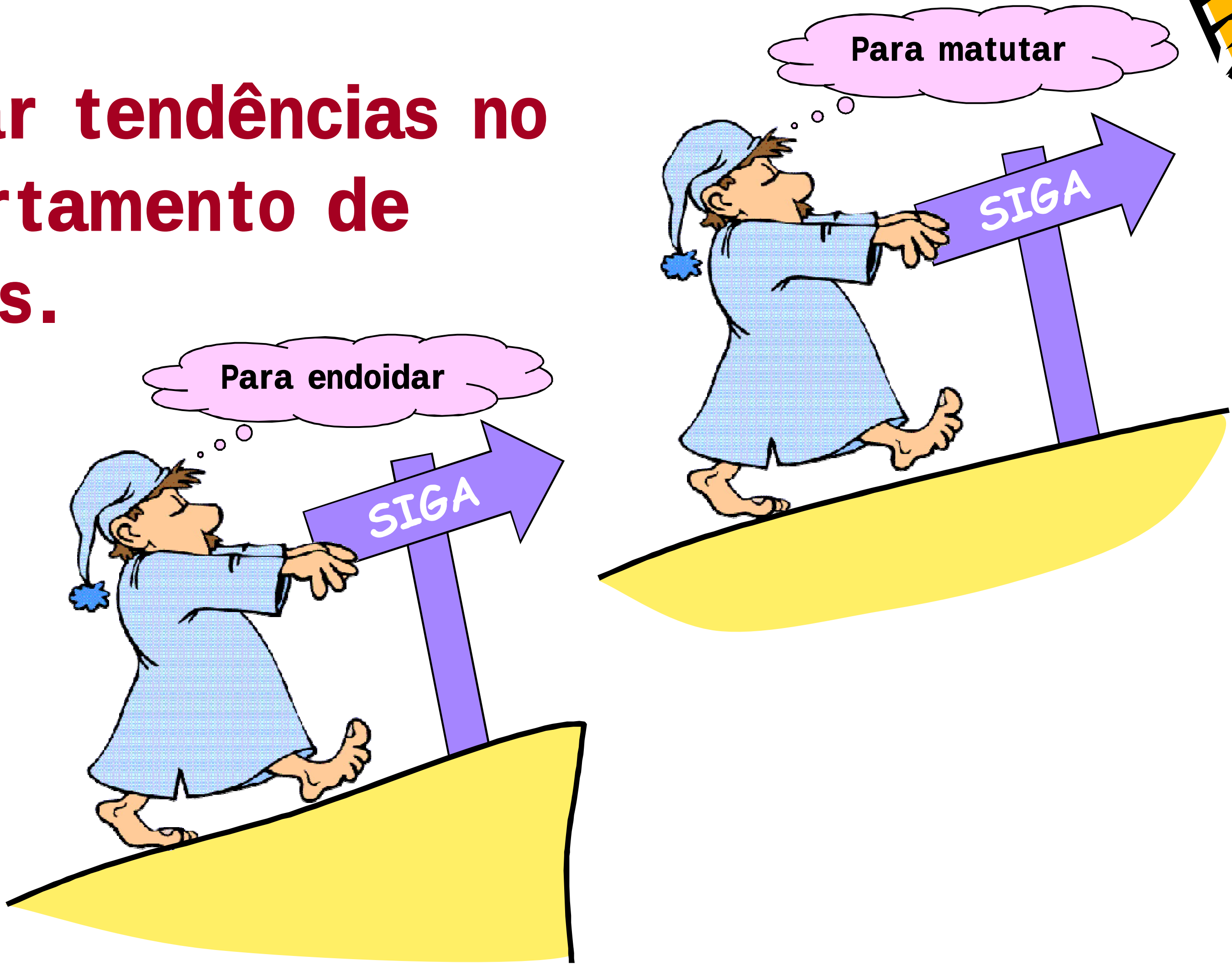
Limites

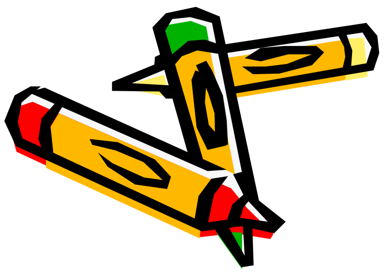


Maceió/AL

Objetivo

Estudar tendências no comportamento de funções.

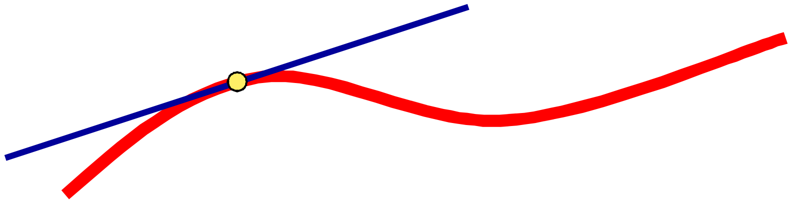




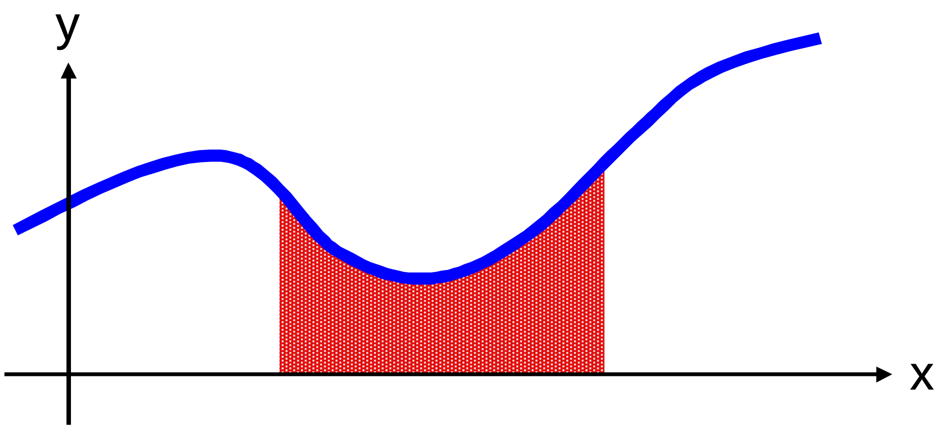
Motivação

Problemas clássicos do cálculo:

- **O problema da reta tangente**

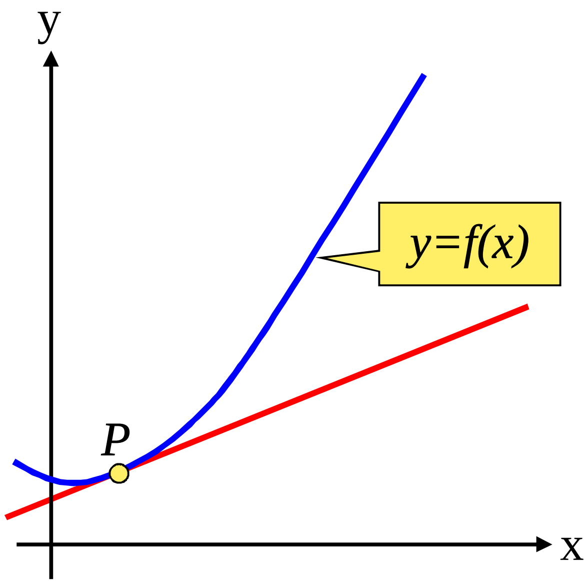


- **O problema da área**



O Problema da Reta Tangente

Dada uma função $f(x)$ e um ponto P em seu gráfico, pede-se que seja encontrada a equação da reta tangente ao gráfico no ponto P.

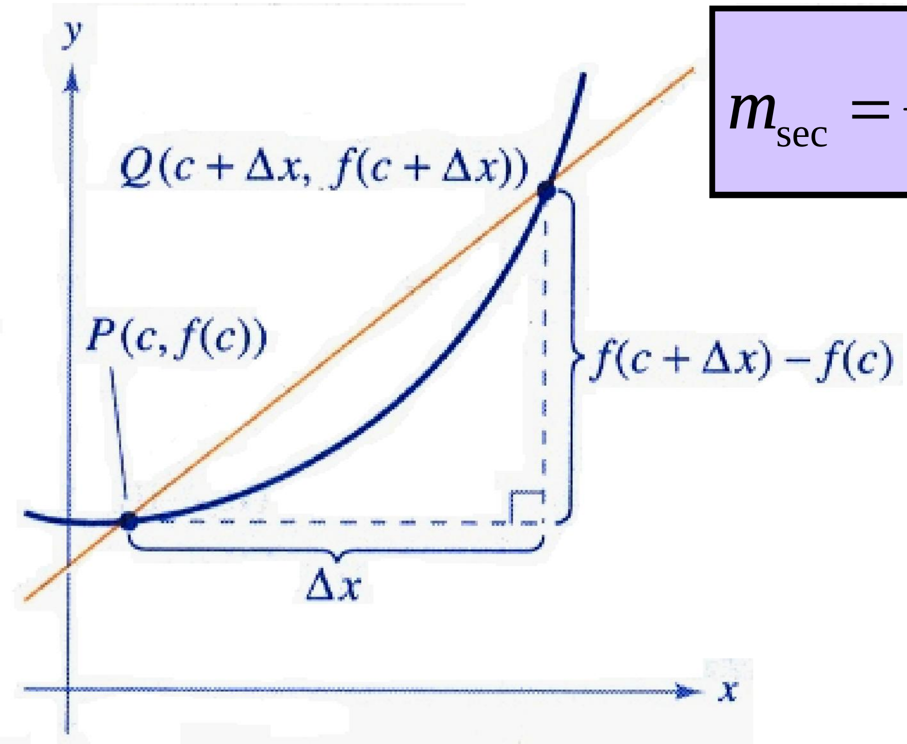


Este problema é equivalente ao de encontrar o ***coeficiente angular*** da reta tangente em P.

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

O Problema da Reta Tangente

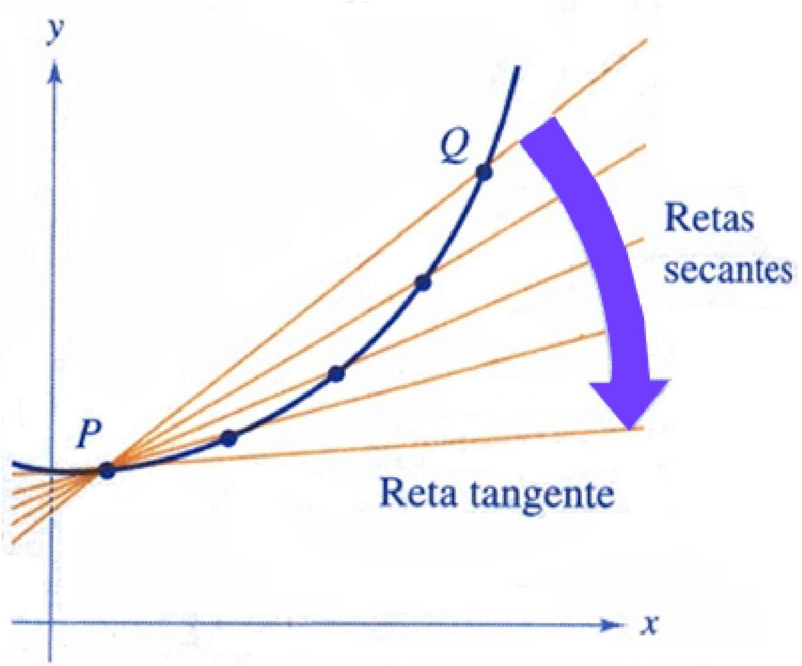
É possível se aproximar desse ***coeficiente angular*** usando uma ***reta secante*** que passa pelo ***ponto de tangência*** P e um segundo ponto na curva Q.

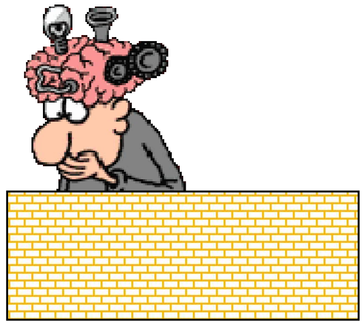


$$m_{\sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

O Problema da Reta Tangente

Conforme o ponto Q se aproxima do ponto P, o ***coeficiente angular*** da ***reta secante*** se aproxima do ***coeficiente angular*** da ***reta tangente***.



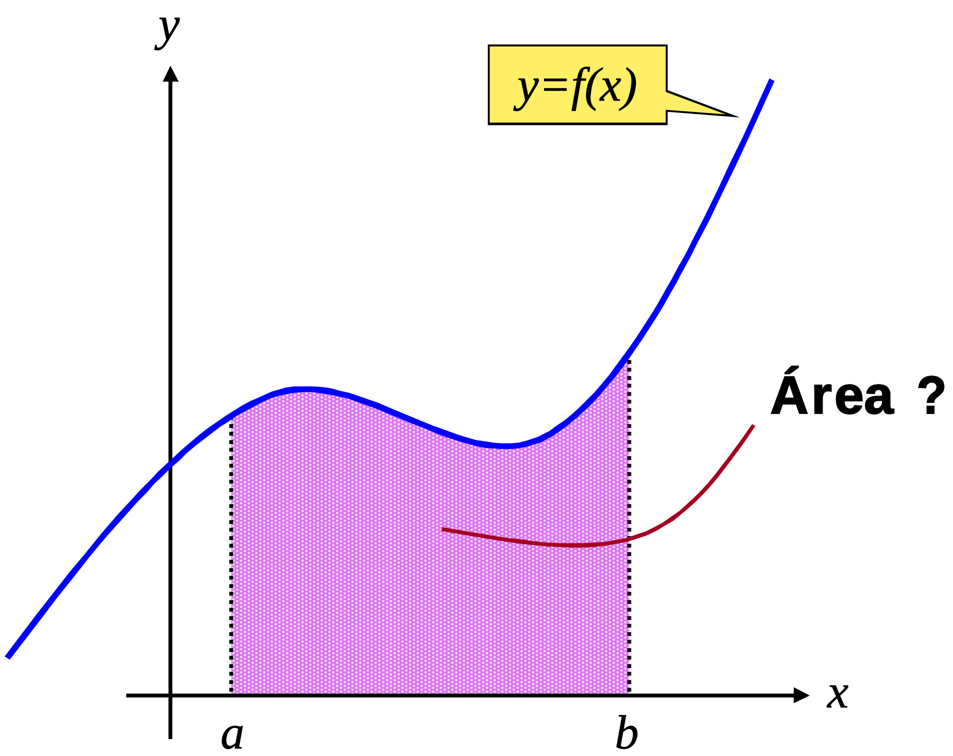


Quando essa "posição limite" existir, o coeficiente angular da reta tangente é chamado de **limite** do coeficiente angular da reta secante .

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

O Problema da Área

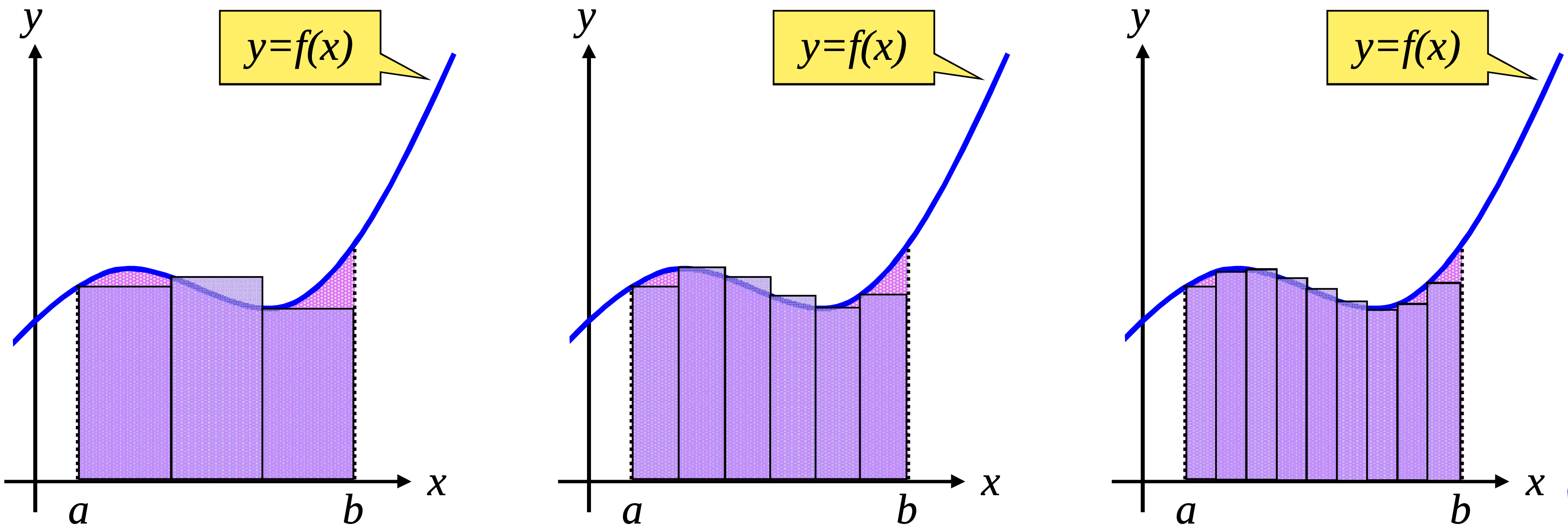
Considere a região delimitada pelo gráfico da função $f(x)$, o eixo x, e as retas verticais $x = a$ e $x = b$.



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

O Problema da Área

Vamos aproximar a região em pauta com diversas regiões retangulares.

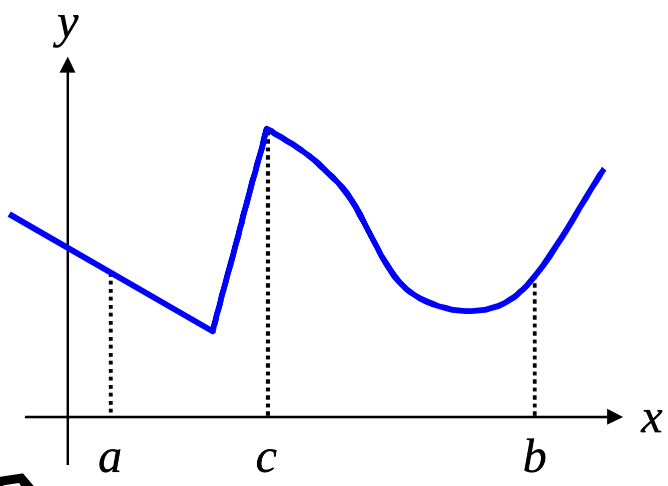


Como sabemos calcular a área de um retângulo, à medida que o número de retângulos for crescendo, a composição das áreas tenderá ao valor da área da região original. Nossa meta é determinar o **limite** da soma das áreas dos retângulos conforme o número de retângulos aumente indefinidamente.

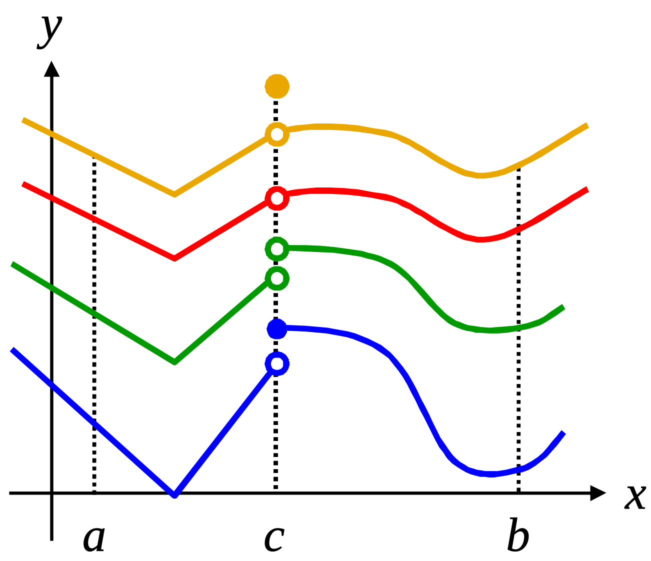
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Continuidade de uma Função

Uma função é dita **contínua** num ponto se existe um intervalo aberto $]a,b[$, envolvendo este ponto, para o qual a função é definida para todos os pontos deste intervalo e quando a construção do gráfico desta função pode ser feita “sem retirar a caneta do papel”.



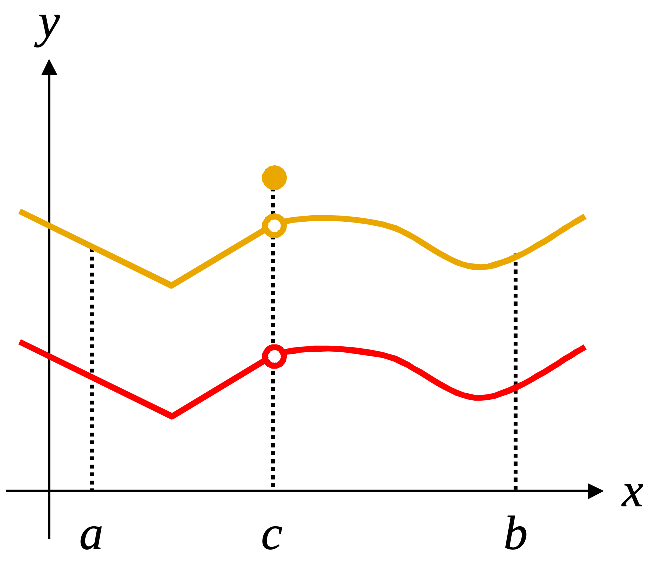
Função contínua



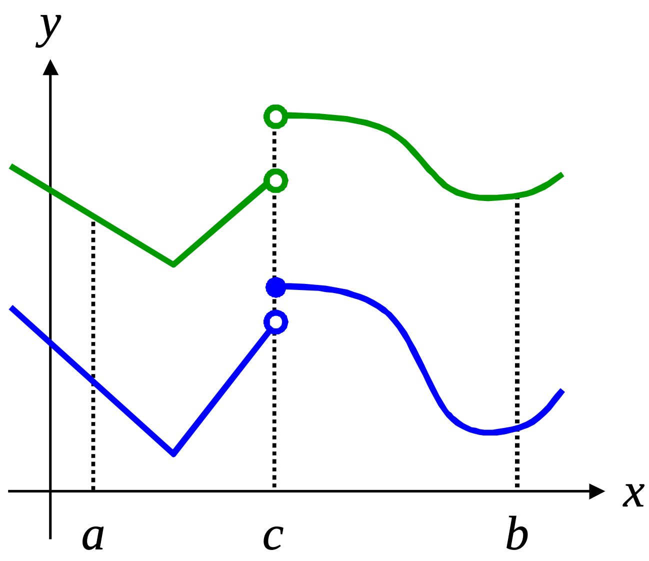
Funções descontínuas

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Tipos de Descontinuidades



Descontinuidade removível



Descontinuidade não removível

Uma descontinuidade em c é chamada **removível** se f pode tornar-se contínua por uma definição (ou redefinição) apropriada de $f(c)$.

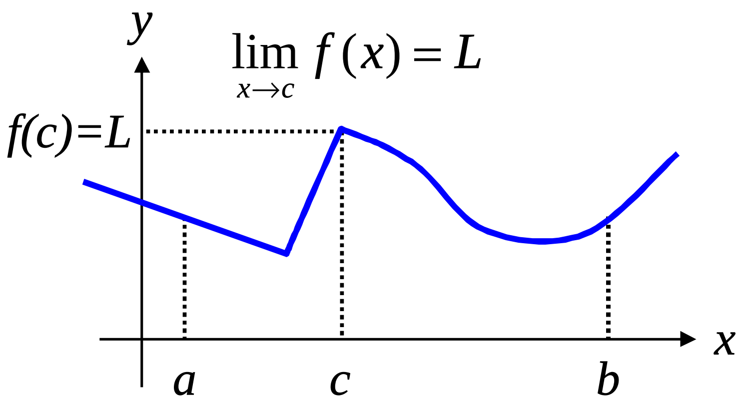
Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Definição Informal de Limite

Se *f(x)* torna-se arbitrariamente próxima de um único número L conforme x se aproxima de c por ambos os lados, o limite de *f(x)*, para x tendendo a c, é L.

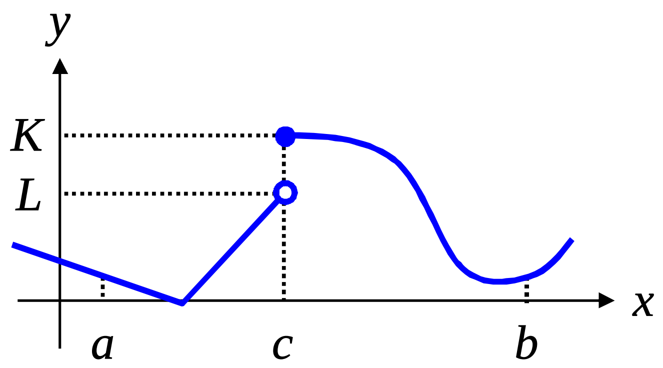
Esse limite é escrito como $\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$

Para funções contínuas o limite da função num ponto qualquer se confunde com o valor da função neste ponto.



Definição Informal de Limite

O limite de uma função descontínua num dado ponto de descontinuidade, não removível, não existe. Neste caso, existem **limites laterais**, quando se aproxima do ponto em pauta por um lado ou outro do intervalo.



Limite pela esquerda:
significa que x se aproxima de c por valores menores que c.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Limite pela direita:
significa que x se aproxima de c por valores maiores que c.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = K$$

Estimando o Limite Numericamente

Faz-se uso do valor da função em pontos vizinhos do ponto de interesse, tornando-os cada vez mais próximos.

Exemplo: Calcule o valor da função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

em diversos pontos na proximidade de $x = 0$ e use os resultados para fazer uma estimativa do limite.

Domínio da função: $D = \{x \in \Re \mid x \geq -1 \text{ e } x \neq 0\}$

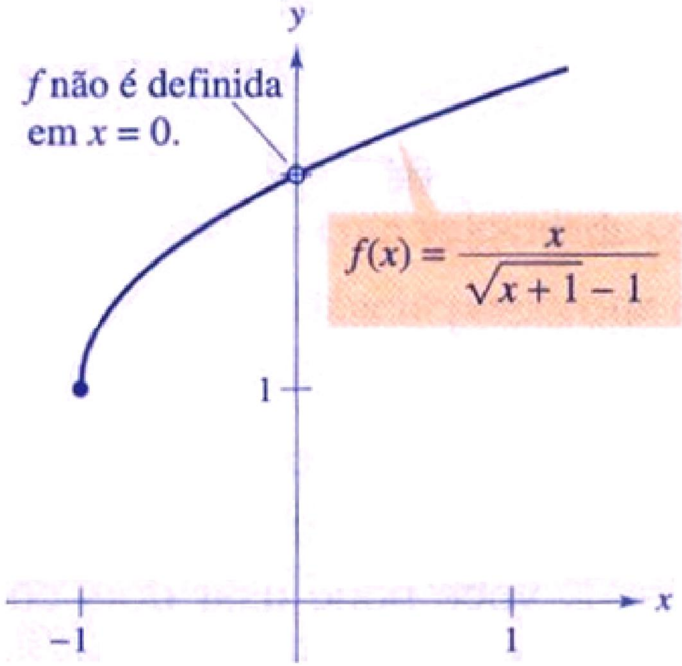
Estimando o Limite Numericamente

Tabela auxiliar para cálculo do limite de f em $x = 0$:

x	-0,01	-0,001	-0,0001	**0**	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	1,99499	1,99950	1,99995	**?**	2,00005	2,00050	2,00499

A partir dos resultados vistos na tabela, é possível fazer uma estimativa de que o valor limite é *2*.

Este resultado é reforçado pelo gráfico de *f*.



Estimando o Limite Numericamente

Exemplo: Estime, em $x = 3$, o limite da função

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 3 \\ 12 - 2x, & x > 3 \end{cases}$$

Tabela auxiliar para cálculo do limite de f em $x = 3$:

x	*2,9*	*2,99*	*2,999*	***3***	*3,001*	*3,01*	*3,1*
f(x)	*4,9*	*4,99*	*4,999*	***?***	*5,998*	*5,98*	*5,8*

A partir dos resultados vistos na tabela, observa-se que não há convergência para um valor comum, indicando a presença de limites laterais. Portanto,

$$\boxed{\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5} \qquad \boxed{\lim_{x \to 3^+} f(x) = 6}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Propriedades de Limites

Sejam b e c números reais, seja n um inteiro positivo, e sejam f e g funções com os seguintes limites:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

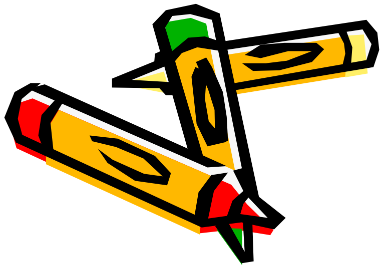
1. Multiplicação por um escalar: $\lim_{x\to c}\left[bf(x)\right] = bL$
2. Soma ou diferença: $\lim_{x\to c}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm K$
3. Produto: $\lim_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right] = LK$
4. Quociente: $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$
5. Potência: $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = L^n$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Uma Estratégia para Encontrar Limites

Seja c um número real e seja $f(x) = g(x)$ para todo x diferente de c em um intervalo aberto contendo c. Se existe o limite de $g(x)$ para x tendendo a c, então também existe o limite de $f(x)$ e

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)}$$



Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Uma Estratégia para Encontrar Limites

Exemplo:

Encontre $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

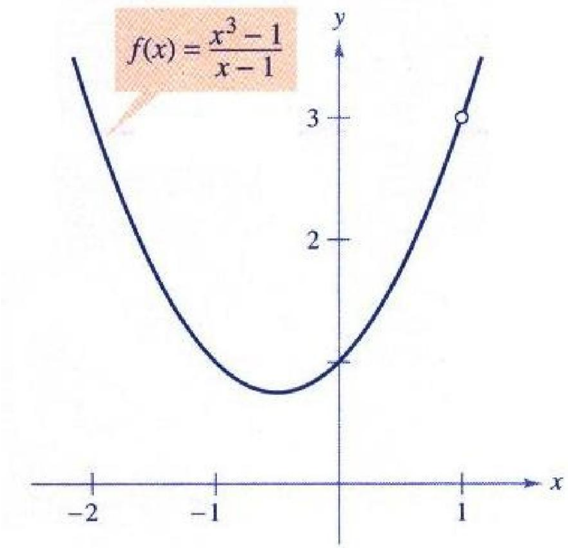
Considere $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, que não é definida em $x = 1$.

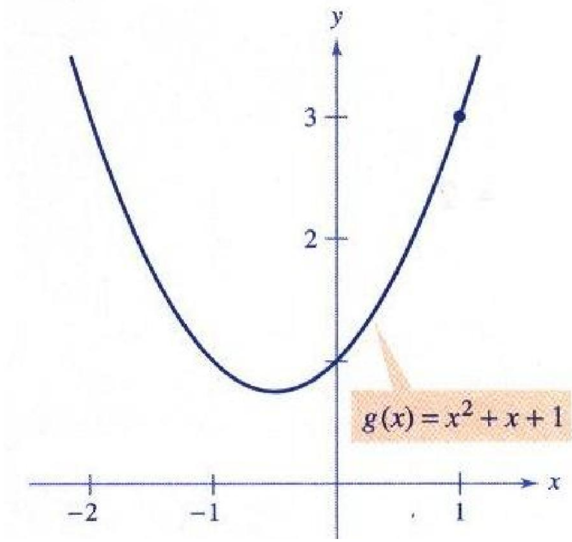
É possível fatorar $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} = \boxed{x^2 + x + 1 = g(x)}$$

Uma Estratégia para Encontrar Limites

Exemplo (continuação):





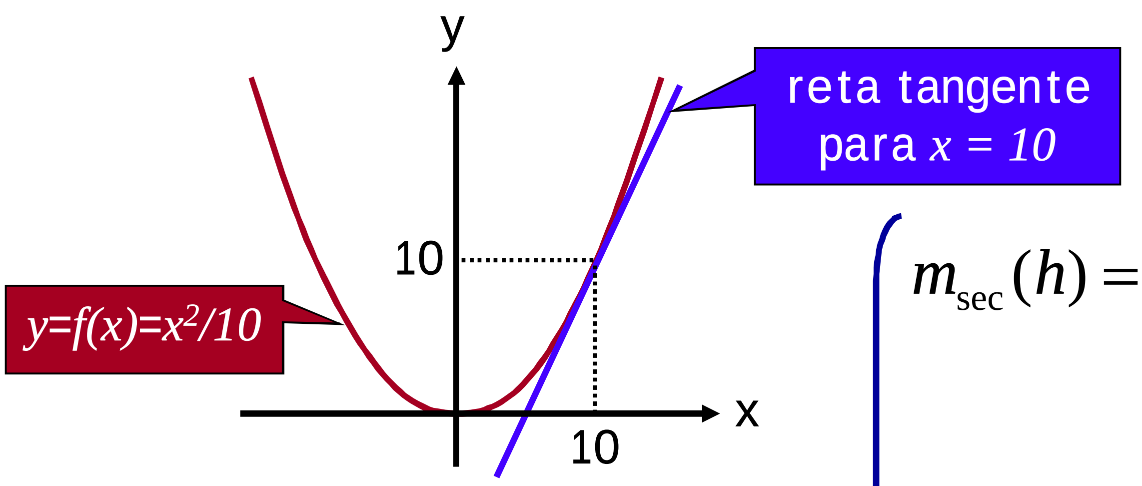
Para todos os valores de x, com exceção de $x = 1$, as funções f e g são coincidentes, e como o limite da função g existe para $x = 1$, tem-se que

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 3}$$

Eduardo Nobre Lages – CTEC/UFAL

Uma Estratégia para Encontrar Limites

Exemplo (resgate do problema da reta tangente):



$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} m_{sec}(h)$$

onde

P(10,10) e
Q(10+h,(10+h)²)

$$\begin{cases} m_{sec}(h) = \dfrac{f(10+h) - f(10)}{(10+h) - 10} \\[2ex] m_{tan} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{(10+h)^2}{10} - \dfrac{10^2}{10}}{h} \\[2ex] m_{tan} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h + \dfrac{h^2}{10}}{h} \\[2ex] m_{tan} = \lim\limits_{h\to 0} \left(2 + \dfrac{h}{10}\right) \Rightarrow \boxed{m_{tan} = 2} \end{cases}$$