



**Universidade Federal de Alagoas – UFAL**  
**Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC**

---



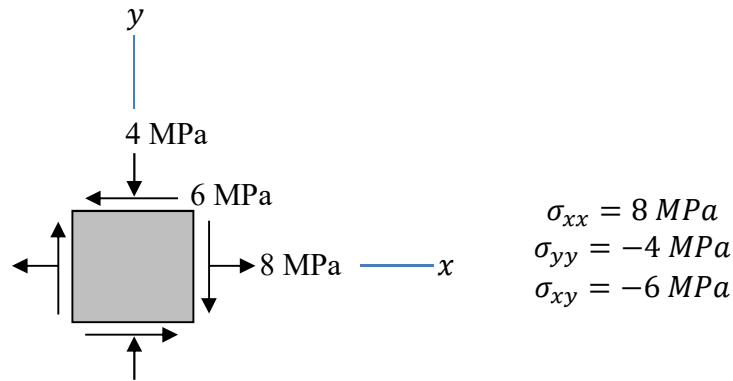
**Seleção 2019.1 – Prova de Conhecimentos**

**G A B A R I T O**

**Maceió/AL, 12/02/2019**

## GABARITO – QUESTÃO 1

**Preliminares:** Indicação do sistema de referência cartesiano plano e identificação dos respectivos componentes



**a) Representar graficamente o elemento adequadamente orientado no qual estão presentes as tensões principais**

**a.1) Cálculo das tensões principais**

Tensão normal média e raio do círculo de Mohr

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{8 + (-4)}{2} = 2 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{8 - (-4)}{2}\right)^2 + (-6)^2} = 8,485 \text{ MPa}$$

Tensões principais

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 2 + 8,485 = 10,485 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = 2 - 8,485 = -6,485 \text{ MPa}$$

**a.2) Cálculo das direções principais**

$$\tan(2\theta_p) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2(-6)}{8 - (-4)} = -1$$

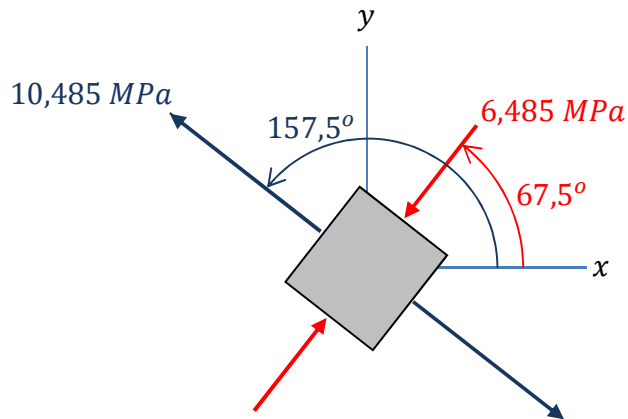
Considerando só ângulos principais positivos

$$2\theta_p = \begin{cases} 135^\circ \\ 315^\circ \end{cases} \text{ ou } \theta_p = \begin{cases} 67,5^\circ \\ 157,5^\circ \end{cases}$$

como  $\sigma_{xy} < 0$ , o menor dos ângulos principais está associado à direção principal 2 e o maior dos ângulos à direção principal 1, ou seja,

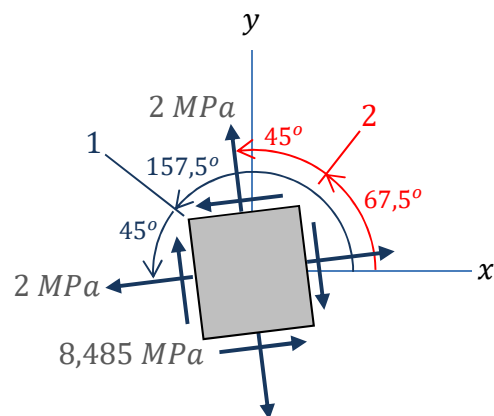
$$\theta_1 = 157,5^\circ \text{ e } \theta_2 = 67,5^\circ$$

**a.3) Representação gráfica do estado principal de tensão**



**b) Fazer o mesmo para o elemento adequadamente orientado no qual estão presentes as tensões extremas de cisalhamento**

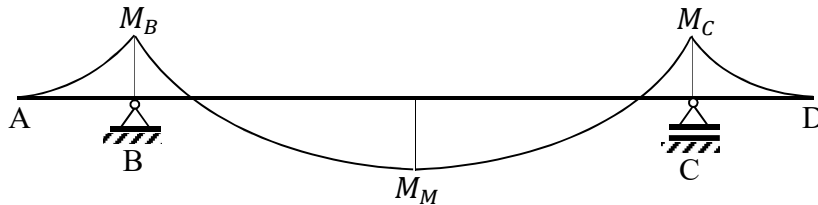
A partir da direção principal 1, girando-se  $45^\circ$  no sentido anti-horário, tem-se a direção normal ao plano de tensão normal média ( $2 \text{ MPa}$ ) e tensão de cisalhamento mínima. A partir da direção principal 2, girando-se  $45^\circ$  no sentido anti-horário, tem-se a direção normal ao plano de tensão normal média ( $2 \text{ MPa}$ ) e tensão de cisalhamento máxima. As tensões extremas de cisalhamento têm magnitude igual ao raio do círculo de Mohr ( $8,485 \text{ MPa}$ ). Assim,



## GABARITO – QUESTÃO 2

### a) Cálculo das tensões normais longitudinais extremas

a.1 - Diagrama de momentos fletores



$$M_B = M_C = -30 \times 1,20 - 180 \times 1,20 \times 0,60 = -165,60 \text{ kNm}$$

$$M_M = 180 \times 5^2/8 - 165,60 = 396,90 \text{ kNm}$$

a.2 – Tensões normais longitudinais extremas

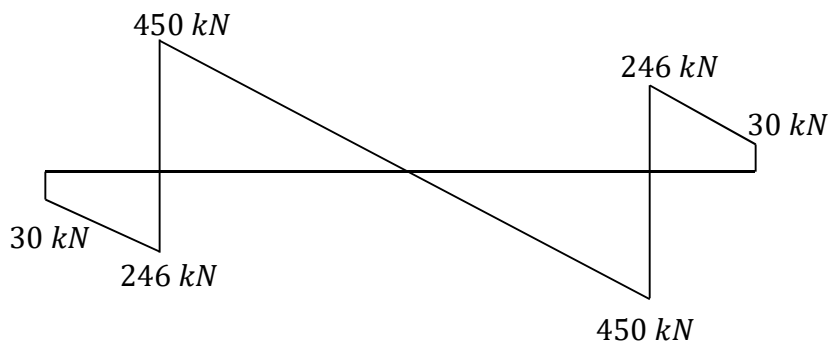
Momento de inércia da seção transversal:  $I = 30 \times 70^3/12 - 14 \times 54^3/12 = 673792,00 \text{ cm}^4$

Valores extremos das tensões normais:

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = 39690 \times (70/2)/673792 = 2,06 \text{ kN/cm}^2$$

### b) Diagrama das tensões de cisalhamento na seção mais solicitada à força cortante

b.1 - Diagrama de forças cortantes



b.2 - Valores relevantes do diagrama de tensão de cisalhamento na seção mais solicitada:

Momentos estáticos:

$$Q_1 = 30 \times 8 \times 31 = 7440 \text{ cm}^3$$

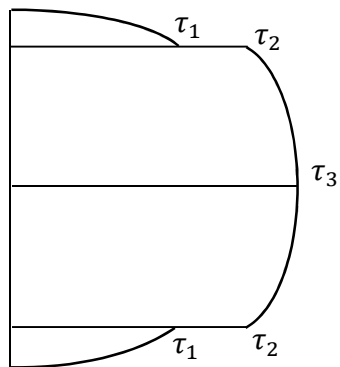
$$Q_2 = 7440 + 2 \times 8 \times 27 \times 13,5 = 13272 \text{ cm}^3$$

$$\tau_1 = (450 \times 7440)/(30 \times 673792) = 0,166 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_2 = (450 \times 7440)/(16 \times 673792) = 0,311 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_3 = (450 \times 13272)/(16 \times 673792) = 0,554 \text{ kN/cm}^2$$

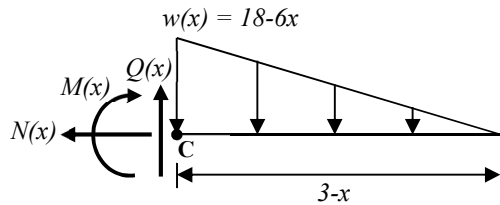
b.3 - Diagrama das tensões de cisalhamento na seção mais solicitada:



## GABARITO – QUESTÃO 3

### a) Determinação da linha elástica

#### a.1 – Momento fletor – $M(x)$



Equilíbrio de momento em relação ao ponto C:

$$\sum M_C = 0 (\curvearrowright) \Rightarrow -M(x) - \frac{w(x)(3-x)}{2} \frac{3-x}{3} = 0 \Rightarrow M(x) = -(3-x)^3 \text{ (kNm)}$$

#### a.2 – Equação da linha elástica – $v(x)$ – Solução Geral

Relação Curvatura-Momento:

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x) = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{(3-x)^3}{EI}$$

Inclinação  $\theta(x)$ :

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx}(x) = \int \frac{d^2 v}{dx^2}(x) dx = \int -\frac{(3-x)^3}{EI} dx = \frac{1}{4EI} (3-x)^4 + C_1$$

Deflexão  $v(x)$ :

$$v(x) = \int \frac{dv}{dx}(x) dx = \int \left[ \frac{1}{4EI} (3-x)^4 + C_1 \right] dx = -\frac{1}{20EI} (3-x)^5 + C_1 x + C_2$$

#### a.3 – Equação da linha elástica – $v(x)$ – Solução Particular

Condições de Contorno:

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4EI} (3-0)^4 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{81}{4EI}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{20EI} (3-0)^5 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{243}{20EI}$$

Inclinação  $\theta(x)$ :

$$\theta(x) = \frac{1}{4EI} (3-x)^4 - \frac{81}{4EI}$$

Deflexão  $v(x)$ :

$$v(x) = -\frac{1}{20EI} (3-x)^5 - \frac{81}{4EI} x + \frac{243}{20EI}$$

## b) Deslocamento e inclinação na extremidade livre

Momento de inércia da seção transversal:

$$I = \frac{20 \cdot 20^3}{12} \cong 13.333,33 \text{ cm}^4 = 13.333,33 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Inclinação  $\theta(3)$ :

$$\theta(3) = \frac{1}{4EI} (3 - 3)^4 - \frac{81}{4EI} = -\frac{81}{4EI} \cong -\frac{81}{4(200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2)(13.333,33 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4)} \cong -7,5937 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Deslocamento  $v(3)$ :

$$v(3) = -\frac{1}{20EI} (3 - 3)^5 - \frac{81}{4EI} 3 + \frac{243}{20EI} = -\frac{243}{5EI}$$
$$\cong -\frac{243}{5(200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2)(13.333,33 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4)} \cong -0,0018 \text{ m} = -1,8 \text{ mm}$$