Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

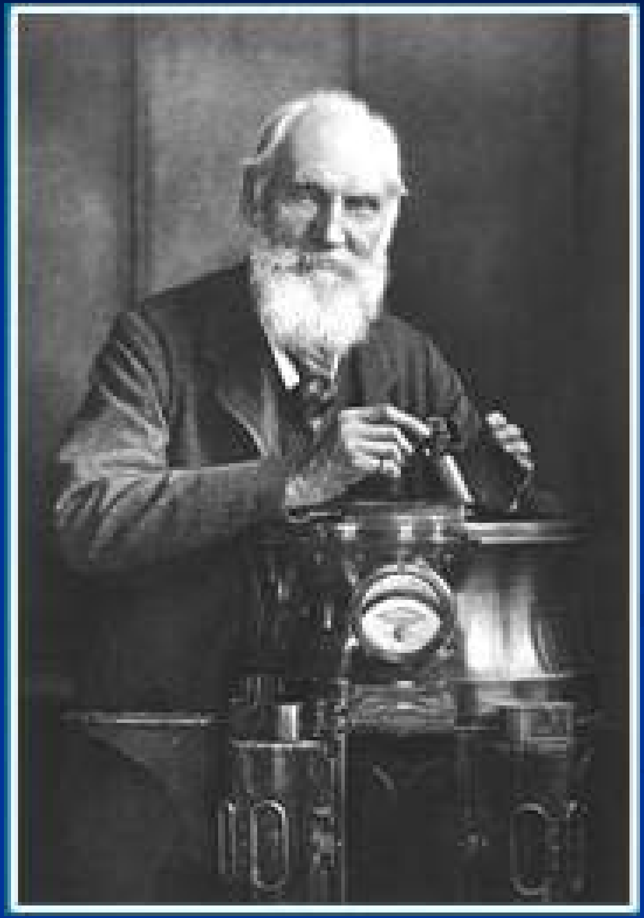
Universidade Federal de Alagoas

MODELOS CONSTITUTIVOS

Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques

VISCOELASTICIDADE LINEAR

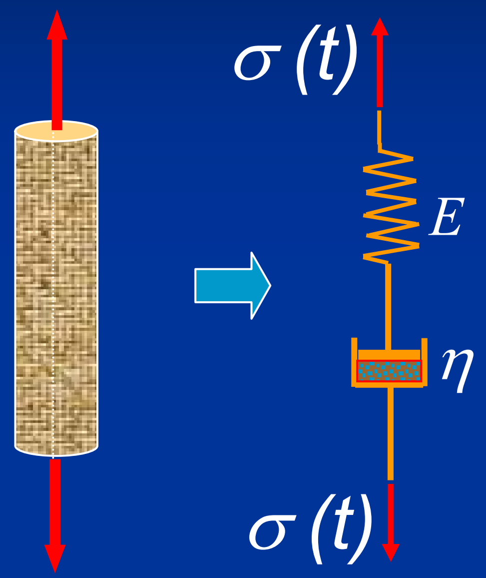
LORDE KELVIN (1824-1907)



JAMES CLERK MAXWELL (1831 – 1879)

MODELOS VISCOELÁSTICOS LINEARES

MODELO DE MAXWELL



Equação de equilíbrio:

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) = \sigma_a(t)$$

Equação de compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_a(t)$$

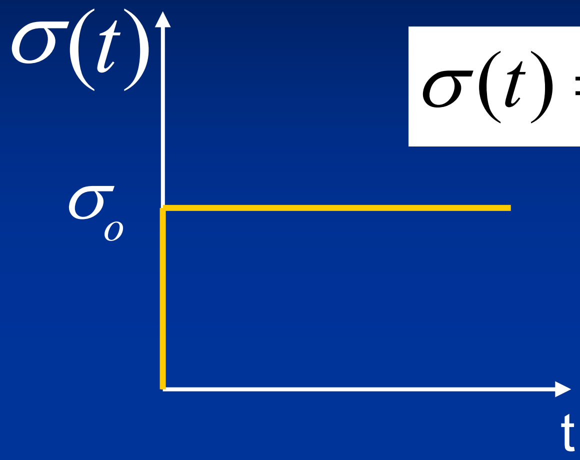
Equações constitutivas:

$$\sigma_m(t) = E\varepsilon_m(t) \qquad \sigma_a(t) = \eta\dot{\varepsilon}_a(t)$$

Equação Diferencial do Modelo de Maxwell

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_m(t) + \dot{\varepsilon}_a(t) \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}}$$

TESTE DE FLUÊNCIA – MODELO DE MAXWELL



$$\sigma(t) = \sigma_o u(t) \qquad \varepsilon(0^-) = 0 \qquad \sigma(0^-) = 0$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

Utilizando Transformada de Laplace:

$$L\{\dot{\varepsilon}(t)\} = L\left\{\frac{\dot{\sigma}(t)}{E}\right\} + L\left\{\frac{\sigma(t)}{\eta}\right\}$$

$$-\varepsilon(0^-) + sL\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{E}\left[-\sigma(0^-) + sL\{\sigma(t)\}\right] + \frac{1}{\eta}L\{\sigma(t)\}$$

Logo, como $\varepsilon(0^-) = 0$ e $\sigma(0^-) = 0$:

$$sL\{\varepsilon(t)\} = \frac{s}{E} L\{\sigma(t)\} + \frac{1}{\eta} L\{\sigma(t)\}$$

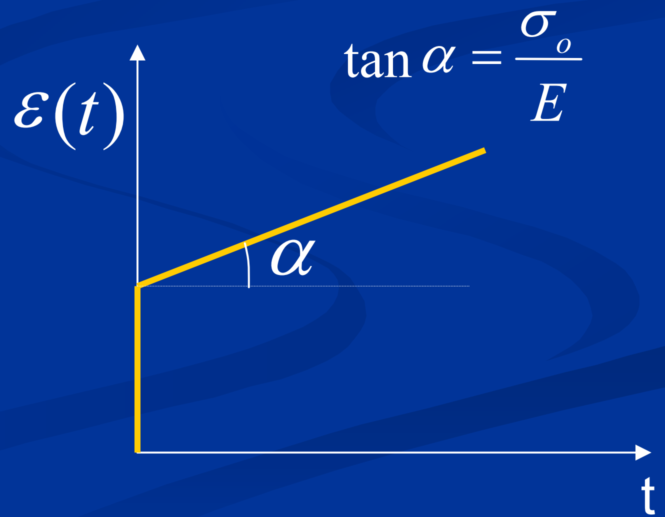
Sendo

$$L\{\sigma(t)\} = \sigma_o L\{u(t)\} = \frac{\sigma_o}{s} \Rightarrow L\{\varepsilon(t)\} = \frac{\sigma_o}{Es} + \frac{\sigma_o}{\eta s^2}$$

$$L\{\varepsilon(t)\} = L\{\frac{\sigma_o}{E} u(t)\} + L\{\frac{\sigma_o}{\eta} tu(t)\}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\varepsilon(t) = \left[\frac{\sigma_o}{E} + \frac{\sigma_o}{\eta} t\right] u(t)}$$



$$L\{\varepsilon(t)\} = \frac{\sigma_o}{Es} + \frac{\sigma_o}{\eta s^2} \quad \Longleftrightarrow \quad s\bar{\varepsilon}(s) = \sigma_o\left[\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta s}\right]$$

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{s}\bar{\varepsilon}(\mathrm{s}) = \lim_{s\to\infty} \sigma_\mathrm{o}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta s}\right) = \frac{\sigma_o}{E}$$

$$\lim_{s\to 0} \mathrm{s}\bar{\varepsilon}(\mathrm{s}) = \lim_{s\to 0} \sigma_\mathrm{o}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta s}\right) \to \infty$$

De acordo com os teoremas dos limites:

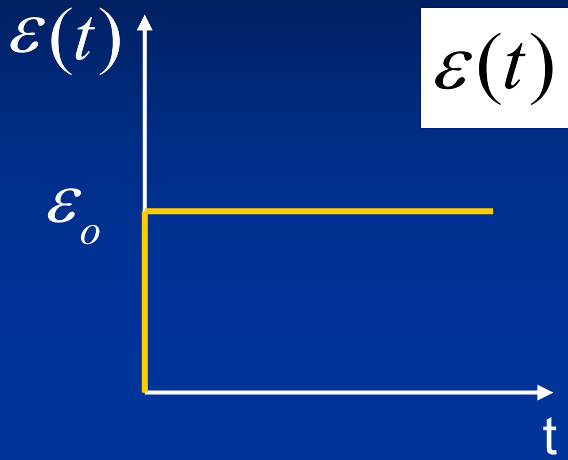
$$\boxed{\lim_{s\to\infty} \mathrm{s}\bar{f}(\mathrm{s}) = f(0^+)}$$

$$\boxed{\lim_{s\to 0} \mathrm{s}\bar{f}(\mathrm{s}) = f(\infty)}$$

Assim,

$$\boxed{\varepsilon(0^+) = \frac{\sigma_o}{E}} \qquad \boxed{\varepsilon(\infty) \to \infty}$$

TESTE DE RELAXAÇÃO – MODELO DE MAXWELL



$$\varepsilon(t)=\varepsilon_o u(t) \qquad \varepsilon(0^-)=0 \qquad \sigma(0^-)=0$$

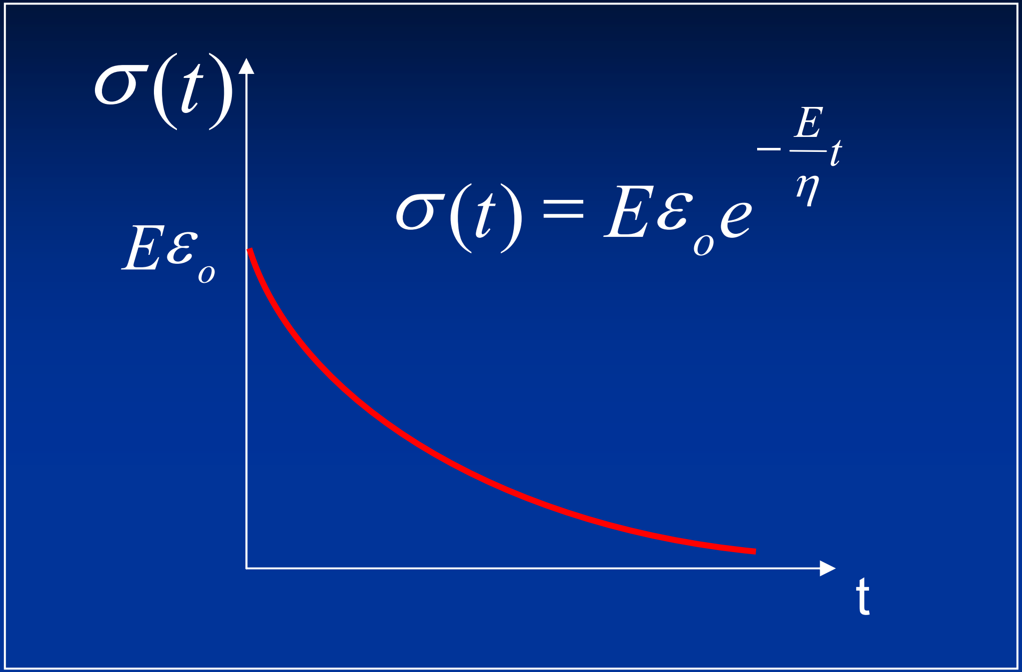
$$\dot{\varepsilon}(t)=\frac{\dot{\sigma}(t)}{E}+\frac{\sigma(t)}{\eta}$$

$$sL\{\varepsilon(t)\}=\frac{s}{E}L\{\sigma(t)\}+\frac{1}{\eta}L\{\sigma(t)\}$$

$$s\varepsilon_o\frac{1}{s}=\left(\frac{s}{E}+\frac{1}{\eta}\right)L\{\sigma(t)\} \quad \Rightarrow \quad L\{\sigma(t)\}=E\varepsilon_o\frac{1}{\frac{E}{\eta}+s}$$

$$L\{\sigma(t)\}=E\varepsilon_o L\left\{e^{-\frac{E}{\eta}t}\right\}$$

$$\boxed{\sigma(t)=E\varepsilon_o e^{-\frac{E}{\eta}t}}$$



$$L\{\sigma(t)\} = E\varepsilon_o \frac{1}{\frac{E}{\eta} + s}$$

$$s\bar{\sigma}(s) = \frac{E\varepsilon_o}{\frac{E}{\eta s} + 1}$$

Aplicando os teoremas dos limites:

$$\lim_{s\to\infty} s\bar{\sigma}(s) = E\varepsilon_o \quad \Rightarrow \quad \sigma(0^+) = E\varepsilon_o$$

$$\lim_{s\to 0} s\bar{\sigma}(s) = \infty \quad \Rightarrow \quad \sigma(\infty) = 0$$

Forma alternativa

MODELO DE MAXWELL

$$\boxed{\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}}$$

A) Fluência

$$\sigma(t) = \sigma_o u(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_o}{E}\frac{du(t)}{dt} + \frac{\sigma_o}{\eta}u(t)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_o}{E}\delta(t) + \frac{\sigma_o}{\eta}u(t) \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon = \sigma_o\left[\frac{\delta(t)}{E} + \frac{u(t)}{\eta}\right]dt$$

Integrando, vem: $\varepsilon(t) - \varepsilon(0^-) = \sigma_o \int_{0^-}^{t} \frac{\delta(t)}{E}dt + \sigma_o \int_{0^-}^{t} \frac{u(t)}{\eta}dt$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E}\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt + \frac{\sigma_o}{\eta}\int_{0^-}^{t}u(t)dt$$

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{\sigma_o}{E}u(t)\right]_{-\infty}^{t} + \frac{\sigma_o}{\eta}u(t)\int_{0^-}^{t}dt \Rightarrow \boxed{\varepsilon(t) = \sigma_o\left[\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right]u(t)}$$

B) Relaxação

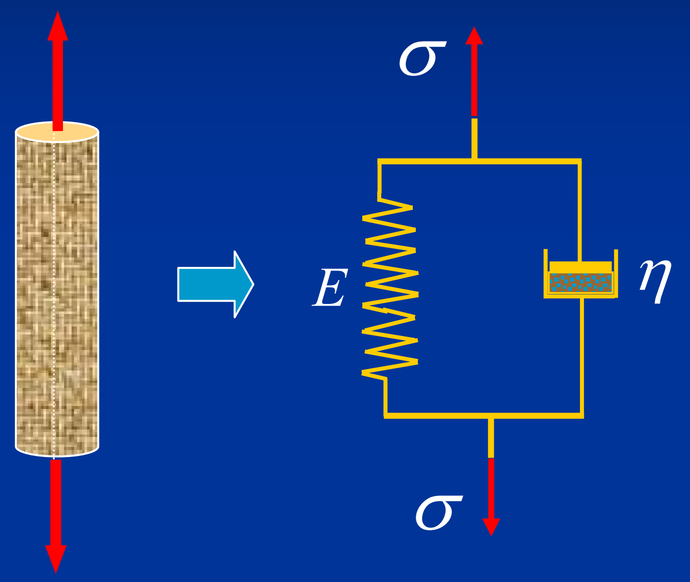
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o u(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_o \delta(t) \Rightarrow \varepsilon_o\delta(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E}{\eta}\sigma(t) = E\varepsilon_o\delta(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sigma(t)e^{\frac{E}{\eta}t}\right]e^{-\frac{E}{\eta}t} = E\varepsilon_o\delta(t)$$

$$\sigma(t)e^{\frac{E}{\eta}t} = E\varepsilon_o\int_{-\infty}^{t}e^{\frac{E}{\eta}t}\delta(t)dt \Rightarrow \boxed{\sigma(t) = E\varepsilon_o e^{-\frac{E}{\eta}t}u(t)}$$

MODELOS VISCOELÁSTICOS LINEARES

MODELO DE KELVIN



Equação de equilíbrio:

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) + \sigma_a(t)$$

Equação de compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) = \varepsilon_a(t)$$

Equações constitutivas:

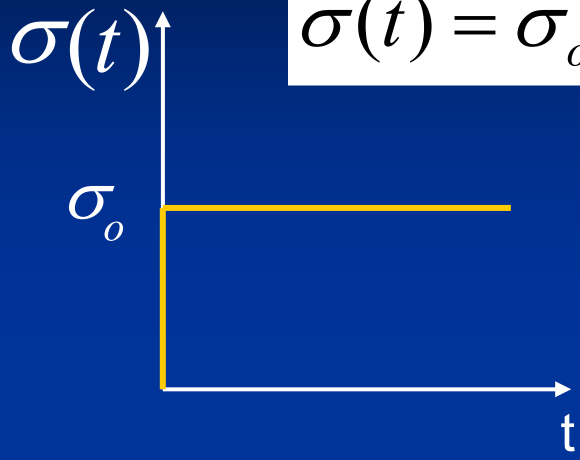
$$\sigma_m(t) = E\varepsilon_m(t)$$

$$\sigma_a(t) = \eta\dot{\varepsilon}_a(t)$$

Equação Diferencial do Modelo de Kelvin

$$\boxed{\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\eta}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta}}$$

TESTE DE FLUÊNCIA – MODELO DE KELVIN



$$\sigma(t) = \sigma_o u(t)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\eta}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta}}$$

Utilizando Transformada de Laplace:

$$L\{\dot{\varepsilon}\} + \frac{E}{\eta}L\{\varepsilon\} = \frac{1}{\eta}\sigma_o L\{u\}$$

$$-\varepsilon(0^-) + sL\{\varepsilon\} + \frac{E}{\eta}L\{\varepsilon\} = \frac{1}{\eta}\sigma_o L\{u\}$$

$$L\{\varepsilon\}(s + \frac{E}{\eta}) = \frac{1}{\eta}\sigma_o L\{u\}$$

$$L\{\varepsilon\} = \frac{\sigma_o}{\eta}\frac{1}{s+\dfrac{E}{\eta}}\frac{1}{s}$$

Ou ainda,

$$L\{\varepsilon\} = \frac{\sigma_o}{\eta} \frac{1}{s^2 + \frac{Es}{\eta}} = \frac{\sigma_o}{\eta} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{E}{\eta}} \right] \frac{\eta}{E}$$

$$L\{\varepsilon\} = \frac{\sigma_o}{E} \left[L\{u\} - L\{e^{-\frac{E}{\eta}t}\} \right] = L\left\{ \frac{\sigma_o}{E} u - \frac{\sigma_o}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} u \right\}$$

Logo, a função deformação é dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E} \left[1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right] u(t)$$

Observação:

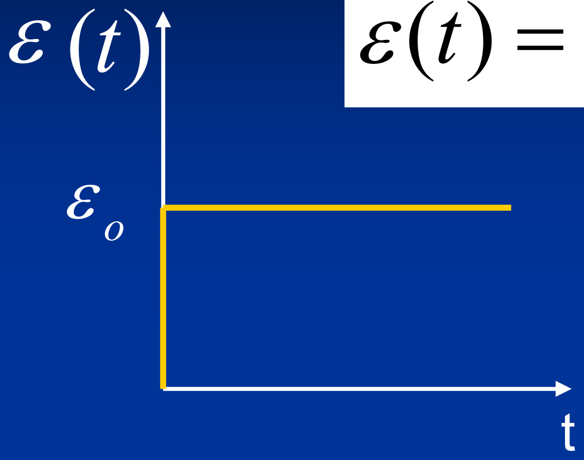
$$L\{\varepsilon\} = \frac{\sigma_o}{\eta s^2 + Es} \qquad sL\{\varepsilon\} = \frac{\sigma_o s}{\eta s^2 + Es} = \frac{\sigma_o}{\eta s + E}$$

Aplicando os teoremas dos limites:

$$\lim_{s\to\infty} sL\{\varepsilon\} = \lim_{s\to\infty} \frac{\sigma_o}{\eta s + E} \qquad \boxed{\varepsilon(0^+) = 0}$$

$$\lim_{s\to 0} sL\{\varepsilon\} = \lim_{s\to 0} \frac{\sigma_o}{\eta s + E} \qquad \boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_o}{E}}$$

TESTE DE RELAXAÇÃO – MODELO DE KELVIN



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o . u(t)$$

$$L\{\dot{\varepsilon}\} + \frac{E}{\eta} L\{\varepsilon\} = \frac{1}{\eta} L\{\sigma\}$$

$$\left[s + \frac{E}{\eta} \right] L\{\varepsilon\} = \frac{1}{\eta} L\{\sigma\} \Rightarrow \left[s + \frac{E}{\eta} \right] \varepsilon_o \frac{1}{s} = \frac{1}{\eta} L\{\sigma\}$$

$$L\{\sigma\} = \eta \varepsilon_o + \frac{E}{s} \varepsilon_o = \eta \varepsilon_o L\{\delta(t)\} + E \varepsilon_o L\{u(t)\}$$

$$L\{\sigma\} = L\{\eta\varepsilon_o\delta(t) + E\varepsilon_o u(t)\}$$

$$\boxed{\sigma(t) = \varepsilon_o\left[\eta\delta(t) + Eu(t)\right]}$$

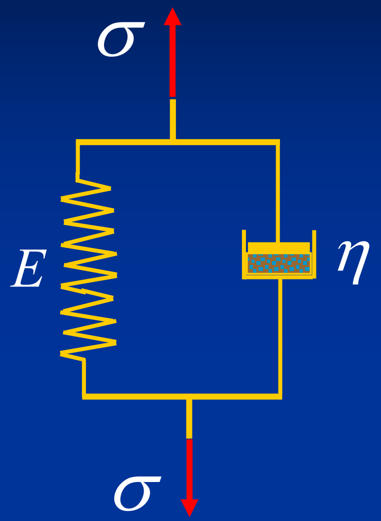
Observação:

$$L\{\sigma\} = \eta\varepsilon_o + \frac{E}{s}\varepsilon_o \quad \Rightarrow \quad sL\{\sigma\} = s\eta\varepsilon_o + E\varepsilon_o$$

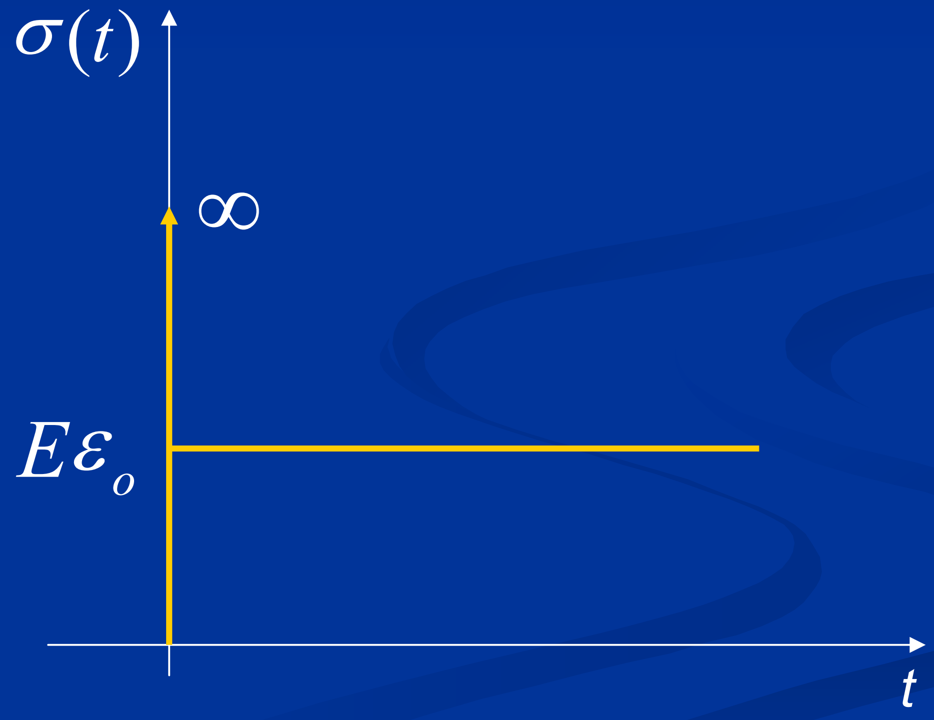
$$\lim_{s\to\infty} sL\{\sigma\} = \lim_{s\to\infty} s\eta\varepsilon_o + \lim_{s\to\infty} E\varepsilon_o \to \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma\left(0^+\right) \to \infty}$$

$$\lim_{s\to 0} sL\{\sigma\} = \lim_{s\to 0} s\eta\varepsilon_o + \lim_{s\to 0} E\varepsilon_o = E\varepsilon_o \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma\left(\infty\right) = E\varepsilon_o}$$

GRÁFICO TENSÃO X TEMPO NO ENSAIO DE RELAXAÇÃO

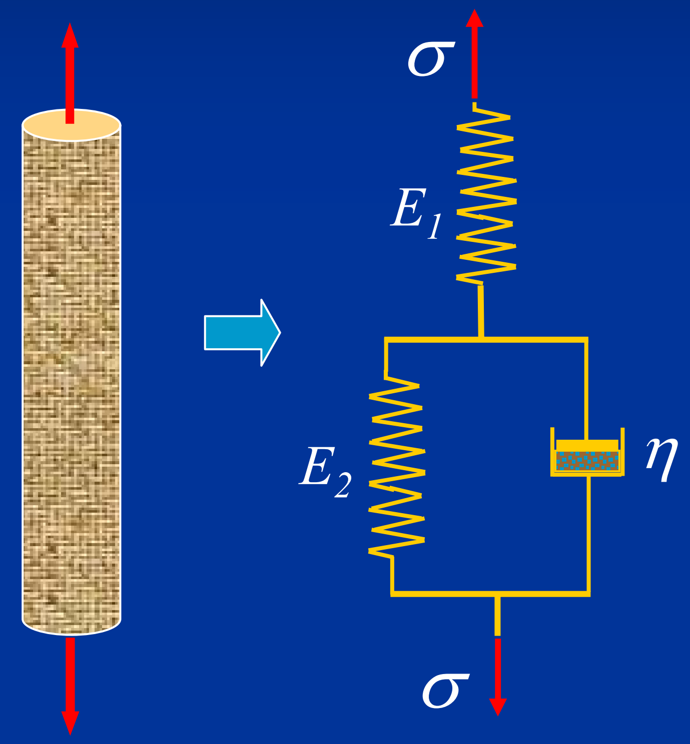


$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o . u(t)$$



MODELOS VISCOELÁSTICOS LINEARES

MODELO DO SÓLIDO STANDARD OU PADRÃO



Equação de equilíbrio:

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) = \sigma_2(t)$$

$$\sigma(t) = \sigma_{m1}(t) = \sigma_{m2}(t) + \sigma_a(t)$$

Equação de compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{m1}(t) + \varepsilon_{m2}(t)$$

$$\varepsilon_{m2}(t) = \varepsilon_a(t)$$

Equações constitutivas:

$$\sigma_{m1} = E_1\,\varepsilon_{m1}(t)$$

$$\sigma_{m2} = E_2\,\varepsilon_{m2}(t) \qquad \sigma_a(t) = \eta\dot{\varepsilon}_a(t)$$

$$\sigma(t) = E_2\, \varepsilon_{m2}(t) + \eta \dot{\varepsilon}_a(t)$$

$$\sigma(t) = E_2 \left[\varepsilon(t) - \varepsilon_1(t)\right] + \eta\left[\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}_1(t)\right]$$

$$\sigma(t) = E_2\, \varepsilon(t) - E_2 \frac{\sigma(t)}{E_1} + \eta \dot{\varepsilon}(t) - \frac{\eta}{E_1}\sigma(t)$$

Equação Diferencial do Modelo do Sólido Padrão:

$$\frac{\eta}{E_1}\dot{\sigma}(t) + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t) + E_2\varepsilon(t)$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DOS MODELOS

Modelo de Maxwell

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

Modelo de Kelvin

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\eta}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

Modelo do Sólido Padrão

$$\frac{\eta}{E_1}\dot{\sigma}(t) + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t) + E_2\varepsilon(t)$$

OPERADORES DIFERENCIAIS LINEARES

Em geral, as equações diferenciais dos modelos viscoelásticos podem ser expressas na forma:

$$\boxed{P\sigma = Q\varepsilon}$$

onde P e Q são operadores diferenciais lineares dados por

$$P = p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots\ldots + p_m \frac{\partial^m}{\partial t} = \sum_{j=0}^{m} p_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

$$Q = q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots\ldots + q_n \frac{\partial^n}{\partial t} = \sum_{j=0}^{n} q_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

Observação: É prático fazer $p_o=1$

$$P\sigma = Q\varepsilon \;\Rightarrow\; L\{P\sigma\} = L\{Q\varepsilon\}$$

$$L\{P\sigma\} = L\left\{ p_0\sigma + p_1\frac{\partial\sigma}{\partial t} + p_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + \dots + p_m\frac{\partial^m\sigma}{\partial t^m} \right\}$$

$$L\{P\sigma\} = p_0\overline{\sigma} + p_1 s\overline{\sigma} + p_2 s^2\overline{\sigma} + \dots + p_m s^m\overline{\sigma}$$

$$L\{P\sigma\} = (p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_m s^m)\overline{\sigma}$$

$\overline{P}$

Analogamente,

$$L\{Q\varepsilon\} = (q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n)\overline{\varepsilon}$$

$\overline{Q}$

$$\overline{P}\,\overline{\sigma} = \overline{Q}\,\overline{\varepsilon}$$

EXEMPLOS DE OPERADORES DIFERENCIAIS LINEARES

Modelo Maxwell

$$P = 1 + \frac{\eta}{E}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$Q = \eta \frac{\partial}{\partial t}$$

Modelo Kelvin

$$P = 1$$

$$Q = E + \eta \frac{\partial}{\partial t}$$

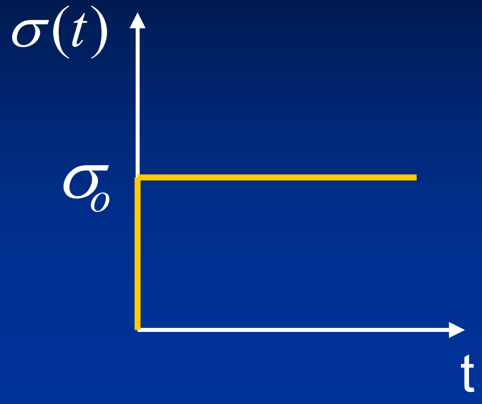
Modelo de Sólido Padrão

$$P = 1 + \frac{\eta}{E_1 + E_2}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$Q = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2}\frac{\partial}{\partial t}$$

REPRESENTAÇÃO POR INTEGRAIS HEREDITÁRIAS

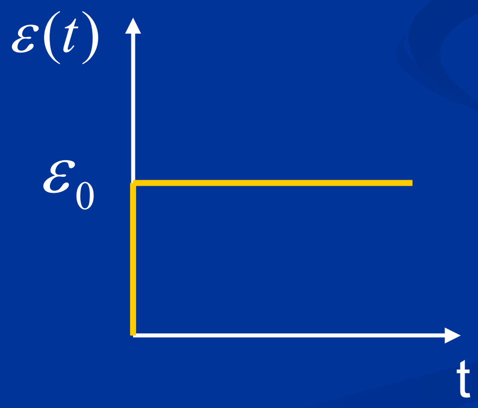
Teste de Fluência



$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) u(t)$$

$$J(t) = Função\ de\ Fluência$$

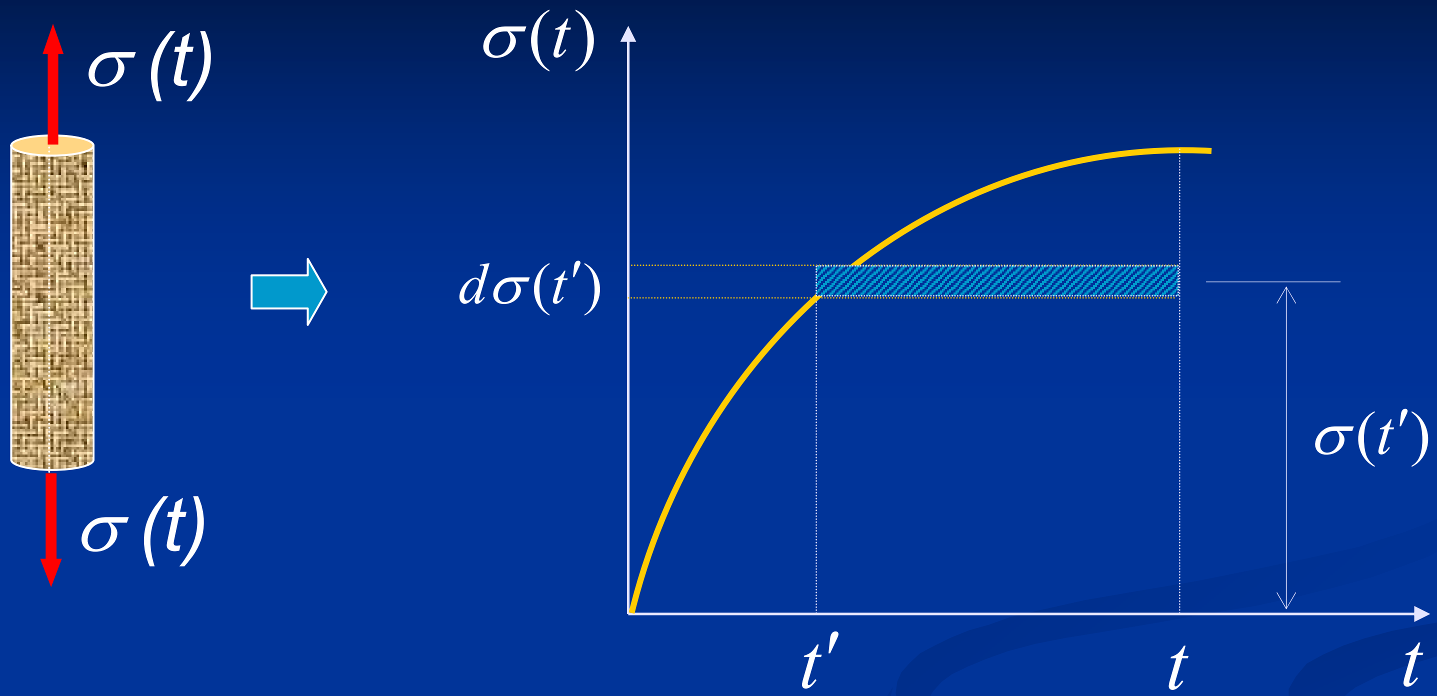
Teste de Relaxação



$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) u(t)$$

$$J(t) = Função\ de\ Relaxação$$

Supor uma história de tensão como mostrado abaixo



$$\sigma(t') = \int_{0^-}^{t'} d\sigma(t')$$

$$d\varepsilon(t,t') = d\sigma(t').J(t-t').u(t-t')$$

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^{t} d\varepsilon(t,t') = \int_{0^-}^{t} J(t-t')u(t-t')d\sigma(t') = \int_{0^-}^{t} J(t-t')u(t-t')\frac{d\sigma}{dt'}dt'$$

$$\varepsilon(t)-\varepsilon(0^-)=\int_{0^-}^{t} J(t-t')\frac{d\sigma}{dt}dt' \;\Rightarrow\; \boxed{\varepsilon(t)=\int_{0^-}^{t} J(t-t')\frac{d\sigma}{dt'}dt'}$$

Pode-se escrever: $$\boxed{\varepsilon(t)=J^{*}\sigma(t)}$$

$$J^{*}\ \textit{é um operador, tal que}\ J^{*}(\ )=\int_{0^-}^{t} J(t-t')(\dot{\ })dt'$$

Analogamente, pode-se encontrar $$\boxed{\sigma(t)=\int_{0^-}^{t} Y(t-t')\frac{d\varepsilon}{dt'}dt'}$$

$$\boxed{\sigma(t)=Y^{*}\varepsilon(t)}$$

$$Y^{*}\ \textit{é um operador, tal que}\ Y^{*}(\ )=\int_{0^-}^{t} Y(t-t')(\dot{\ })dt'$$

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^{t} J(t-t') \frac{d\sigma}{dt'} dt'$$

$$\sigma(t) = \int_{0^-}^{t} Y(t-t') \frac{d\varepsilon}{dt'} dt'$$

Integrais Hereditárias

ou

Integrais da Superposição de Boltzmann

Teorema da Convolução

$$J(t) = 0, \; \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad para\, t < 0 \quad \Rightarrow \quad L\{\varepsilon(t)\} = L\{J(t)\}.L\{\frac{d\sigma}{dt}\}$$

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{J}(s).s\bar{\sigma}(s) \quad \Rightarrow \quad \boxed{s\bar{J}(s) = \frac{\bar{\varepsilon}(s)}{\bar{\sigma}(s)}}$$

Teorema da Convolução

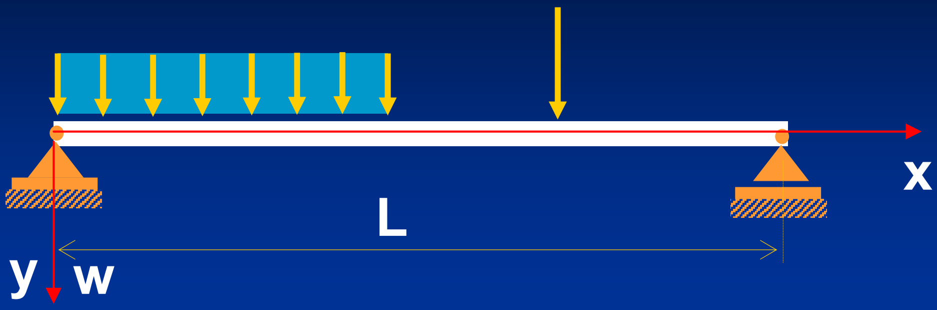
$$Y(t) = 0,\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad para\ t < 0 \quad \Rightarrow \quad L\{\sigma(t)\} = L\{Y(t)\}.L\{\frac{d\varepsilon}{dt}\}$$

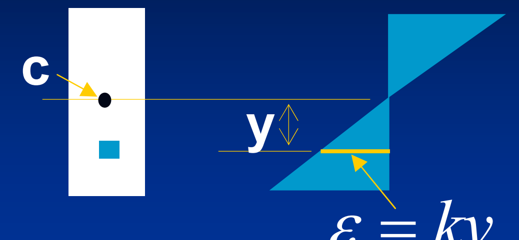
$$\bar{\sigma}(s) = \bar{Y}(s).s\bar{\varepsilon}(s) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{s\bar{Y}(s)} = \frac{\bar{\varepsilon}(s)}{\bar{\sigma}(s)}}$$

Em resumo,

$$\boxed{s\bar{J}(s) = \frac{1}{s\bar{Y}(s)} = \frac{\bar{\varepsilon}(s)}{\bar{\sigma}(s)} = \frac{\bar{P}}{\bar{Q}}}$$

Viga de material elástico linear





seção deformação

Relação constitutiva: $\boxed{\sigma(t) = E\varepsilon(t)} \Rightarrow \boxed{\overline{\sigma}(s) = E\overline{\varepsilon}(s)}$

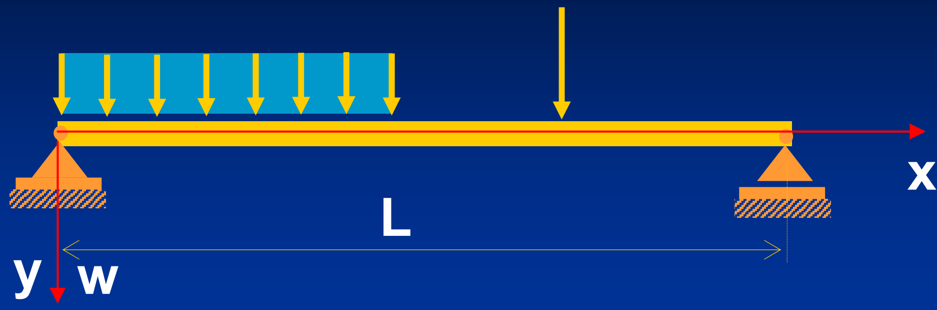
Equações de equilíbrio:

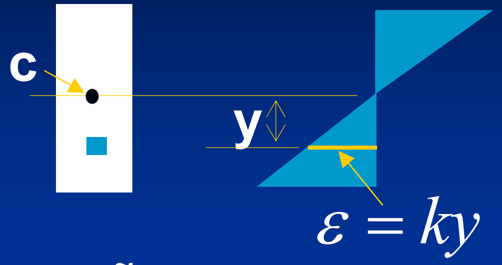
$$\int_A \sigma dA = 0 \Rightarrow \int_A E\,\varepsilon dA = 0 \Rightarrow Ek\int_A y dA = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{y} = 0}$$

$$M = \int_A \sigma y dA \Rightarrow M = \int_A Eky^2 dA \Rightarrow \boxed{M = kEI}$$

Para pequenos deslocamentos: $k \cong -\dfrac{d^2 w}{dx^2} \Rightarrow \boxed{EI\dfrac{d^2 w}{dx^2} = -M}$

Viga de material viscoelástico linear





seção

deformação

Relação constitutiva:

$$\boxed{P\sigma = Q\varepsilon}$$

$$\bar{\sigma}(s) = \frac{\bar{Q}}{\bar{P}}\bar{\varepsilon}(s)$$

Equações de equilíbrio:

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A P\sigma dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A Q\varepsilon dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A Q(ky)dA = 0$$

$$Q(k)\int_A ydA = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = 0$$

Tal como na viga elástica linear

$$M = \int_A \sigma y dA \Rightarrow P(M) = \int_A P\sigma y dA \Rightarrow P(M) = \int_A Q\varepsilon y dA$$

$$P(M) = \int_A Q(ky) y dA \Rightarrow P(M) = \int_A Q(k) y^2 dA$$

$$P(M) = Q(k)I = \frac{I}{y} Q\varepsilon = \frac{I}{y} P\sigma \Rightarrow P(M) - \frac{I}{y} P(\sigma) = 0$$

$$P(M - \frac{\sigma I}{y}) = 0 \Rightarrow \overline{P}(\overline{M}(s) - \frac{\overline{\sigma}(s) I}{y}) = 0 \Rightarrow \overline{M}(s) - \frac{\overline{\sigma}(s) I}{y} = 0$$

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Mesma expressão para a viga de material elástico linear

$$P(M) = Q(k)I \cong Q\left(-\frac{d^2w}{dx^2}\right)I$$

$$\overline{P}(L\{M\}) = -\overline{Q}\left(L\left\{\frac{d^2w}{dx^2}\right\}\right)I \Rightarrow L\{M\} = -\frac{\overline{Q}}{\overline{P}}\left(L\left\{\frac{d^2w}{dx^2}\right\}\right)I$$

$$L\{M\} = -\frac{\overline{Q}}{\overline{P}}\left(L\left\{\frac{d^2w}{dx^2}\right\}\right)I$$

$$\boxed{\frac{\overline{Q}}{\overline{P}}I.L\left\{\frac{d^2w}{dx^2}\right\} = -L\{M\}}$$

Analogia Viga Elástica Linear – Viga Viscoelástica Linear

Viga Viscoelástica linear

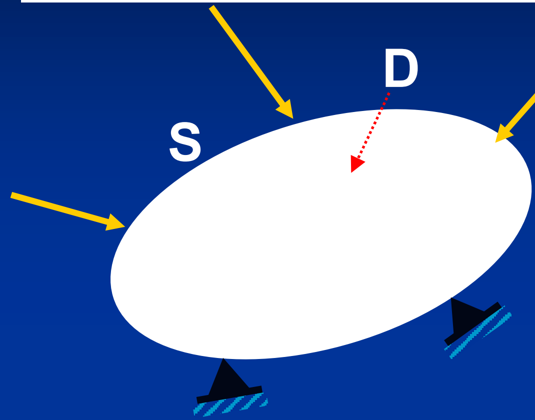
$$\frac{\overline{Q}}{\overline{P}}I.L\left\{\frac{d^2w}{dx^2}\right\} = -L\{M\}$$

Viga elástica linear

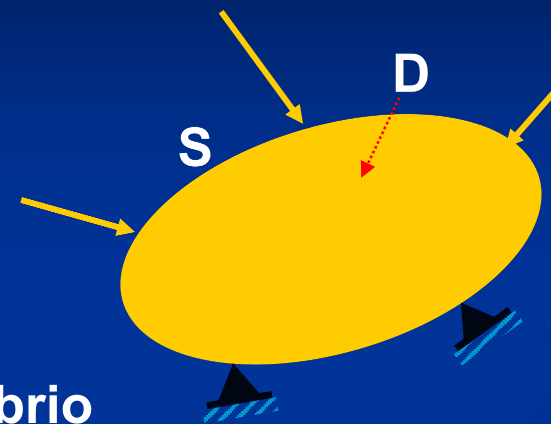
$$E\,I.L\left\{\frac{d^2w}{dx^2}\right\} = -L\{M\}$$

PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

Corpo elástico linear



Corpo viscoelástico linear



Equações de equilíbrio

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0$$

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0$$

Equações deformações-deslocamentos

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Condições de contorno

$$u_i = F_i \quad sobre \quad S_1$$
$$\sigma_{ij} n_j = G_i \quad sobre \quad S_2$$

$$S_1 \cup S_2 = S$$

$$u_i = F_i \quad sobre \quad S_1$$
$$\sigma_{ij} n_j = G_i \quad sobre \quad S_2$$

Equações constitutivas

$$\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk} \quad \Longleftrightarrow \quad P^K \sigma_{kk} = Q^K \varepsilon_{kk}$$

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} = 2G e_{ij} \quad \Longleftrightarrow \quad P^G s_{ij} = Q^G e_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{kk} = 3K\bar{\varepsilon}_{kk} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\sigma}_{kk} = \frac{\bar{Q}^K}{\bar{P}^K}\bar{\varepsilon}_{kk}$$

Domínio da Transformada de Laplace

$$\bar{s}_{ij} = 2G\bar{e}_{ij} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{s}_{ij} = \frac{\bar{Q}^G}{\bar{P}^G}\bar{e}_{ij}$$

$$3K \Leftrightarrow \frac{\bar{\mathrm{Q}}^{\mathrm{K}}(s)}{\bar{P}^K(s)}$$

Correspondência

$$2G \Leftrightarrow \frac{\bar{\mathrm{Q}}^{\mathrm{G}}(s)}{\bar{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(s)}$$

PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

PROCEDIMENTOS

1) *Encontrar a Transformada de Laplace da solução elástica linear. Se B_i, F_i e G_i são independentes do tempo, esta etapa é trivial.*

2) *Substituir 3K e 2G na expressão da Transformada de Laplace da solução elástica linear pelas relações entre as Transformadas de Laplace dos operadores diferenciais correspondentes.*

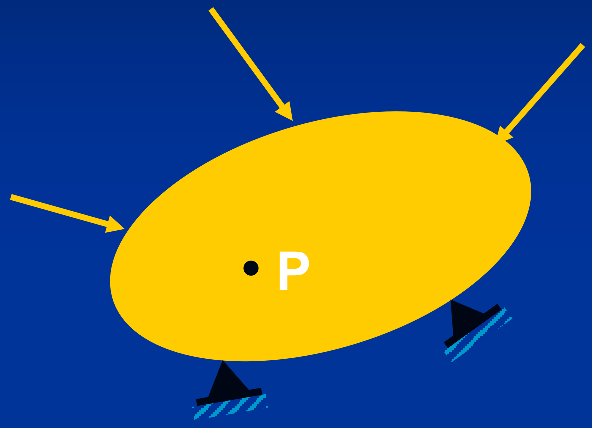
$$3K \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{\mathrm{Q}}^{\mathrm{K}}(s)}{\overline{P}^{K}(s)} = \frac{1}{s\overline{J}^{K}(s)} = s\overline{Y}^{K}(s)$$

$$2\mathrm{G} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{\mathrm{Q}}^{\mathrm{G}}(s)}{\overline{P}^{G}(s)} = \frac{1}{s\overline{J}^{G}(s)} = s\overline{Y}^{G}(s)$$

3) *Inverter a solução no domínio da Transformada de Laplace para o domínio do tempo.*

Relações Constitutivas Viscoelásticas Lineares Tridimensionais

Sólido viscoelástico



Vetores deformação e tensão

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_i(t) = \int_0^t C_{ij}(t-t')\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial t'}dt'} \qquad \boxed{\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(t-t')\frac{\partial \sigma_j}{\partial t'}dt'}$$

$C_{ij} = \textit{funções de relaxação}$ $\quad$ $D_{ij} = \textit{funções de fluência}$

Para o caso: $\sigma_i(t) = \bar{\sigma}_i.u(t)$ $\bar{\sigma}_i = const.$

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(t-t')\frac{\partial \sigma_j}{\partial t'}dt' = \int_0^t D_{ij}(t-t')\bar{\sigma}_j\delta(t')dt'$$

$$\boxed{\varepsilon_i(t) = D_{ij}(t)\bar{\sigma}_j}$$

Analogamente, quando: $\varepsilon_i(t) = \bar{\varepsilon}_i.u(t)$ $\bar{\varepsilon}_i = const.$

$$\boxed{\sigma_i(t) = C_{ij}(t)\bar{\varepsilon}_j}$$

Observação:

$D_{ij} = D_{ji}$ $C_{ij} = C_{ji}$

Influência da Temperatura

Funções de relaxação dependentes da temperatura T

$$C_{ij}(t,T)$$

$Para\ T = T_0$ *(temperatura de referência), pode-se escrever*

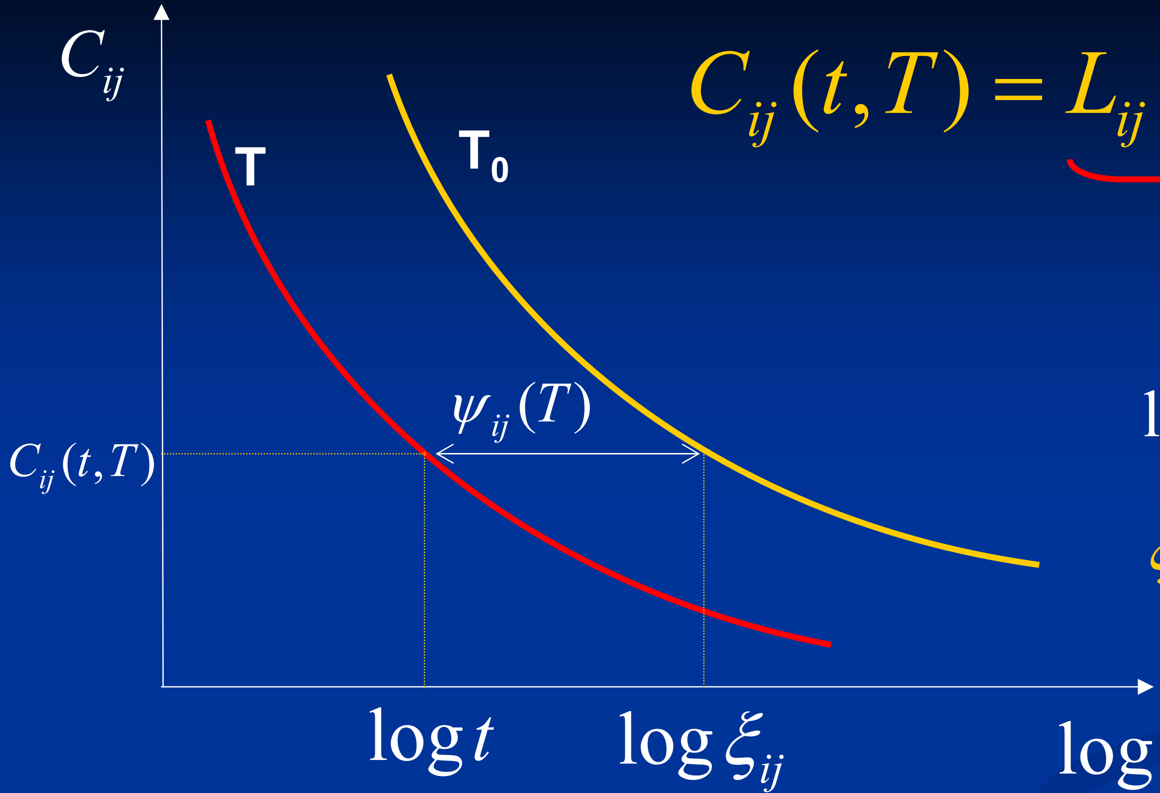
$$C_{ij}(t,T_0) = L_{ij}(\log t)$$

Material Termo-reologicamente simples

$$\boxed{C_{ij}(t,T) = L_{ij}(\log t + \psi_{ij}(T))}$$

$$\boxed{\psi_{ij}(T_0) = 0; \quad \frac{\mathrm{d}\psi_{ij}}{\mathrm{dT}} > 0}$$

ψ_{ij} = *funções de translação do tempo*



$$C_{ij}(t,T) = \underbrace{L_{ij}(\log t + \psi_{ij}(T))}_{C_{ij}(\xi_{ij},T_0)}$$

$$\log \xi_{ij} = \log t + \psi_{ij}(T)$$

$$\xi_{ij} = \textit{tempos reduzidos}$$

Fazendo $\psi_{ij}(T) = -\log \chi_{ij}(t)$ $\Rightarrow$ $\log \xi_{ij} = \log t - \log \chi_{ij}(T)$

$$\log \frac{t}{\xi_{ij}} = \log \chi_{ij}(T) \Rightarrow \xi_{ij} = \frac{t}{\chi_{ij}(T)}$$

$\chi_{ij}(T) =$ *fatores de traslação do tempo (shift factors)*

AVALIAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES VISCOELÁSTICAS
Método das Variáveis de Estado

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(\xi_{ij} - \xi'_{ij}, T_0)\frac{\partial \sigma_j}{\partial t'}dt'$$

Integrando por partes:

$$\varepsilon_i(t) = D_{ij}(T,0)\sigma_j(t) - \int_0^t \frac{\partial D_{ij}(\xi_{ij} - \xi'_{ij}, T_0)}{\partial t'}\sigma_j(t')dt'$$

Usando uma série de Dirichlet-Prony:

$$\boxed{D_{ij}(\xi_{ij} - \xi'_{ij}, T_0) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^{N} D_{ij}^p\left[1 - \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)\right]}$$

$D_{ij}^0, D_{ij}^p, \theta_{ij}^p \Rightarrow$ constantes do material

$\theta_{ij}^p \Rightarrow$ tempos de retardação do material

Derivando D_{ij} *em relação a* t' :

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial t'} = -\frac{1}{\chi_{ij}(T)} \sum_{p=1}^{N} \frac{D_{ij}^{p}}{\theta_{ij}^{p}} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^{p}}\right)$$

Fazendo

$$F_{ij}^{p} = \frac{1}{\chi_{ij}(T)} \frac{D_{ij}^{p}}{\theta_{ij}^{p}} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^{p}}\right)$$

$$\varepsilon_i(t) = D_{ij}(T,0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^{N} \int_0^t F_{ij}^{p} \sigma_j(t')dt'$$

$$\boxed{\varepsilon_i(t) = D_{ij}(T,0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^{N} \sum_{s=1}^{m} \Phi_{is}^{p}(t)}$$

$$\varepsilon_i(t) = D_{ij}(T,0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^{N}\sum_{s=1}^{m}\Phi_{is}^{p}(t)$$

$$\begin{cases} \Phi_{11}^{p}(t) = \int_0^t F_{11}^{p}\sigma_1(t')dt' \\ \Phi_{12}^{p}(t) = \int_0^t F_{12}^{p}\sigma_2(t')dt' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{66}^{p}(t) = \int_0^t F_{66}^{p}\sigma_6(t')dt' \end{cases}$$

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i^e(t) + \varepsilon_i^v$$

Deformação elástica $\Rightarrow$ $\varepsilon_i^e(t) = D_{ij}(T,0)\sigma_j(t)$

Deformação viscoelástica $\Rightarrow$ $\varepsilon_i^v(t) = \sum_{p=1}^{N}\sum_{s=1}^{m}\Phi_{is}^{p}(t)$

$Derivando\ as\ expressões\ que\ definem\ \Phi_{ij}^{p}\ em\ relação\ \ a\ \ t:$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_{11}^{p}}{\partial t}+\frac{1}{\theta_{11}^{p}\chi_{11}(T)}\Phi_{11}^{p}=\frac{D_{11}^{p}}{\theta_{11}^{p}\chi_{11}(T)}\sigma_{1}(t)\\
&\frac{\partial \Phi_{22}^{p}}{\partial t}+\frac{1}{\theta_{22}^{p}\chi_{22}(T)}\Phi_{22}^{p}=\frac{D_{22}^{p}}{\theta_{22}^{p}\chi_{22}(T)}\sigma_{2}(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial \Phi_{66}^{p}}{\partial t}+\frac{1}{\theta_{66}^{p}\chi_{66}(T)}\Phi_{66}^{p}=\frac{D_{66}^{p}}{\theta_{66}^{p}\chi_{66}(T)}\sigma_{6}(t)
\end{aligned}\right\}$$

Sistema de equações diferenciais desacopladas

O sistema pode ser resolvido pelo Método das Diferenças Finitas

$$Vale\ observar\ que\ \Phi_{ij}^{p}(0)=0$$

PROCEDIMENTO PARA AVALIAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO

$$\Phi_{ij}^{p}(t+\Delta t)=\int_{0}^{t+\Delta t}\boxed{\frac{1}{\chi_{ij}}\frac{D_{ij}^{p}}{\theta_{ij}^{p}}\exp\left(-\frac{\xi_{ij}+\Delta\xi_{ij}-\xi'_{ij}}{\theta_{ij}^{p}}\right)}\sigma_{j}(t')dt'$$

$$\Phi_{ij}^{p}(t+\Delta t)=\int_{0}^{t}\frac{1}{\chi_{ij}}\frac{D_{ij}^{p}}{\theta_{ij}^{p}}\exp\left(-\frac{\xi_{ij}+\Delta\xi_{ij}-\xi'_{ij}}{\theta_{ij}^{p}}\right)\sigma_{j}(t')dt'+$$

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{1}{\chi_{ij}}\frac{D_{ij}^{p}}{\theta_{ij}^{p}}\exp\left(-\frac{\xi_{ij}+\Delta\xi_{ij}-\xi'_{ij}}{\theta_{ij}^{p}}\right)\sigma_{j}(t')dt'$$

Consideran do $\quad \dfrac{d\xi'_{ij}}{dt'}=\dfrac{1}{\chi_{ij}}$

$$\boxed{\Phi_{ij}^{p}(t+\Delta t)=\Phi_{ij}^{p}(t)\exp\left(-\frac{\Delta\xi_{ij}}{\theta_{ij}^{p}}\right)+D_{ij}^{p}\left[1-\exp\left(-\frac{\Delta\xi_{ij}}{\theta_{ij}^{p}}\right)\right]\sigma_{j}(t)}$$

FORMULAÇÃO INCREMENTAL ATRAVÉS DO MEF

Aplicando o Princípio dos Deslocamentos Virtuais em termos de taxas:

$$\underbrace{\int_V \{\delta\dot{\varepsilon}\}^T \{\dot{\sigma}\} dV}_{\text{Trabalho virtual das forças internas}} = \underbrace{\int_V \{\delta\dot{u}\}^T \{\dot{f}^B\} dV}_{\text{Trabalho virtual das forças de corpo}} + \underbrace{\int_S \{\delta\dot{u}\}^T \{\dot{f}^S\} dS}_{\text{Trabalho virtual das forças de superfície}}$$

$V = volume\ do\ corpo$ $\qquad$ $\delta = variação$

$S = Área\ do\ superfície\ de\ contorno\ do\ corpo$

$\{u\} = vetor\ de\ deslocamentos\ do\ corpo$

$\{f^B\}, \{f^s\} = vetores\ das\ forças\ de\ corpo\ e\ de\ superfície, respectivamente$

Vetor taxa de deformação

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^{e}\} + \{\dot{\varepsilon}^{v}\} + \{\dot{\varepsilon}^{T}\}$$

$\{\dot{\varepsilon}^{e}\} = vetor\ taxa\ de\ deformação\ elástica$

$\{\dot{\varepsilon}^{v}\} = vetor\ taxa\ de\ deformação\ viscoelástica$

$\{\dot{\varepsilon}^{T}\} = vetor\ taxa\ de\ deformação\ térmica$

Vetor taxa de tensão

$$\{\dot{\sigma}\} = [C]\left(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^{v}\} - \{\dot{\varepsilon}^{T}\}\right)$$

$[C] = matriz\ de\ rigidez\ elástica\ do\ material$

Relação entre taxas de deslocamentos nodais e de deformações do elemento finito

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [B]\{\dot{U}\}$$

Relação de interpolação das taxas de deslocamentos do elemento finito

$$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{U}\}$$

Equação do Princípio dos Deslocamentos Virtuais para o elemento

$$\{\delta\dot{U}\}^T \int_V [B]^T [C]\Big(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^v\} - \{\dot{\varepsilon}^T\}\Big)dV = \int_V \{\delta\dot{U}\}^T [N]^T \{\dot{f}^B\}dV + \int_S \{\delta\dot{U}\}^T [N]^T \{\dot{f}^S\}dS$$

$$\Downarrow$$

$$\int_V [B]^T [C]\Big(\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^v\} - \{\dot{\varepsilon}^T\}\Big)dV = \int_V [N]^T \{\dot{f}^B\}dV + \int_S [N]^T \{\dot{f}^S\}dS$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_V [B]^T [C][B]dV\,\{\dot{U}\} = \int_V [N]^T \{\dot{f}^B\}dV + \int_S [N]^T \{\dot{f}^S\}dS \,+ \\ \int_V [B]^T [C]\{\dot{\varepsilon}^v\}dV + \int_V [B]^T [C]\{\dot{\varepsilon}^T\}dV\end{aligned}}$$

$$[K]\{\dot{U}\} = \{\dot{F}^B\} + \{\dot{F}^S\} + \{\dot{F}^v\} + \{\dot{F}^T\}$$

$$[K] = \int_V [B]^T [C][B] dV$$ → **Matriz de rigidez do elemento**

$$\{\dot{F}^B\} = \int_V [N]^T \{\dot{f}^B\} dV$$ → **Vetor de taxas das forças de corpo**

$$\{\dot{F}^S\} = \int_V [N]^T \{\dot{f}^S\} dV$$ → **Vetor de taxas das forças de superfície**

$$\{\dot{F}^v\} = \int_V [B]^T [C] \{\dot{\varepsilon}^v\} dV$$ → **Vetor de taxas das forças viscoelásticas**

$$\{\dot{F}^T\} = \int_V [B]^T [C] \{\dot{\varepsilon}^T\} dV$$ → **Vetor de taxas das forças térmicas**

Equação Incremental de Equilíbrio de um Elemento

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta F^B\} + \{\Delta F^S\} + \{\Delta F^v\} + \{\Delta F^T\}$$

$$[K] = \int_V [B]^T [C][B] dV$$

Matriz de rigidez incremental

$$\{\Delta F^B\} = \int_V [N]^T \{\Delta f^B\} dV$$

Vetor de incrementos de forças de corpo

$$\{\Delta F^S\} = \int_V [N]^T \{\Delta f^S\} dV$$

Vetor de incrementos de forças de superfície

$$\{\Delta F^v\} = \int_V [B]^T [C]\{\Delta \varepsilon^v\} dV$$

Vetor de incrementos de forças viscoelásticas

$$\{\Delta F^T\} = \int_V [B]^T [C]\{\Delta \varepsilon^T\} dV$$

Vetor de incrementos de forças térmicas