PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL PET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA ICEx - UFMG
Curso de Pré Cálculo - Verão 2016

Números Reais e Propriedades

1 A reta real

A construção dos números reais tem início com os **número Naturais**:

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\} \ \ ou \ \ \mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\}$$

A questão de zero ser natural ou não é uma convenção. Por questões históricas, o símbolo zero é criado após os números $\{1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n, \cdots\}$. Assim, muitos matemáticos não consideram o zero número Natural. Mas, dependendo das necessidades de trabalho, uma questão apenas de notação, muitos outros matemáticos consideram (ou incluem) o zero nos naturais. No que segue vamos considerar os naturais sem o zero. Assim toda vez que necessitemos considerar o conjunto $\{0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n, \cdots\}$, devemos explicitar que estamos trabalhando com os números $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

O conjunto dos **números Inteiros**:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ , \cdots\} = \{\cdots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\} \cup \mathbb{N}$$

Dentro dos números inteiros, os números naturais são chamados de números positivos. Os outros, com exceção do zero, são chamados de números negativos.

O conjunto dos **números Racionais**:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ \ p\ e\ q\ \in \mathbb{Z},\ com\ q \neq 0\right\}$$

Este conjunto de números era considerado na antiguidade pelos Gregos como o conjunto de números que preenchiam "toda a reta"; até eles mesmos descobrirem que existiam números que representam comprimentos, mas não são números racionais (como veremos mais abaixo). Esta ideia inicial dos Gregos de conseguir medir "manualmente"usando apenas os números racionais é válida na atualidade quando necessitamos medir "fisicamente"algo. Por exemplo o microscópio mais potente na atualidade tem uma resolução de 43 picômetros (unidade que equivale à trilionésima parte de um metro), 10^{-12}. Assim, toda medida realizada por este aparato é um número racional. Tudo o que pode ser medido na prática "no mundo real"é feito com números racionais; quando trabalhamos numericamente num computador a informação inserida e os resultados dos processos no computador são números racionais. Assim, a ideia inicial dos Gregos de pensar que os números racionais preencheriam toda a reta geométrica não era absurda. Só a abstração da matemática que acaba descobrindo "novos números".

Os números racionais têm uma representação decimal, que corresponde a números com uma quantidade finita de casas decimais e/ou possuem uma cadeia de números que se repete indefinidamente, que é chamada período da representação decimal.

Por exemplo: $0 = \frac{0}{q}$ onde q é qualquer inteiro diferente de zero.

$-5 = \dfrac{-5}{1} = -\dfrac{5}{1} = \dfrac{5}{-1}$;
$\dfrac{1}{4} = 0,25$;
$-\dfrac{5}{11} == 0,45454545\cdots = -0,\overline{45}$.

Os números inteiros estão incluídos nos racionais, basta denotar um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ da forma $n = \frac{n}{1}$, com isto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

O conjunto dos **números Irracionais** $\mathbb{I}$:

Os Gregos foram os primeiros a identificar que existiam números além dos racionais. Isso é consequência do teorema de Pitágoras ao medir o comprimento da diagonal de um quadrado de comprimento um. Assim nasce o primeiro número não racional ($\sqrt{2}$). Junto com ele nasce uma infinidade de números não racionais (por exemplo, raízes quadradas de números primos ou raízes quadradas de números cuja decomposição na fatoração prima possui um fator primo com potência ímpar), estes números representam comprimentos, mais pela falta de representação racional, são chamados de "incomensuráveis", seguidamente batizados de "números irracionais". Podemos definir os números irracionais como aqueles números cuja representação decimal é infinita e não possui período. Por exemplo:

$$0,101001000100001\cdots1\underbrace{00\cdots00}_{n\quad zeros}1\underbrace{00\cdots00}_{n+1\quad zeros}1\cdots$$

é um número irracional; dessa forma podemos gerar uma infinidade de números irracionais.

Alguns outros números irracionais famosos: $\pi \approx 3,1416\cdots$, $e \approx 2,718281\cdots$ número de Euler.

Mostrar que certo número é irracional, não é uma questão simples, para se ter uma ideia, assista o minicurso do professor Diego Marques nos vídeos:

`https://www.youtube.com/watch?v=uhZf8Oa2F7Q&list=PLYKguiakfI-hnHKcWGTRmHH39iyfGGa0l`

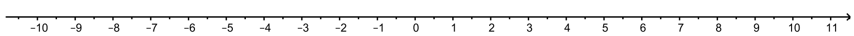
2 O conjunto dos números Reais $\mathbb{R}$

O conjunto dos números reais podemos definir como a união dos números racionais e irracionais e denotamos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Neste conjunto temos duas operações, uma de soma "+"e outra o produto "$\cdot$"(ou $\times$).

Para todo a, b, c números reais temos que as operações satisfaz as seguintes propriedades:

$a + b = b + a$	Propriedade Comuntativa da soma
$a + (b + c) = (a + b) + c$	Propriedade Associativa da soma
$a + 0 = 0 + a = a$	Elemento neutro da soma
$-a + a = a + (-a) = 0$	inverso aditivo da soma
$a \cdot b = b \cdot a$	Propriedade Comutativa do produto
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	Propriedade Associativa do produto
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	Elemento identidade (ou neutro) do produto
$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$	inverso multiplicativo
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Propriedade distributiva

A representação geométrica dos números reais é feita sobre uma linha geometrica, chamada reta numérica



A exemplo da ideia inicial antiga, que considerava a reta numérica completamente preenchida por números racionais, até descobrir que tinha uma infinidade de "buracos"a ser preenchido pelos irracionais. Agora devemos nos perguntar, se a união $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ realmente preenche toda a reta, isto é conhecido como a propriedade de "completitude da reta".

Vamos assumir que realmente a união $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ preenche por completo a reta "sem deixar nenhum buraco". Com isto temos a importante propriedade de continuidade da reta, alias a palavra "continuidade"será trabalhada até a exaustão nos diversos cursos de cálculo; a ideia de uma reta sem buracos e intuitivamente equivalente a realizar o traço da reta com uma lápis sem levantar a mão "um traço contínuo".

Considerar a reta numérica sobre uma linha geométrica, automaticamente nos dá uma **relação de ordem**, quanto mais à direita o número estiver dizemos ser maior, assim sejam a e b dois números reais distintos, se b esta mais a direita de a denotamos $b > a$ lê-se b é maior do que a, ou equivalentemente escrevemos $a < b$ lê-se a menor do que b; formalmente podemos dizer que

$$b > a \Leftrightarrow b - a > 0.$$

Propriedade de Tricotomia: Dados a e b dois números reais, temos que uma e só umas das propriedades abaixo é válida:

$$a = b \qquad ou \qquad a < b \qquad ou \qquad a > b.$$

Deste modo, temos que dois números distintos não se sobrepõem, isto é ocupam lugares distintos na reta.

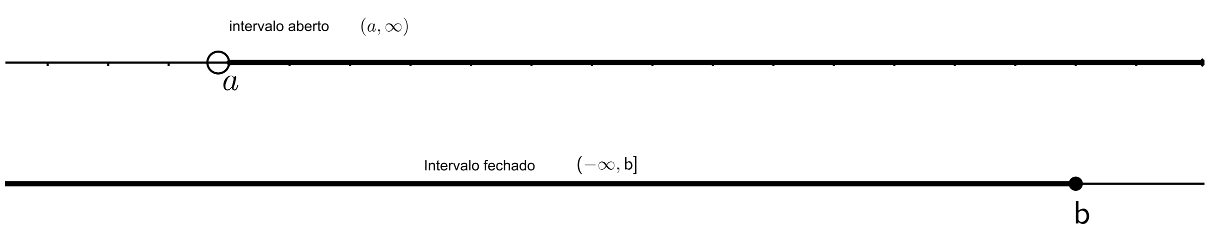
Notação de Intervalos Dados dois números $a,\ b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, chamamos de *intervalo aberto* com extremos a e b a todos os números reais $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x$ e $x < b$, denotamos por:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x < b\}$$

Chamamos de *intervalo fechado* com extremos a e b a todos os números reais $x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ e $x \leq b$, denotamos por: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\quad a \leq x \leq b\}$.

Chamamos de *intervalo semiaberto* (ou semifechado) com extremos a e b a todos os números reais $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x$ e $x \leq b$, denotamos por: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\quad a < x \leq b\}$, neste caso aberto em a e fechado em b. Da mesma forma define-se intervalo semiaberto fechado em a e aberto em b ($[a, b)$).

Outros intervalos importantes, são os intervalos ilimitados:



É claro que a variação nos extremos obtemos outros intervalos ilimitados, como o intervalo fechado $[a, \infty)$ e o intervalo aberto $(-\infty,\ b)$.