TEMA 2

PROPRIEDADES DE ORDEM NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, possui uma relação "menor ou igual", denotada por $\leq$, que possui as seguintes propriedades:

O.1: Propriedade Reflexiva: Para qualquer número real a tem-se $a \leq a$.

O.2: Propriedade Antissimétrica: Dados dois números reais a e b tem-se:

Se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$.

O.3: Propriedade Transitiva: Dados os números reais a,b e c, tem-se que:

Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

Uma relação satisfazendo as propriedades O.1, O.2 e O.3 é chamada **relação de ordem.**

Notação

- Usaremos a notação $a < b$ para indicar $a \leq b$ mas $a \neq b$.
- A notação $b \geq a$ significa $a \leq b$ e $b > a$ indica $a < b$.
- Dizemos que um número real a é positivo se $a > 0$ e a é negativo se $a < 0$.
- Se $a \geq 0$ dizemos também que a é não negativo e se $a \leq 0$ dizemos que a é não positivo.

Observação

Se $a < b$ e $b < c$, a propriedade transitiva nos permite escrever $a < b < c$.

Intervalos na Reta

A relação de ordem nos números reais nos permite utilizar uma notação mais simples para designar determinados subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Por exemplo, se a e b são números reais com $a < b$, utilizamos as seguintes notações para intervalos limitados:

- intervalo fechado com extremos a e b : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \ a \leq x \leq b\}$
- intervalo aberto com extremos a e b : $(a , b) = \{x \in \mathbb{R} | \ a < x < b\}$
- intervalos semiabertos (ou semi fechados) com extremos a e b:

- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | \ a \leq x < b\}$
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | \ a < x \leq b\}$

Temos também intervalos ilimitados:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | \ x < a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | \ x \leq a\}$$
$$(c, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | \ x > c\}$$
$$[c, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geq c\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Exemplo 1

O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 1 \text{ ou } x > 3\}$ é formado pela união de dois intervalos disjuntos: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Ou seja, ele é formado pelos pontos da reta exceto aqueles pertencentes ao intervalo fechado [1,3].

Um erro comum é tentar descrever esse conjunto utilizando uma dupla desigualdade: $3 < x < 1$. Observe que essa desigualdade significa que x é um número real que é simultaneamente maior que 3 e menor do que 1, que obviamente não existe. Além disso, a dupla desigualdade implica que 3 é menor do que 1, o que é falso. ■

A relação $\leq$ nos números reais é uma **relação de ordem total**, isto é, satisfaz também a seguinte propriedade:

O.4: Tricotomia: Dados dois números reais quaisquer a e b tem-se que uma e somente uma das possibilidades ocorre:

$$a < b \quad \text{ou} \quad a = b \quad \text{ou} \quad b < a.$$

Essa relação de ordem satisfaz também as seguintes propriedades:

O.5: Para quaisquer números reais a,b,c , tem-se que:

Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$

O.6: Se a,b,c são números reais tem-se que:

Se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$

Proposição 1

Seja a um número real. Então os seguintes resultados são válidos:

i. Se $a \leq 0$ então $-a \geq 0$

ii. Se $a \geq 0$ então $-a \leq 0$

iii. Para qualquer número real a temos que $a^2 \geq 0$.

Demonstração

i. Se $a \leq 0$ podemos, utilizando a propriedade O.5, somar $-a$ aos dois membros da equação, obtendo:

$a \leq 0 \Rightarrow (-a) + a \leq (-a) + 0 \Rightarrow 0 \leq -a \Rightarrow -a \geq 0$.

ii. A demonstração é análoga.

iii. Temos dois casos a considerar:

1º caso: se $a \geq 0$ podemos, utilizando a propriedade O.6, multiplicar ambos os membros da desigualdade por a, obtendo:

$a \geq 0 \Rightarrow a \cdot a \geq a \cdot 0 \Rightarrow a^2 \geq 0$.

2º caso: se $a \leq 0$ então $-a \geq 0$. Pelo caso anterior, temos que $(-a)^2 \geq 0$.

Mas: $(-a)^2 = (-1)^2 a^2 = 1 \cdot a^2 = a^2$.

Logo $a^2 \geq 0$. ■

Proposição 2

Se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $a \cdot c \geq b \cdot c$

Demonstração

Se $c \leq 0$, então $-c \geq 0$. Portanto, pela propriedade O6, temos que:

$$a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) \Rightarrow -(a \cdot c) \leq -(b \cdot c).$$

Somando $a \cdot c + b \cdot c$ aos dois lados da desigualdade obtemos:

$$-(a \cdot c) + (a \cdot c + b \cdot c) \leq -(b \cdot c) + (a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow$$

$$[-(a \cdot c) + a \cdot c] + b \cdot c \leq -(b \cdot c) + (b \cdot c + a \cdot c) \Rightarrow$$

$$0 + b \cdot c \leq [-(b \cdot c) + b \cdot c] + a \cdot c \Rightarrow$$

$$b \cdot c \leq 0 + a \cdot c \Rightarrow$$

$$b \cdot c \leq a \cdot c$$ ■

Observação

As propriedades O.5, O.6 e a proposição 2 afirmam que:

Se somarmos (ou subtrairmos) um mesmo número real em ambos os lados de uma desigualdade, o sinal da desigualdade inicial se mantém.

No entanto se multiplicarmos uma desigualdade por um número real temos duas possibilidades:

- Se o número for não negativo, o sentido da desigualdade se mantém;
- Se o número for não positivo, o sentido da desigualdade é invertido.

A partir dessas propriedades é possível demonstrar alguns resultados básicos que utilizaremos posteriormente.

Utilizando as propriedades e as definições dadas anteriormente obtêm-se facilmente as propriedades a seguir.

Proposição 3

1) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
2) Se $a < b$, então $a + c < b + c$, para qualquer número real c.
3) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
4) Se $a < b$ e c é um número positivo qualquer, então $ac < bc$.
5) Se $a < b$ e c é um número negativo qualquer, então $ac > bc$.
6) Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $ac < bd$.
7) Se $a < 0$, então $\frac{1}{a} < 0$ e, reciprocamente, se $\frac{1}{a} < 0$, então $a < 0$.

Demonstração

Apresentaremos somente a demonstração dos itens 1), 6) e 7).

1) Se $a < b$ e $b < c$ então $a \leq b$ e $b \leq c$ e $a \neq b$, $b \neq c$. Pela propriedade transitiva (O.3) $a \leq c$. Falta provar que $a \neq c$. Mas se $a = c$, então $a \leq b$ e $b \leq a$ .Pela propriedade antissimétrica (O.2) temos que $a = b$, o que é um absurdo.
6) Como $a < b$ e $c > 0$, pelo item 4), $ac < bc$. Como $c < d$ e $b > 0$, pelo item 4), $bc < bd.$ Como $ac < bc$ e $bc < bd$ concluímos, pelo item1, que $ac < bd$.
7) Suponhamos $a < 0$ e, por absurdo, que $\frac{1}{a} > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 0$, por $\frac{1}{a}$, temos, pelo item 4), $a \cdot \frac{1}{a} < 0 \cdot \frac{1}{a}$; ou seja, $1 < 0$, o que é um absurdo.

   Como o inverso de $\frac{1}{a}$ é a , temos pela primeira parte da demonstração, que se $\frac{1}{a} < 0$ então $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a < 0$. ■

Todas as propriedades da proposição anterior continuam verdadeiras se trocarmos o sinal $<$ por $>$.

Corolário 1

1) Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.
2) Se $a > b$, então $a + c > b + c$, para qualquer número real c.
3) Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.
4) Se $a > b$ e c é um número positivo qualquer, então $ac > bc$.
5) Se $a > b$ e c é um número negativo qualquer, então $ac < bc$.
6) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$.
7) Se $a > 0$, então $\frac{1}{a} > 0$ e, reciprocamente, se $\frac{1}{a} > 0$, então $a > 0$.

Corolário 2

1) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a + b > 0$.
2) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b > 0$.

Exemplo 2

Encontre todos os números reais que satisfazem a desigualdade $3 - x < 5 + 4x$.

Se $3 - x < 5 + 4x$, então $3 - x - 4x < 5 + 4x - 4x$ (item 2 da proposição 3), ou seja, $3 - 5x < 5$.

Então, somando -3 a ambos os membros dessa desigualdade, temos

$-5x < 2$ (item 2 da propriedade 3).

Dividindo ambos os membros por -5 e invertendo o sentido do sinal dessa desigualdade, obtemos

$x > -\frac{2}{5}$ (item 5 da proposição 3).

Mostramos, então, que se $3 - x < 5 + 4x$ então $x > -\frac{2}{5}$.

Cada uma das passagens utilizadas nesse processo é reversível, isto é, começando com $x > -\frac{2}{5}$ podemos chegar à desigualdade inicial:

Se $x > -\frac{2}{5}$

multiplicamos cada membro por -5 e invertemos o sinal da desigualdade, obtendo

$-5x < 2$

Então, somando 3 a ambos os membros temos

$3 - 5x < 5$

E, finalmente, somamos $4x$ a ambos os membros, obtemos a desigualdade inicial

$3 - x < 5 + 4x$.

Portanto, podemos concluir que $3 - x < 5 + 4x$ se, e somente se, $x > -\frac{2}{5}$.

Assim, o conjunto solução da desigualdade dada é $\left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$

Exemplo 3

Resolver a desigualdade $\frac{1}{x} < 2$.

Sabemos que se $x < 0$, então o inverso de x também é negativo: $\frac{1}{x} < 0$. Portanto, todos os números negativos pertencem ao conjunto solução dessa desigualdade.

Um erro comum em sua resolução é :

$$\frac{1}{x} < 2 \iff 1 < 2x \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}.$$

Observe que, de acordo com essa resolução, os números negativos não apareceram como solução. Onde está o erro? A primeira equivalência $\frac{1}{x} < 2 \iff 1 < 2x$ está incorreta pois, para que ela seja obtida, devemos multiplicar a desigualdade $\frac{1}{x} < 2$ por x para cancelar o denominador. No entanto, como x é um número real qualquer não nulo, ele pode ser positivo ou negativo, e temos duas possibilidades: se ele for positivo, o sentido da desigualdade se mantém e se ele for negativo, o sentido da desigualdade é invertido. Portanto, não podemos simplesmente "mandar o x para o outro lado multiplicando".

Há duas possibilidades para a resolução dessa desigualdade (e de outras do mesmo tipo, claro).

1ª resolução

A desigualdade original $\frac{1}{x} < 2$ pode ser transformada em duas outras:

<u>Se $x > 0$</u>, multiplicando a desigualdade inicial por x ela se transforma na desigualdade $1 < 2x$. E agora resolvemos essa desigualdade mais simples que a inicial:

$1 < 2x \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$.

Como a desigualdade inicial se transformou nessa mais simples somente para <u>$x > 0$,</u> devemos considerar somente as soluções positivas. No intervalo $(0, +\infty)$ devemos considerar somente aqueles números maiores do que $\frac{1}{2}$, que são todos os números reais $x > \frac{1}{2}$.

.

Se $x < 0$, multiplicando a desigualdade inicial por x ela se transforma na desigualdade $1 > 2x$. E agora resolvemos essa desigualdade mais simples que a inicial:

$1 > 2x \iff 2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}$.

Como a desigualdade inicial se transformou nessa mais simples somente para $x < 0$, devemos considerar somente as soluções negativas. No intervalo $(-\infty, 0)$ devemos considerar somente aqueles números que são menores do que $\frac{1}{2}$, ou seja, os números reais $x < 0$.

O conjunto solução da desigualdade $\frac{1}{x} < 2$ é, então, a união dos dois intervalos obtidos anteriormente: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

2ª resolução

Essa desigualdade pode também ser resolvida transformando-a em uma única desigualdade equivalente à primeira:

$$\frac{1}{x} < 2 \iff \frac{1}{x} - 2 < 0 \iff \frac{1-2x}{x} < 0.$$

O problema recai no estudo de sinal de um quociente e se soubermos os sinais do denominador e do numerador saberemos os sinais do quociente: positivo dividido por positivo é positivo; positivo dividido por negativo é negativo; negativo dividido por positivo é negativo e negativo dividido por negativo é positivo.

Sinal do numerador: a raiz é $x = \frac{1}{2}$ e como a função $y = 1 - 2x$ é decrescente, ela é positiva antes da raiz e negativa depois da raiz.

Sinal do denominador: a raiz é $x = 0$ e como a função $y = x$ é crescente, ela é negativa antes da raiz e positiva depois da raiz.

Podemos montar um quadro dividindo a reta real em intervalos e considerando o sinal de cada uma das funções (numerador e denominador) em cada um dos intervalos:

função	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$	
$1 - 2x$	positiva	positiva	negativa	Raiz $x = \frac{1}{2}$
x	negativa	positiva	positiva	Raiz $x = 0$
$\frac{1-2x}{x}$	**negativa**	positiva	**negativa**	

Portanto, o conjunto solução da desigualdade $\frac{1}{x} < 2$ é a união de dois intervalos: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. ■

Exemplo 4

Resolver a desigualdade $\frac{1}{x-4} \leq \frac{1}{2x-5}$.

1ª solução

Como discutimos anteriormente, **não** podemos simplesmente "multiplicar cruzado" para obter a desigualdade mais simples $2x - 5 \leq x - 4$, pois as funções $y = 2x - 5$ e $y = x - 4$ não possuem o mesmo sinal na reta toda. Por exemplo, a função $y = 2x - 5$ possui raiz $x = \frac{5}{2}$ e tem sinais contrários antes e depois da raiz.Como ela é crescente, seu sinal é negativo antes da raiz e positivo depois da raiz. A função $y = x - 4$ também é crescente e, por isso, ela é negativa antes da raiz $x = 4$ e positiva depois da raiz.

Nesse caso, "multiplicar cruzado" significa multiplicar ambos os membros da desigualdade pelo polinômio $(2x - 5)(x - 4)$ e, para isso, devemos determinar em quais intervalos essa função polinomial é positiva ou negativa:

função	$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, 4\right)$	$(4, +\infty)$
$2x - 5$	negativa	positiva	positiva
$x - 4$	negativa	negativa	positiva
$(2x - 5)(x - 4)$	positiva	negativa	positiva

Como não existe divisão por zero, os denominadores não podem ser nulos, e temos a seguinte **restrição**: $x \neq \frac{5}{2}$ e $x \neq 4$.

Temos então dois casos a considerar:

1º caso: Se $x \in U = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup (4, +\infty)$, a função $(2x - 5)(x - 4)$ é positiva e temos que:

$$\frac{1}{x-4} \leq \frac{1}{2x-5} \quad \Leftrightarrow \quad (2x-5)(x-4)\frac{1}{x-4} \leq (2x-5)(x-4)\frac{1}{2x-5} \quad \Leftrightarrow$$

$$(2x - 5) \leq (x - 4).$$

Ou seja, se $x \in U$, a desigualdade inicial é equivalente à desigualdade mais simples:

$$2x - 5 \leq x - 4.$$

Logo,

$$2x - x \leq 5 - 4 \iff x \leq 1.$$

Portanto, o conjunto solução da desigualdade inicial, quando restrita a U, é dado pela interseção de U com o intervalo $(-\infty, 1]$.

Obtemos, então, o conjunto solução $S_1 = (-\infty, 1]$.

2º caso: Se $x \in \left(\frac{5}{2}, 4\right)$, a função $(2x-5)(x-4)$ é negativa e, multiplicando a desigualdade inicial por essa função, obtemos:

$$\frac{1}{x-4} \leq \frac{1}{2x-5} \iff (2x-5)(x-4)\frac{1}{x-4} \geq (2x-5)(x-4)\frac{1}{2x-5} \iff$$
$$(2x-5) \geq (x-4).$$

Ou seja, no intervalo $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$, a desigualdade inicial é equivalente a $2x - 5 \geq x - 4$. Resolvendo esta última, temos:

$$2x - 5 \geq x - 4 \iff x \geq 1 .$$

Portanto, o conjunto solução da desigualdade inicial, quando restrita a $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$, é dado pela interseção desse intervalo com o intervalo $(1, +\infty)$.

Obtemos, então, o conjunto solução é $S_2 = \left(\frac{5}{2}, 4\right) \cap (1, +\infty) = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$.

O conjunto solução da desigualdade inicial é: $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1] \cup \left(\frac{5}{2}, 4\right)$.

2ª solução

Apresentaremos agora outra maneira de resolver a desigualdade dada:

$$\frac{1}{x-4} \leq \frac{1}{2x-5} \iff \frac{1}{x-4} - \frac{1}{2x-5} \leq 0 \iff \frac{2x-5-(x-4)}{(x-4)(2x-5)} \leq 0$$
$$\iff \frac{2x-5-x+4}{(x-4)(2x-5)} \leq 0 \iff \frac{x-1}{(x-4)(2x-5)} \leq 0$$

Faremos agora o estudo do sinal do numerador e denominador para obter o sinal do quociente. A forma fatorada do denominador é conveniente, pois nos dá as raízes diretamente, **sendo completamente desnecessário multiplicar os dois fatores e utilizar a fórmula para encontrar as raízes do produto $(x-4)(2x-5)$.** Já vimos que um produto é zero se algum dos fatores for zero:

$$(x-4)(2x-5) = 0 \iff x - 4 = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0 \iff x = 4 \text{ ou } x = \frac{5}{2}.$$

Temos então que:

- O numerador $y = x - 1$ é uma função afim, crescente e sua raiz é $x = 1$.
- O produto $y = (x-4)(2x-5)$ é uma função quadrática, com raízes $x = 4$ e $x = \frac{5}{2}$.

Como seu gráfico é uma parábola virada para cima (o coeficiente de x^2 é $1 \cdot 2 = 2$), sabemos que a função é negativa entre as raízes e positiva no resto da reta real.
Podemos então organizar esses dados em uma tabela:

função	$(-\infty, 1)$	$\left(1, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, 4\right)$	$(4, +\infty)$
$x-1$	negativa	positiva	positiva	positiva
$(x-4)(2x-5)$	positiva	positiva	negativa	positiva
$\frac{x-1}{(x-4)(2x-5)}$	**negativa**	positiva	**negativa**	positiva

Como não existe divisão por zero, os denominadores não podem ser nulos, e temos a seguinte **restrição**: $x \neq \frac{5}{2}$ e $x \neq 4$.

A partir desse quadro concluímos que:

- $\frac{x-1}{(x-4)(2x-5)} < 0$ para x no conjunto $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, 4\right)$;
- $\frac{x-1}{(x-4)(2x-5)} = 0$ quando o numerador for nulo, isto é: $x = 1$.

Portanto, o conjunto solução da desigualdade é $(-\infty, 1] \cup \left(\frac{5}{2}, 4\right)$. ■

Teorema

i. Se $a > b \geq 0$, então $a^2 > b^2$.
ii. Se $a > 0$, $b > 0$ e $a^2 > b^2$, então $a > b$.
iii. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

Demonstração

i. Se $b = 0$, então $a > 0$ e, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a, obtemos $a^2 > a \cdot 0 = 0 = 0^2$ e a tese se verifica.

   Se $b \neq 0$, então $a > b$ e são ambos positivos. Multiplicando essa última desigualdade por a e por b, separadamente obtemos:

$$a^2 > ab \quad \text{e} \quad ab > b^2.$$

   Pela propriedade transitiva, obtemos $a^2 > b^2$, como queríamos provar.

ii. Temos que:

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) > 0.$$

   Como a e b são positivos, então a soma $a + b$ também é positiva e podemos dizer o mesmo sobre $\frac{1}{a+b}$. Multiplicando a desigualdade anterior por $\frac{1}{a+b}$, obtemos:

$$\frac{1}{a+b}(a+b)(a-b) > \frac{1}{a+b} \cdot 0 \Leftrightarrow \ a-b > 0 \ \Leftrightarrow a > b,$$

como queríamos provar.

iii. Como $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$, a tese se verifica trivialmente.

Podemos supor, então, $a > 0$ e $b > 0$.

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 0.$$

Como $a + b > 0$, concluímos que $a - b = 0 \ \Leftrightarrow a = b$.

Reciprocamente, se $a = b$, então certamente $a^2 = b^2$. ∎

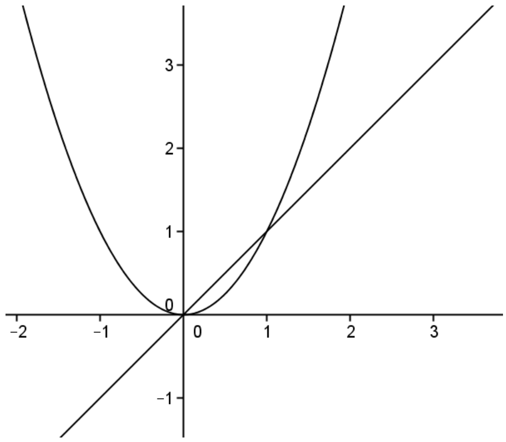
Exemplo 5

Também podemos resolver desigualdades geometricamente.

a) Resolver graficamente a desigualdade $x^2 \geq x$.

Os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = x$ são bastante conhecidos e estamos querendo saber quando é que a parábola de equação $y = x^2$ está acima da reta $y = x$ (isto é: $x^2 > x$) ou quando as duas curvas se intersectam ($x^2 = x$). Para isso, encontramos os pontos de interseção das curvas:

$$x = x^2 \Leftrightarrow \ x^2 - x = 0 \ \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$



De acordo com o desenho, o conjunto solução da desigualdade é $S = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

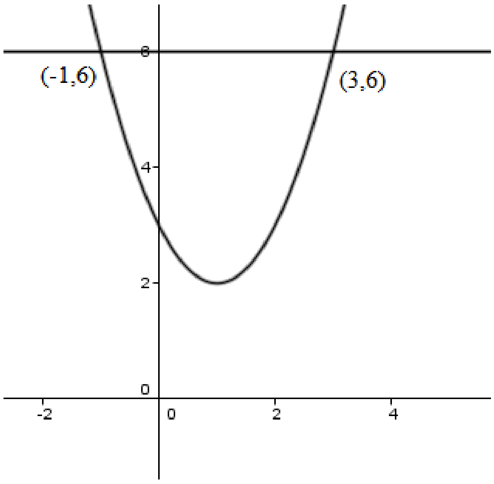
b) Resolver graficamente a desigualdade $x^2 - 2x + 3 > 6$.

A parábola de equação: $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ não possui raízes reais ($\Delta = -8$).

A curva está virada para cima e as coordenadas de seu vértice são: $(1,2)$.

O gráfico da equação $y = 6$ é uma reta horizontal. Queremos determinar quando a parábola está acima da reta. Para isso, encontramos as interseções da parábola e da reta:

$$x^2 - 2x + 3 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow x = -1 \ \text{ ou } \ x = 3.$$



De acordo com o desenho, o conjunto solução da desigualdade é $S = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.■