



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal de Alagoas



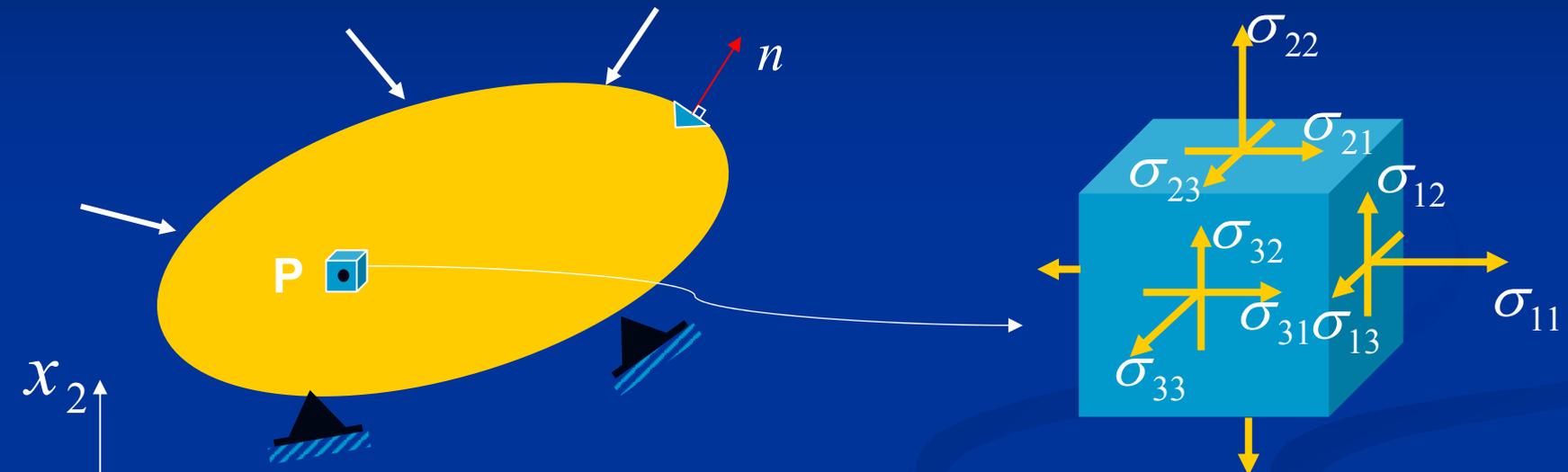
MODELOS CONSTITUTIVOS

Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques

INTRODUÇÃO À TEORIA DA PLASTICIDADE

CONCEITOS BÁSICOS

TENSOR TENSÃO E VETOR TENSÃO

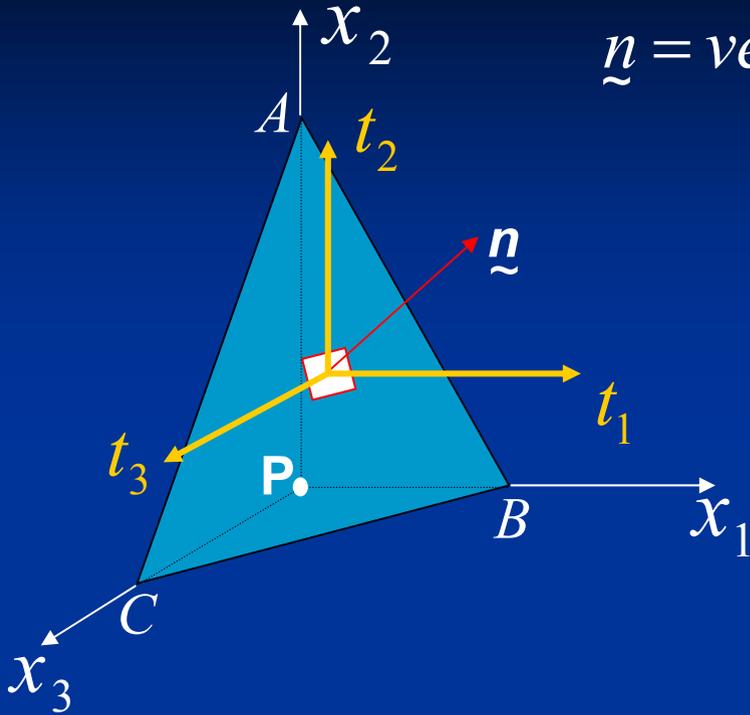


Tensor tensão

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$\underline{\tilde{n}}$ = vetor unitário normal ao plano ABC



$$\underline{\tilde{n}} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{\tilde{\sigma}}^n = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$$

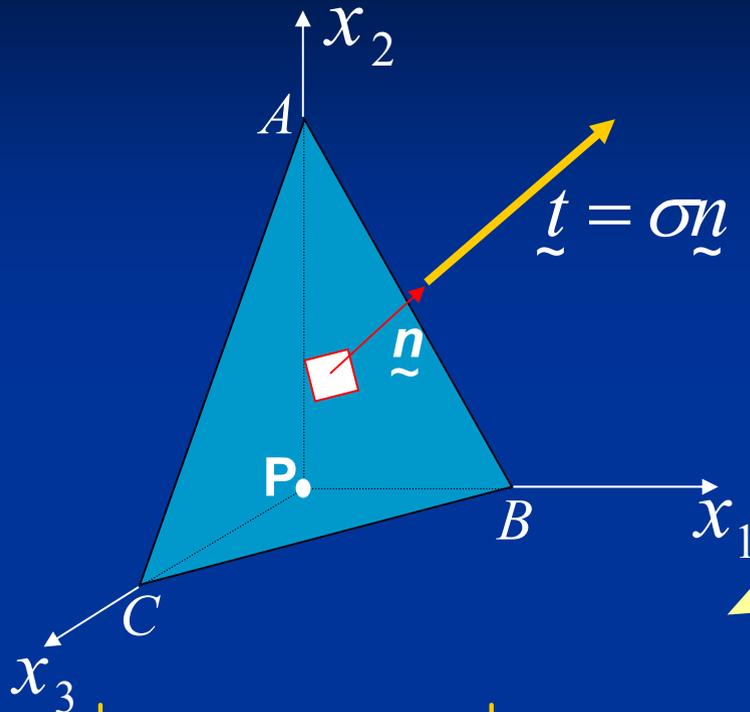
vetor tensão no plano ABC

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$



$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

TENSÕES E DIREÇÕES PRINCIPAIS



$\sigma \rightarrow$ escalar

vetor na direção de \underline{n}

$$\sigma_{ij} n_j - \sigma n_i = 0$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$$

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0$$



$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$\sigma =$ tensões principais

Tensões Principais

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Equação característica

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

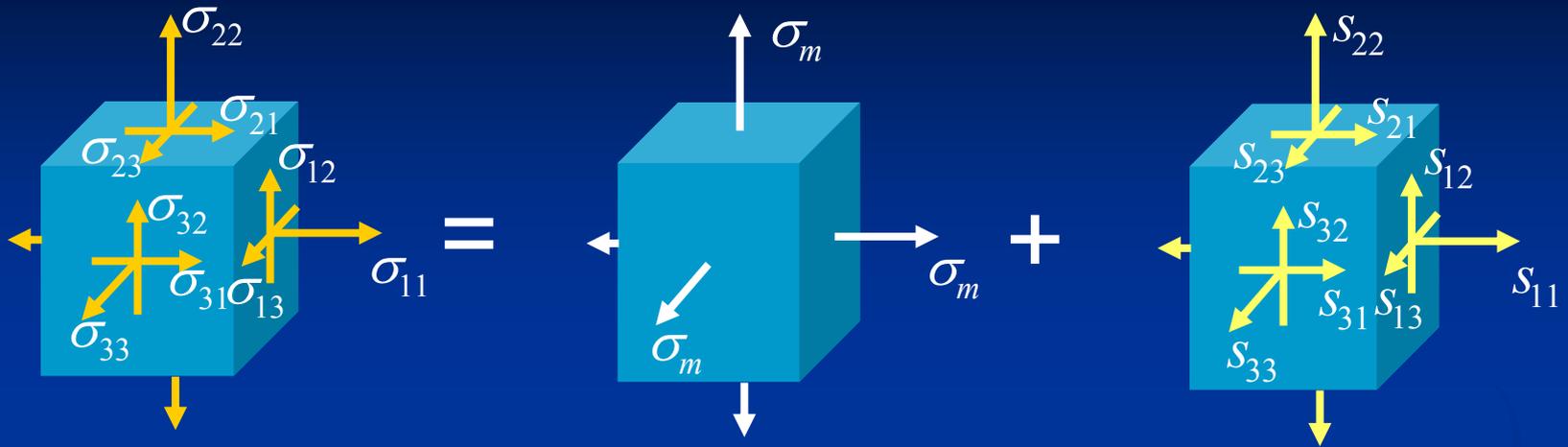
$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$$

Invariantes
do estado de
tensão

TENSOR TENSÃO DESVIADOR E TENSOR TENSÃO HIDROSTÁTICO

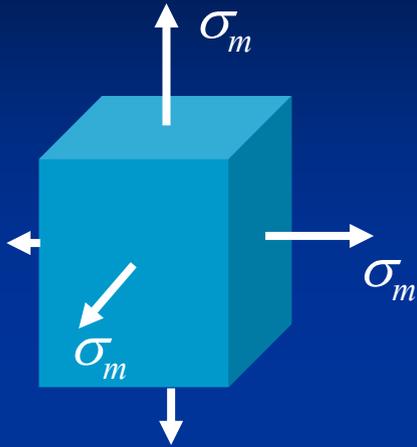


$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \text{tensor tensão hidrostática}$$

$$s_{ij} = \text{tensor de tensão desviador}$$

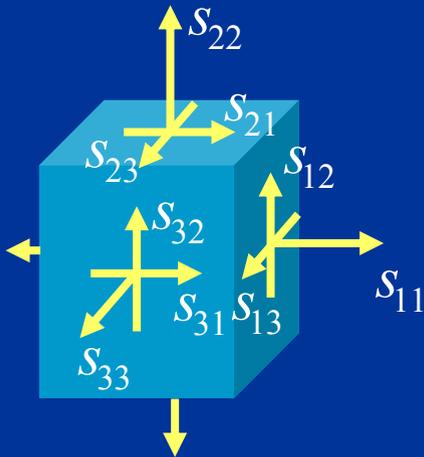
Estado de Tensão Hidrostática



$$\bar{\sigma}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3}$$

Estado de Tensão Desviador

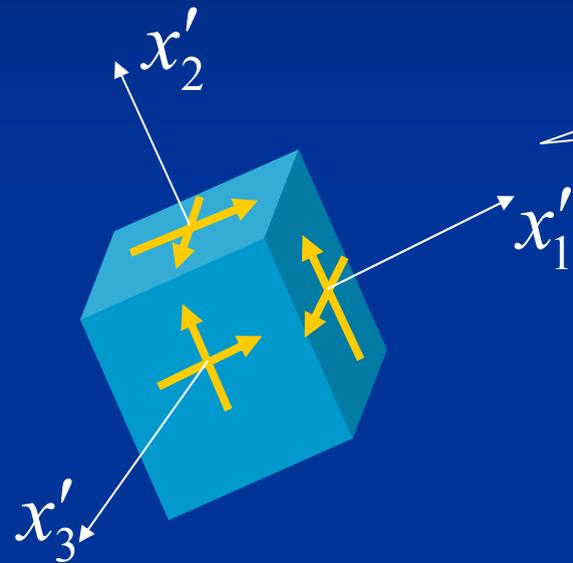


$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Estado de Cisalhamento Puro

Um estado de tensão é dito ser de cisalhamento puro se existem eixos x'_1, x'_2 e x'_3 tal que



$$\sigma_{1'1'} = \sigma_{2'2'} = \sigma_{3'3'} = 0$$

$$\sigma_{i'j'} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{1'2'} & \sigma_{1'3'} \\ \sigma_{2'1'} & 0 & \sigma_{2'3'} \\ \sigma_{3'1'} & \sigma_{3'2'} & 0 \end{bmatrix}$$

Condição necessária e suficiente para um estado de tensão ser de cisalhamento puro

$$I_1 = 0$$



$$\sigma_{ii} = 0$$

O estado de tensão desviador corresponde a um estado de cisalhamento puro

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$s_{11} = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3}$$

$$s_{22} = \sigma_{22} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3}$$

$$s_{33} = \sigma_{33} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3}$$

$$s_{ii} = 0$$

Existem eixos x'_1, x'_2 e x'_3 tal que $s_{1'1'} = s_{2'2'} = s_{3'3'} = 0$

Tensões Principais do Estado de Tensão Desviador

$$\left| s_{ij} - s \delta_{ij} \right| = 0$$

s = tensões principais do estado de tensão desviador

Equação Característica do Estado Desviador

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0$$

s_1
 s_2
 s_3

J_1
 J_2
 J_3

Invariantes do tensor de tensão desviador

Invariantes do Tensor Tensão Desviador

Primeiro Invariante

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 = 0$$

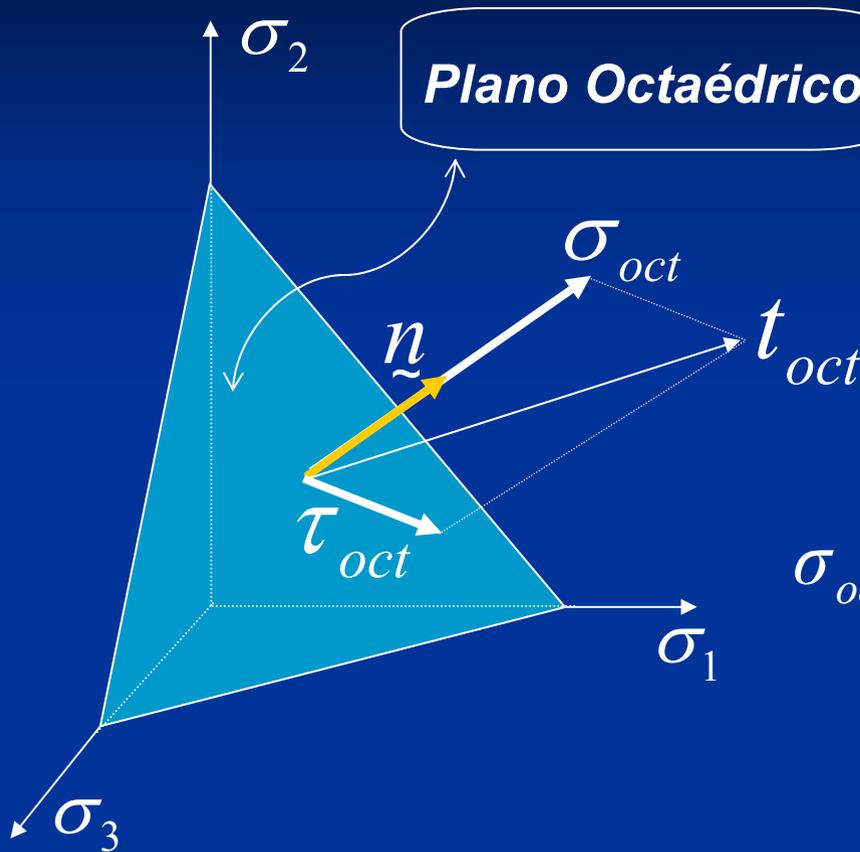
Segundo Invariante

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + s_{12} s_{21} + s_{21} s_{12} + \dots) \\ &= \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \end{aligned}$$

Terceiro Invariante

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = s_1 s_2 s_3$$

Tensões Octaédricas



Plano cuja normal forma ângulos iguais com os eixos principais de tensão

$\underline{\tilde{\sigma}}_{oct}, \underline{\tilde{\tau}}_{oct} = \text{tensões octaédricas}$

$$\underline{\tilde{n}}^T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\underline{\tilde{t}}_{oct} = \underline{\tilde{\sigma}}_{oct} + \underline{\tilde{\tau}}_{oct}$$

Tensões Octaédricas

$$\underline{t}_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

Componente na direção de \underline{n} $\Rightarrow \sigma_{oct} = \underline{t}_{oct} \cdot \underline{n}$

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$



$$\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}$$

Invariante

Tensões Octaédricas

Componente de Cisalhamento

$$\tau_{oct} = \sqrt{t_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2}$$

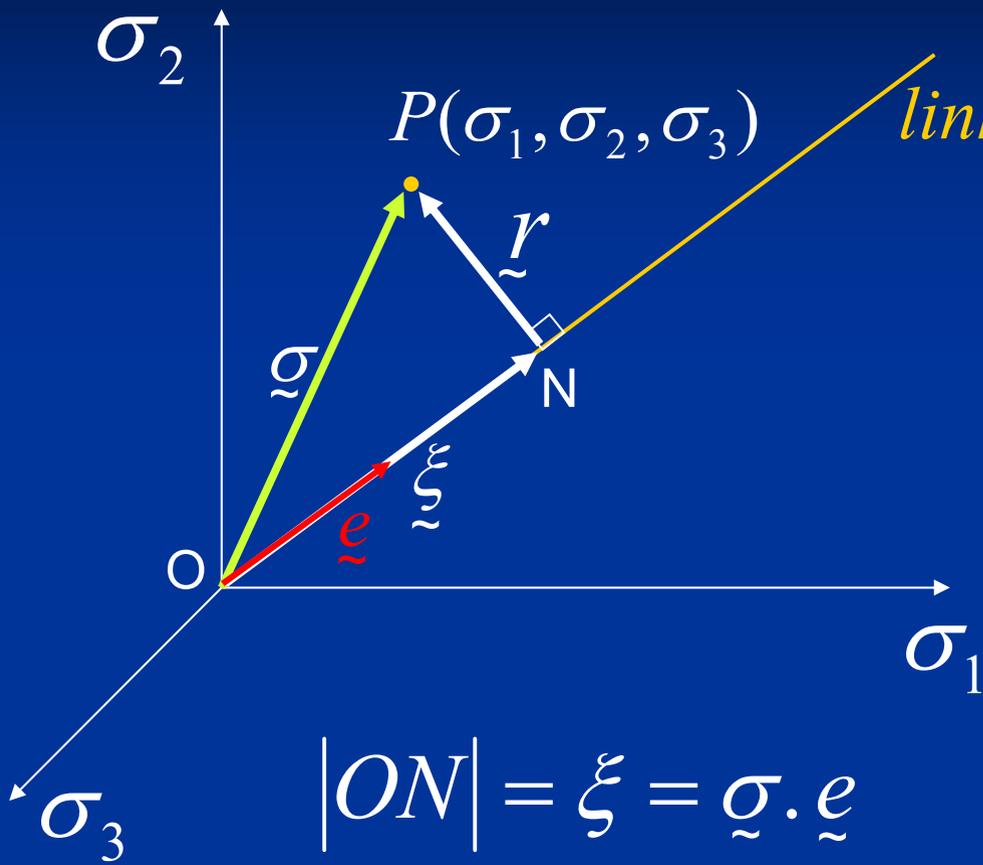
$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{9} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

$6J_2$


$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

Invariante

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESTADO DE TENSÃO



Espaço das tensões principais

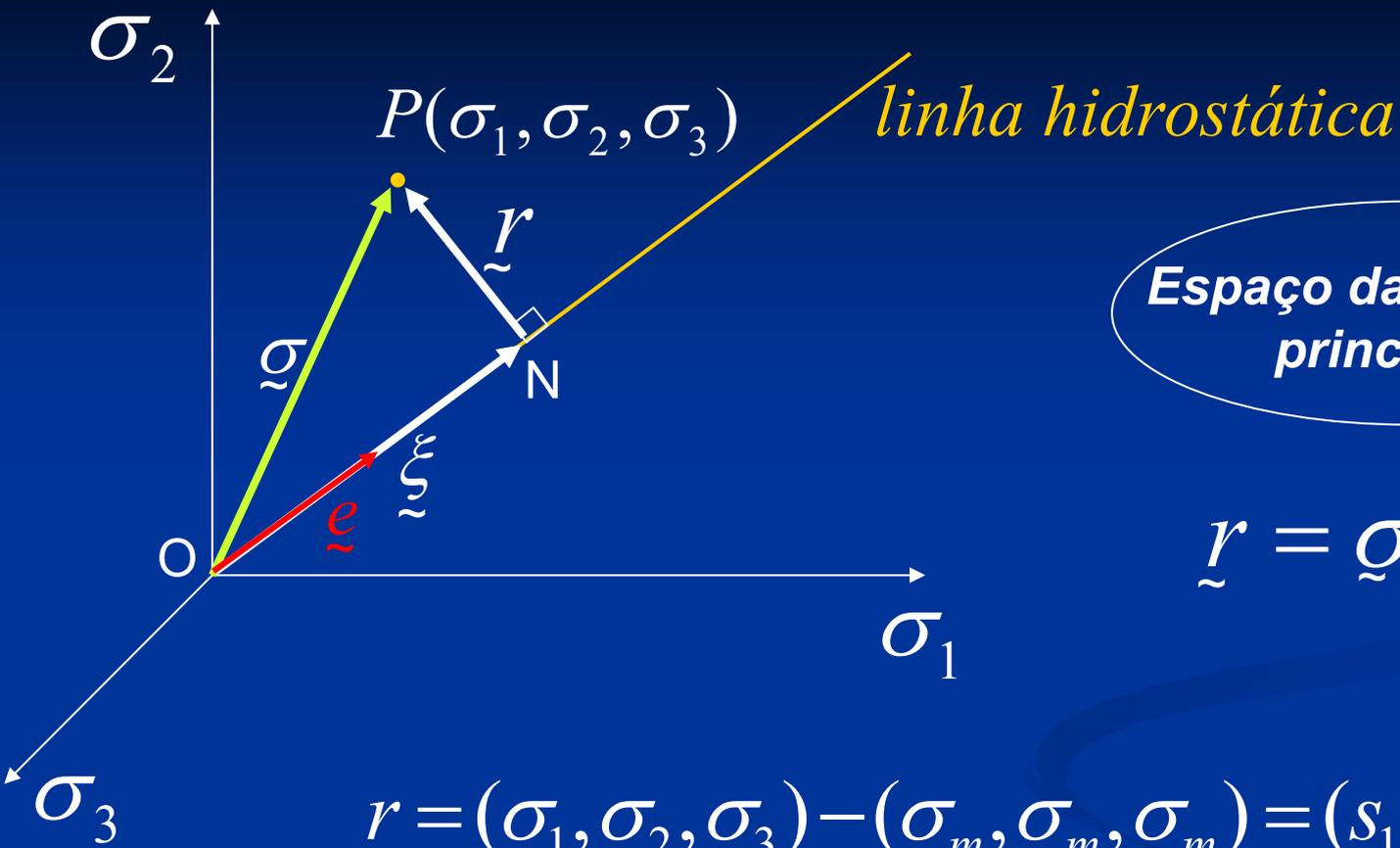
$$\underline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$|ON| = \xi = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}$$

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sigma_m = \sqrt{3}\sigma_{oct} \quad \Rightarrow$$

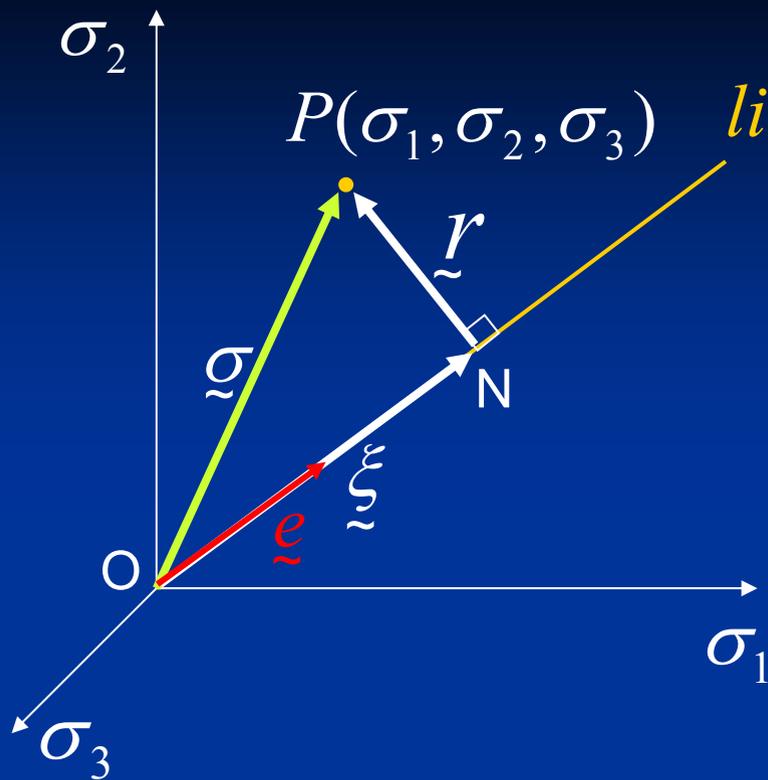
$$\underline{\xi} = (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m)$$



$$\tilde{r} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m) = (s_1, s_2, s_3)$$

$$r = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$$

Invariante



$P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ *linha ou eixo hidrostático*

$$\underline{\sigma} = \overrightarrow{OP} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\underline{\xi} = \overrightarrow{ON} = (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m)$$

$$\underline{r} = \overrightarrow{NP} = (s_1, s_2, s_3)$$

$\underline{\sigma} = \overrightarrow{OP}$ = *vetor de tensões do estado original*

$\underline{\xi} = \overrightarrow{ON}$ = *vetor de tensões do estado hidrostático*

$\underline{r} = \overrightarrow{NP}$ = *vetor de tensões do estado desviador*

TEORIA DA PLASTICIDADE

Material Elastoplástico Perfeito

Postulado 1: *Existe uma função de escoamento $f(\sigma_{ij})$ tal que:*

Material em regime elástico se $f(\sigma_{ij}) < 0$ ou $f(\sigma_{ij}) = 0$ e $\dot{f}(\sigma_{ij}) < 0$

Material em regime plástico se $f(\sigma_{ij}) = 0$ e $\dot{f}(\sigma_{ij}) \geq 0$

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) \quad \text{ou} \quad f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

σ_i \Rightarrow *tensões principais*

α_i \Rightarrow *ângulos que definem as direções principais*

Superfície de Escoamento \Rightarrow

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

Postulado 2: *O material é isótropo*



A função de escoamento independe das direções e não muda com a permutação dos eixos, ou seja, f é simétrica com relação às tensões principais

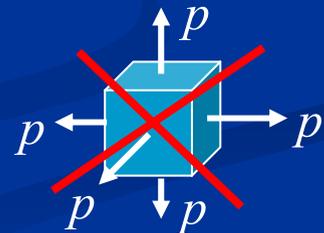
$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3) = f(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2)$$

A função de escoamento pode ser expressa em função dos invariantes

$$f(I_1, I_2, I_3)$$

Postulado 3: *Tensões hidrostáticas não provocam escoamento*

$$f(s_1, s_2, s_3) \quad \text{ou} \quad f(J_2, J_3)$$



Postulado 4: *Os comportamentos à tração e à compressão são idênticos*

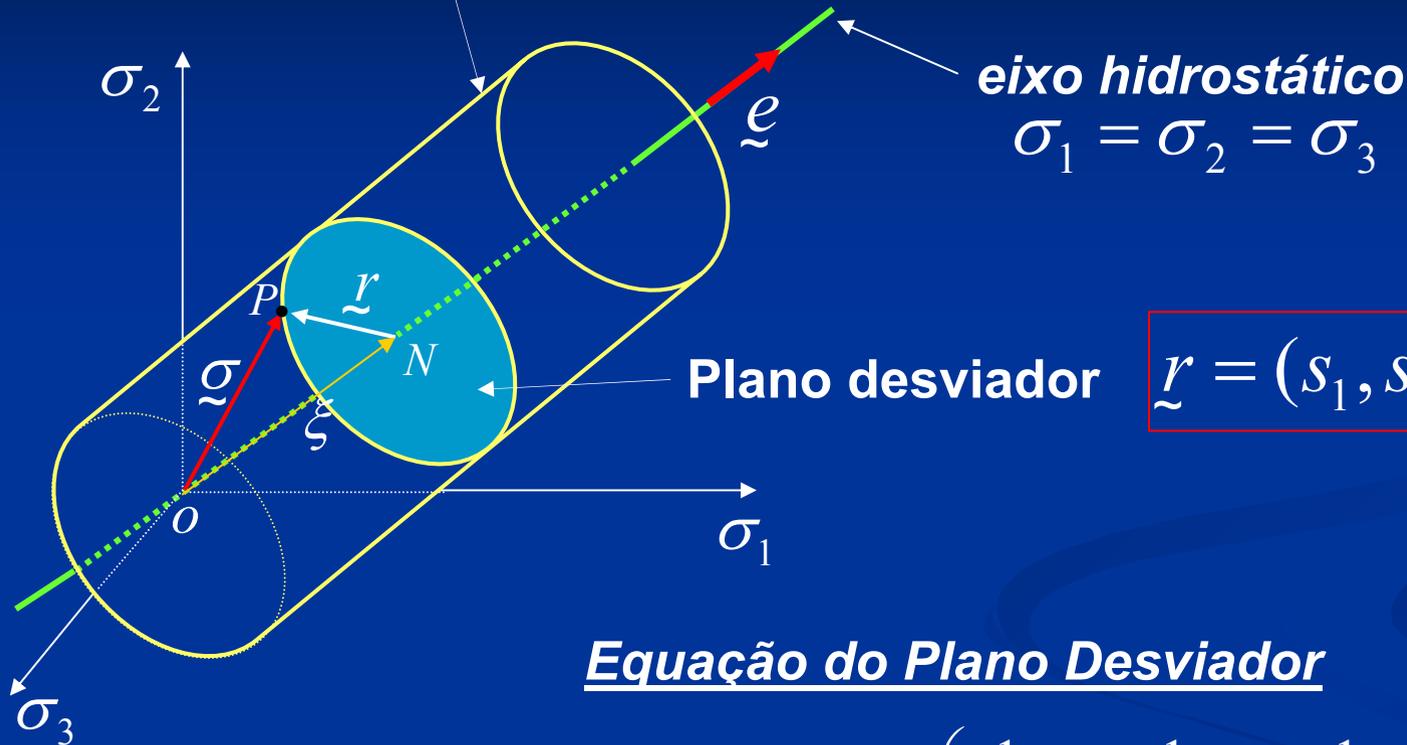


O valor da tensão de escoamento não muda quando o sinal de todas as componentes de tensão são trocados

$$f(\sigma_{ij}) = f(-\sigma_{ij})$$

Geometria da Superfície de Escoamento

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$



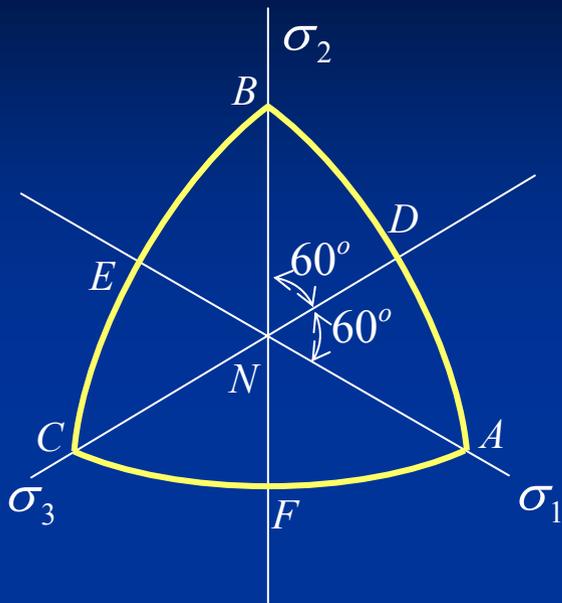
Equação do Plano Desviador

$$\xi = \underline{\sigma} \cdot \underline{e} = (\sigma_1 \vec{i} + \sigma_2 \vec{j} + \sigma_3 \vec{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k} \right)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$



$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \xi$$



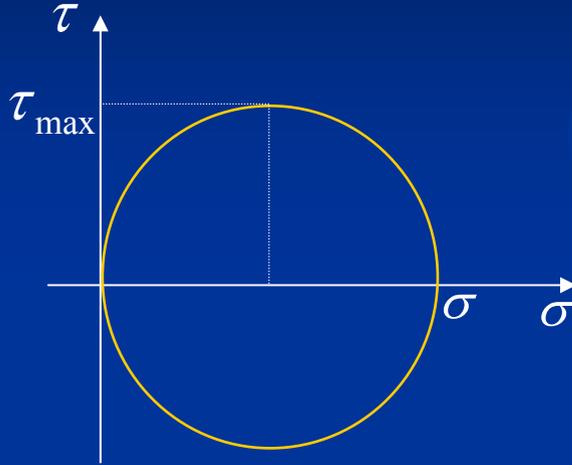
$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é uma função simétrica



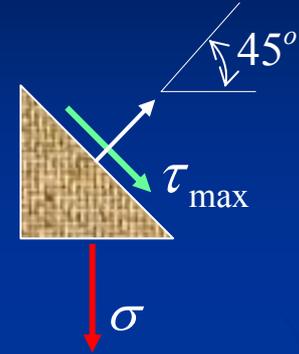
$$NAD \equiv NDB \equiv NEB \equiv NEC \equiv NCF \equiv NFA$$

CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE TRESCA

Critério da Máxima Tensão de Cisalhamento
(Materiais Dúcteis)

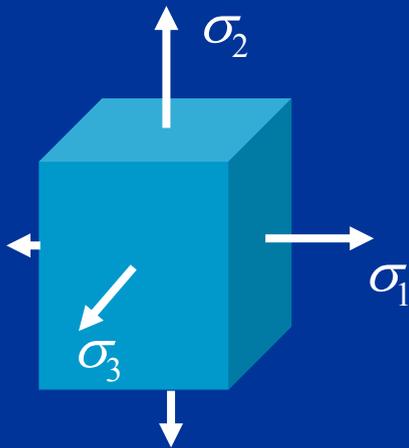


$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$$



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} = K$$

$$K = \frac{Y}{2}$$

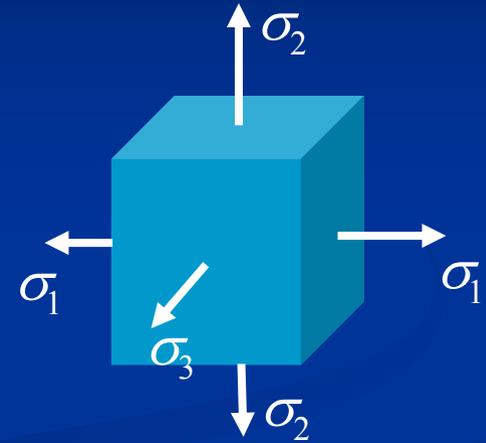
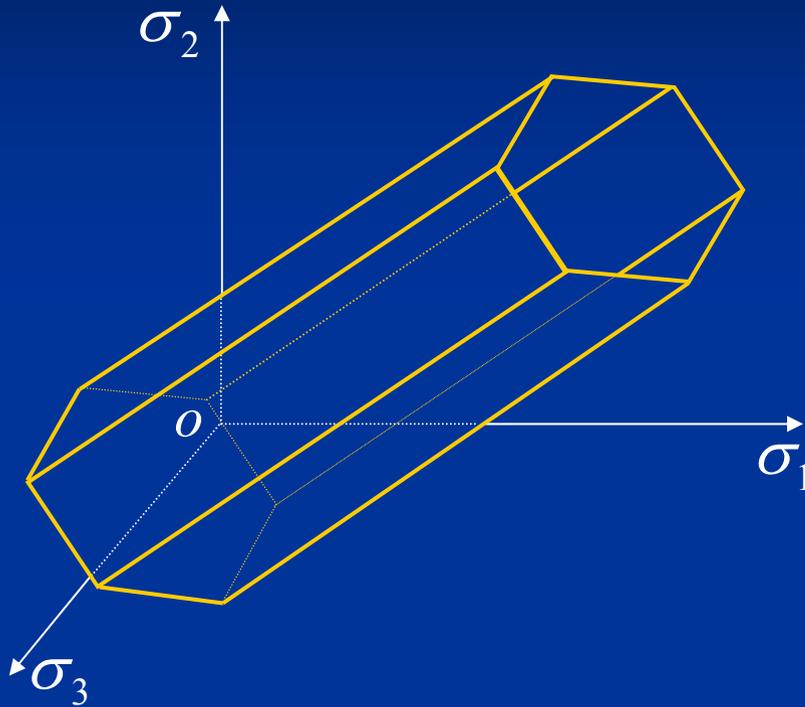


Caso Tridimensional

$$\text{Max}\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) = K$$

Representação Geométrica do Critério de Tresca

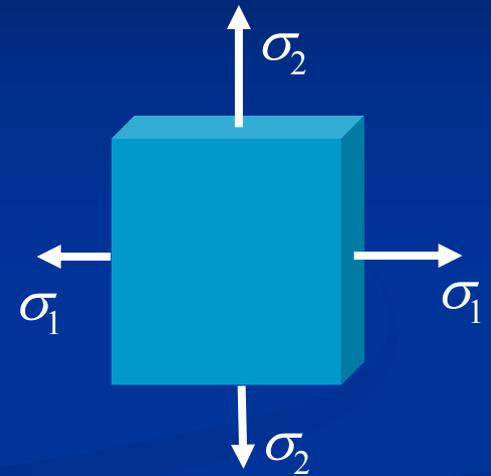
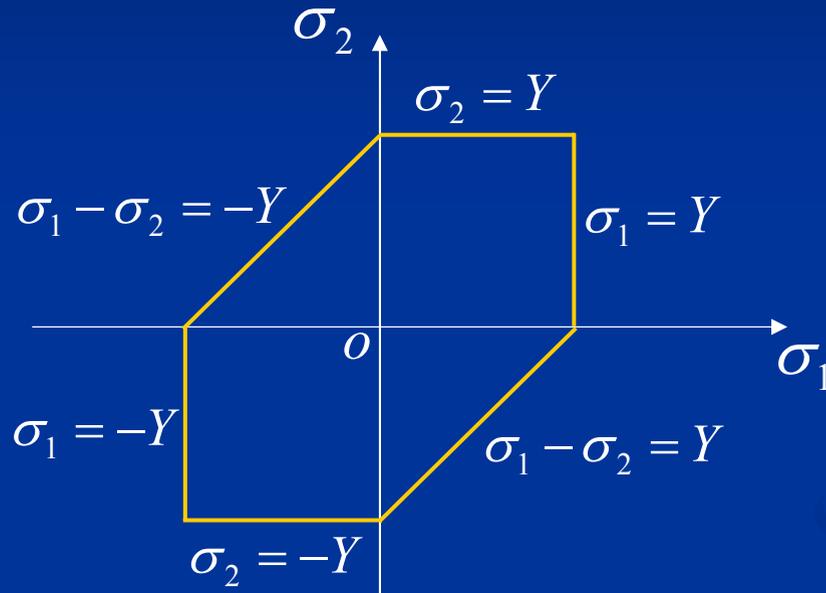
Tridimensional



$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{Max} \left(\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right) - K = 0$$

Representação Geométrica do Critério de Tresca

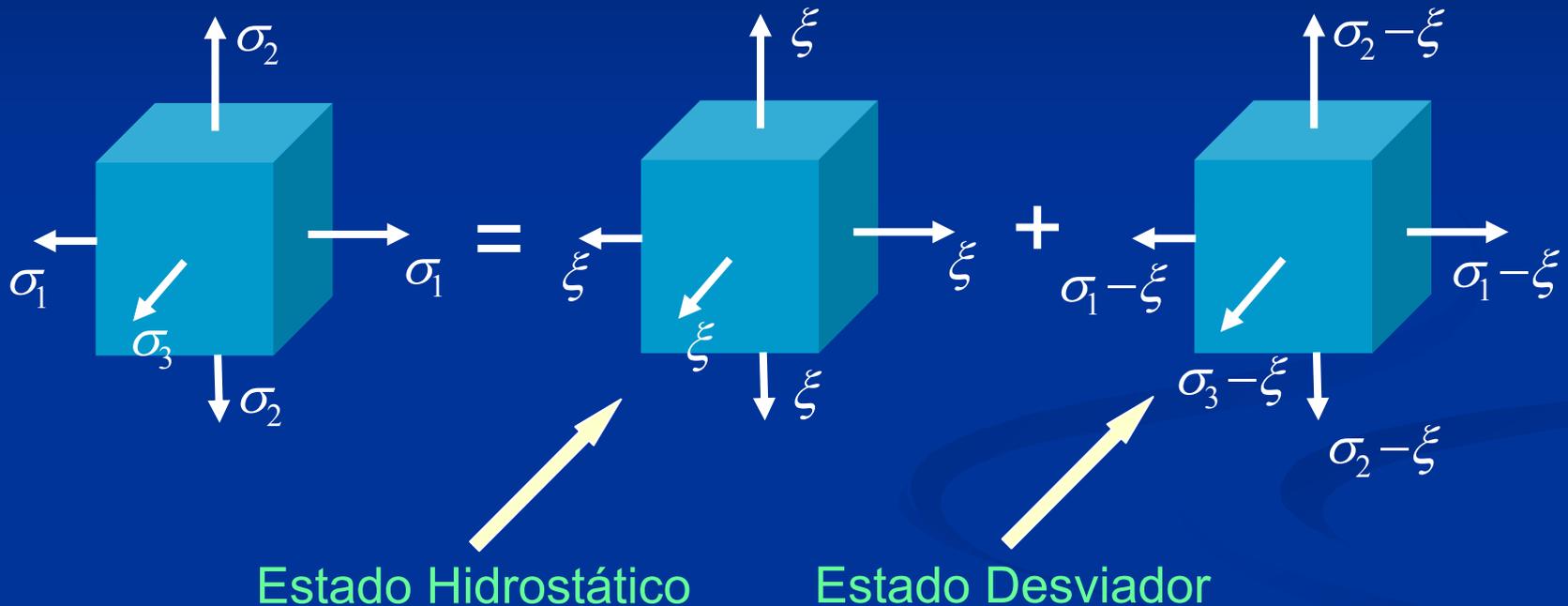
Bidimensional



$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|}{2} = \frac{Y}{2}$$

CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

Critério da Máxima Energia de Distorção
(Materiais Dúcteis)



Deformação
Volumétrica

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Estado Hidrostático de Tensão

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\xi(1-2\nu)}{E} = \frac{(1-2\nu)}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

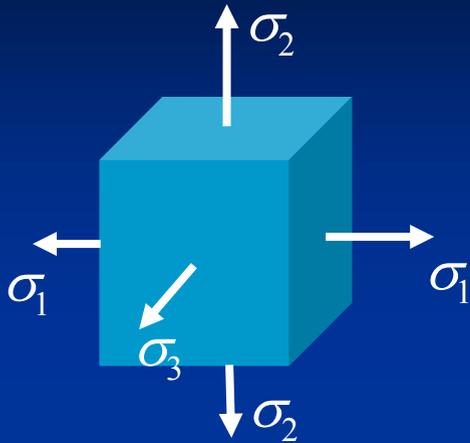
Não gera distorção $\Rightarrow \tau = 0; \gamma = 0$ em qualquer plano

Estado Desviador de Tensão

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\xi) = 0$$

Não gera variação de volume $\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 0$

Energia de Deformação Elástica Específica



Estado qualquer de tensão



$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

Estado Hidrostático de tensão $\Rightarrow \varepsilon_1^h = \varepsilon_2^h = \varepsilon_3^h = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \zeta$

Estado desviador de tensão $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1^s = \varepsilon_1 - \zeta \\ \varepsilon_2^s = \varepsilon_2 - \zeta \\ \varepsilon_3^s = \varepsilon_3 - \zeta \end{cases}$

$$u = \frac{1}{2} [\sigma_1(\zeta + \varepsilon_1^s) + \sigma_2(\zeta + \varepsilon_2^s) + \sigma_3(\zeta + \varepsilon_3^s)]$$

$$u = \frac{1}{2} \zeta (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2} [\sigma_1 \varepsilon_1^s + \sigma_2 \varepsilon_2^s + \sigma_3 \varepsilon_3^s]$$

energia associada
à variação de volume

(u_V)

energia associada
à mudança de forma



ENERGIA DE DISTORÇÃO

(u_D)

Energia Total



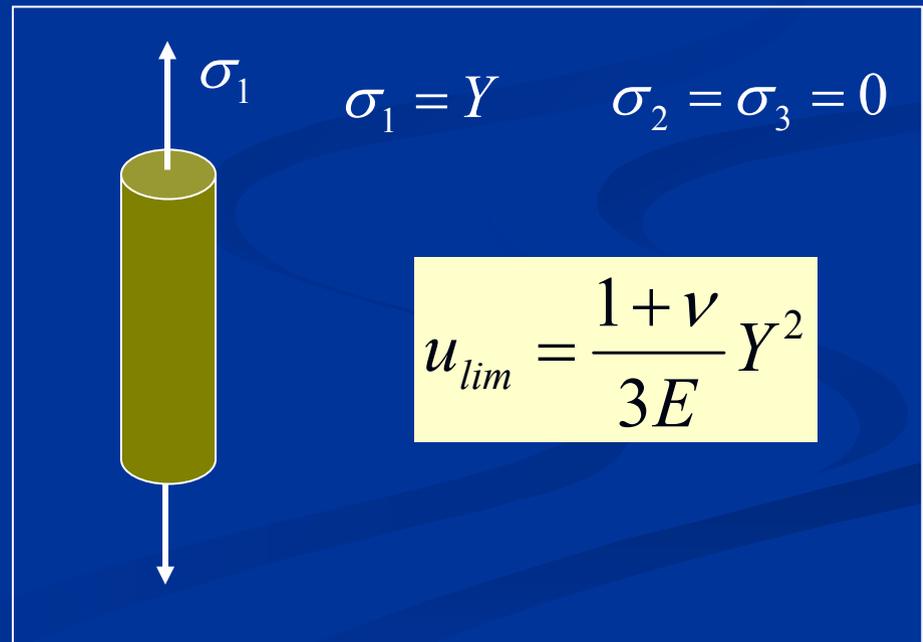
$$u = u_V + u_D$$

Cr terio de escoamento da M xima Energia de Distor o (Cr terio de von MISES)

$$u_D = u_{lim}$$

$$\frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = u_{lim}$$

Obten o experimental de u_{lim}

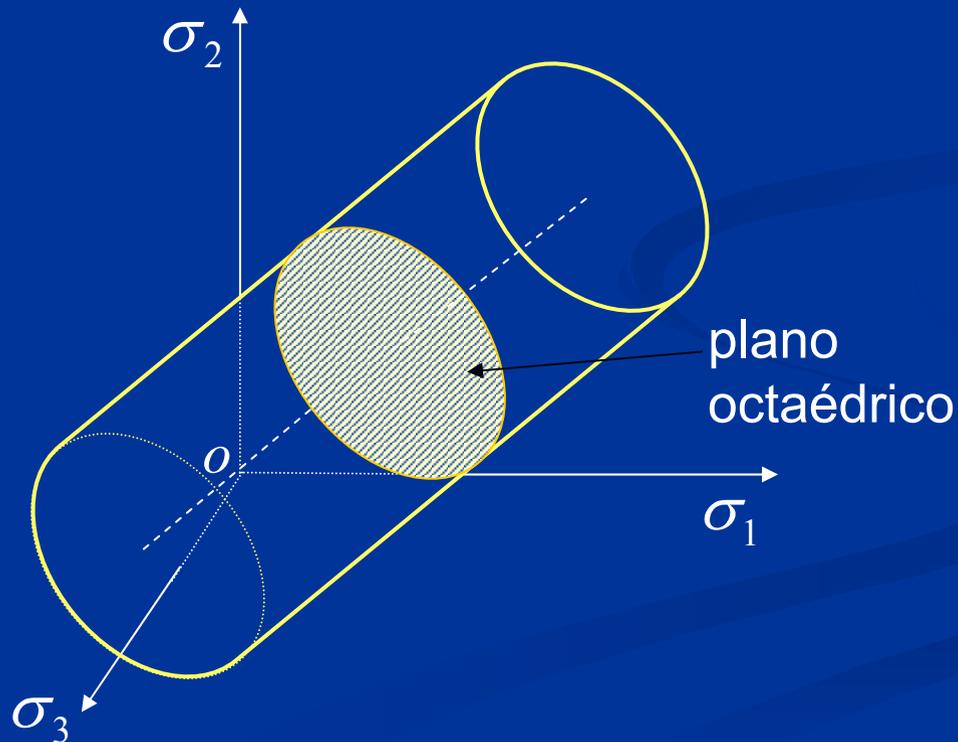


Expressão do Critério de von Mises

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2$$

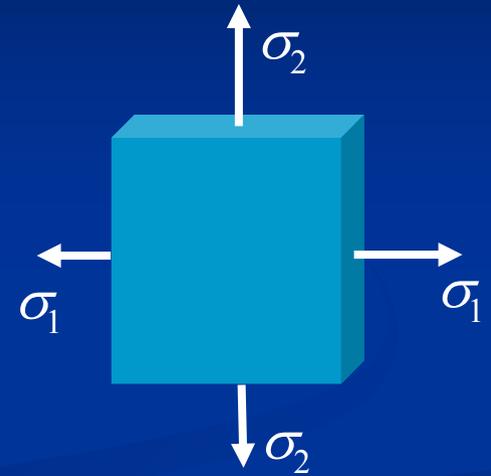
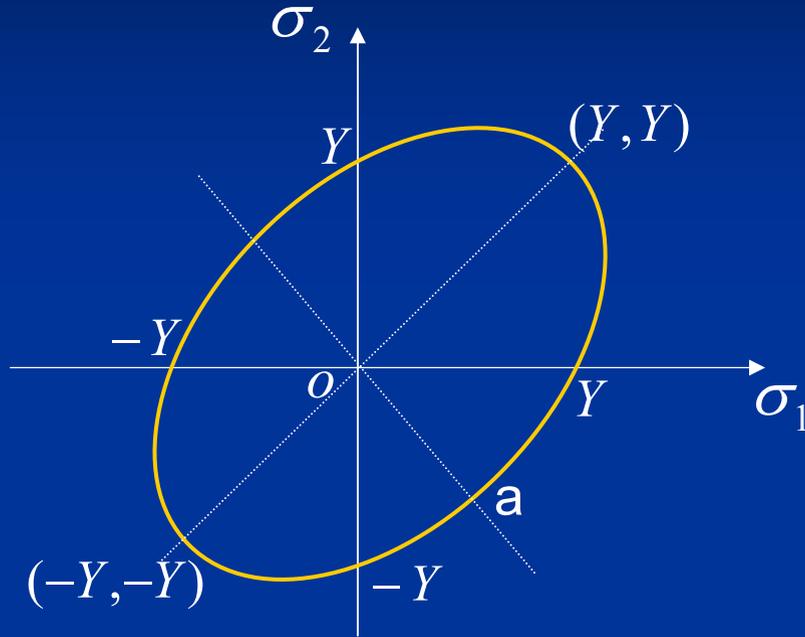
Representação Geométrica do Critério de von Mises

Tridimensional



Representação Geométrica do Critério de von Mises

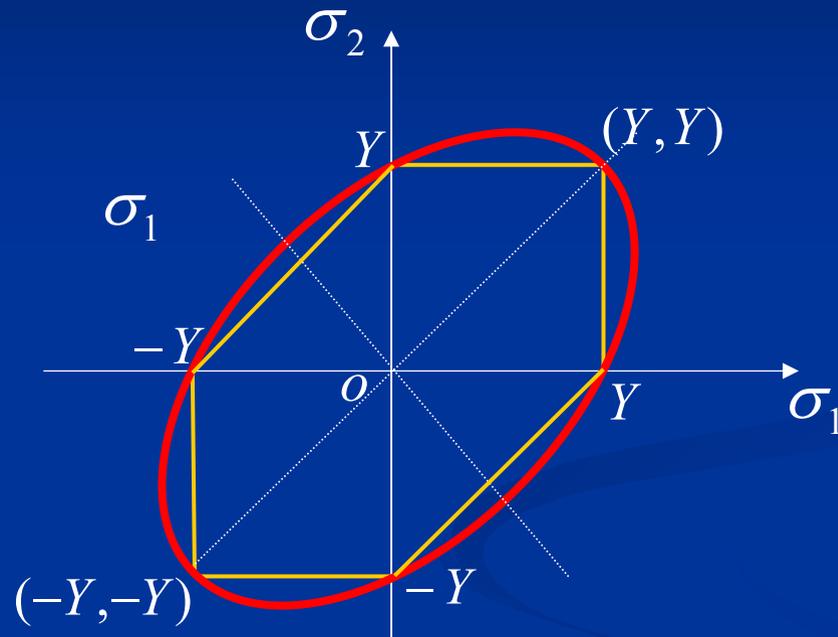
Bidimensional



$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = Y^2$$

Comparação entre os Critérios de Tresca e de von Mises

Caso Bidimensional



Condição de Continuidade do Fluxo Plástico

Seja um ponto submetido a um estado de tensão σ_{ij} sobre a superfície de escoamento, ou seja,

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

Suponha que seja aplicado um incremento $d\sigma_{ij}$ em σ_{ij} .

Condição para que o ponto continue em processo de escoamento

$$\Rightarrow f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = 0$$

$$df = f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - f(\sigma_{ij}) = 0$$

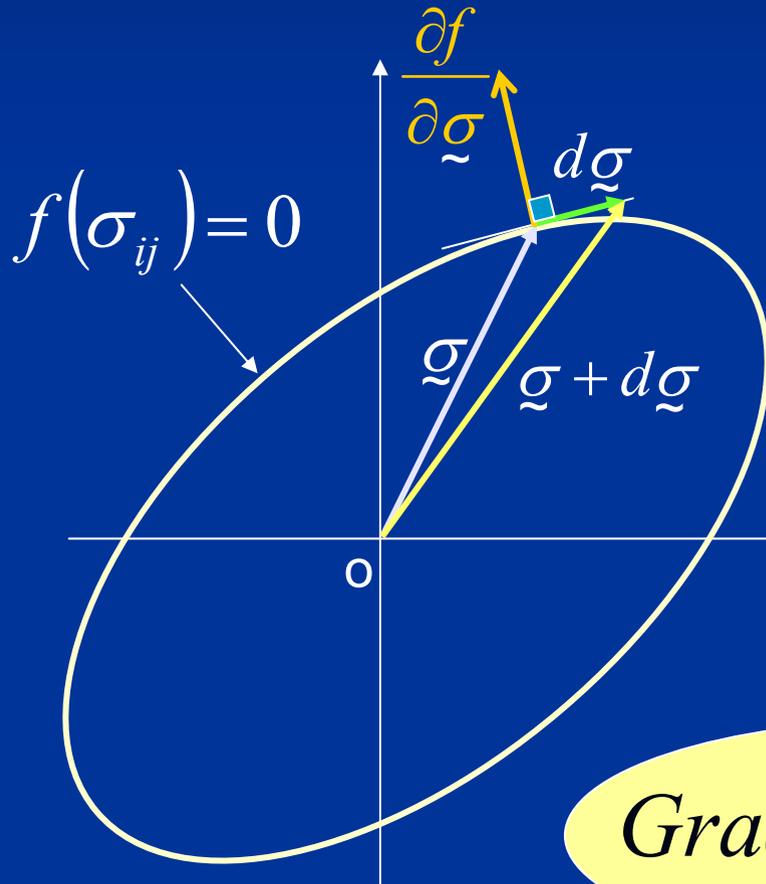
$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} d\sigma_{11} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} d\sigma_{22} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} d\sigma_{12} = 0$$

O gradiente de f é perpendicular ao vetor incremento de tensão

Condição de Continuidade do Fluxo Plástico

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$$

(Condição de Consistência)



Vetor Incremento de Tensão

$$d\underset{\sim}{\sigma}^T = \{d\sigma_{11} \ d\sigma_{22} \dots d\sigma_{12}\}$$

Vetor Gradiente da Função

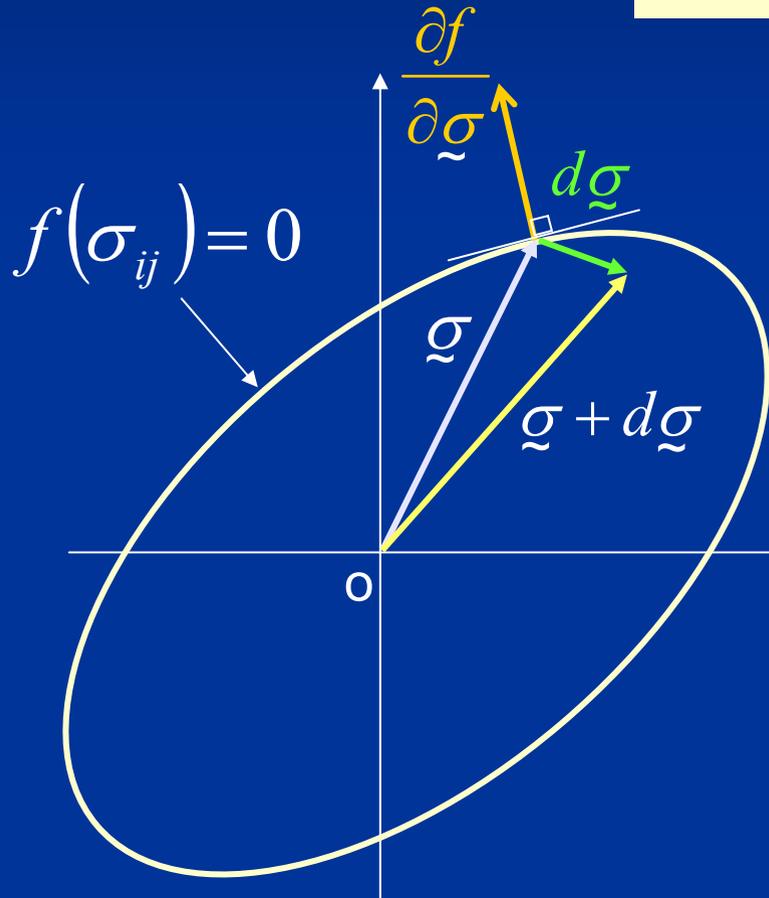
$$\text{Grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

$$\text{Grad}(f)^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} \right\}$$

$$\text{Grad}(f) \perp d\underset{\sim}{\sigma}$$

Condição de Retorno ao Regime Elástico

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$



O Gradiente de f forma um ângulo obtuso com o vetor incremento de tensão

Postulado de Drucker

Dado um corpo em equilíbrio sob um estado de tensão inicial definido pelo vetor tensão generalizado Q_i^0 e submetido a um agente externo que aplica lentamente um conjunto de forças auto-equilibradas que, em seguida, são removidas. **O trabalho realizado pelo agente externo durante o ciclo aplicação-remoção das forças não é negativo.**

$$W_{ext} = W_{tot} - W_0 \geq 0$$

W_{ext} = trabalho realizado pelo agente externo

W_{tot} = trabalho total realizado por todas as tensões

W_0 = trabalho feito pelas tensões iniciais constantes

Vetor tensão generalizada

Vetor taxa de deformação generalizada

$$\tilde{Q} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{W} = Q_i \dot{q}_i$$

Potência



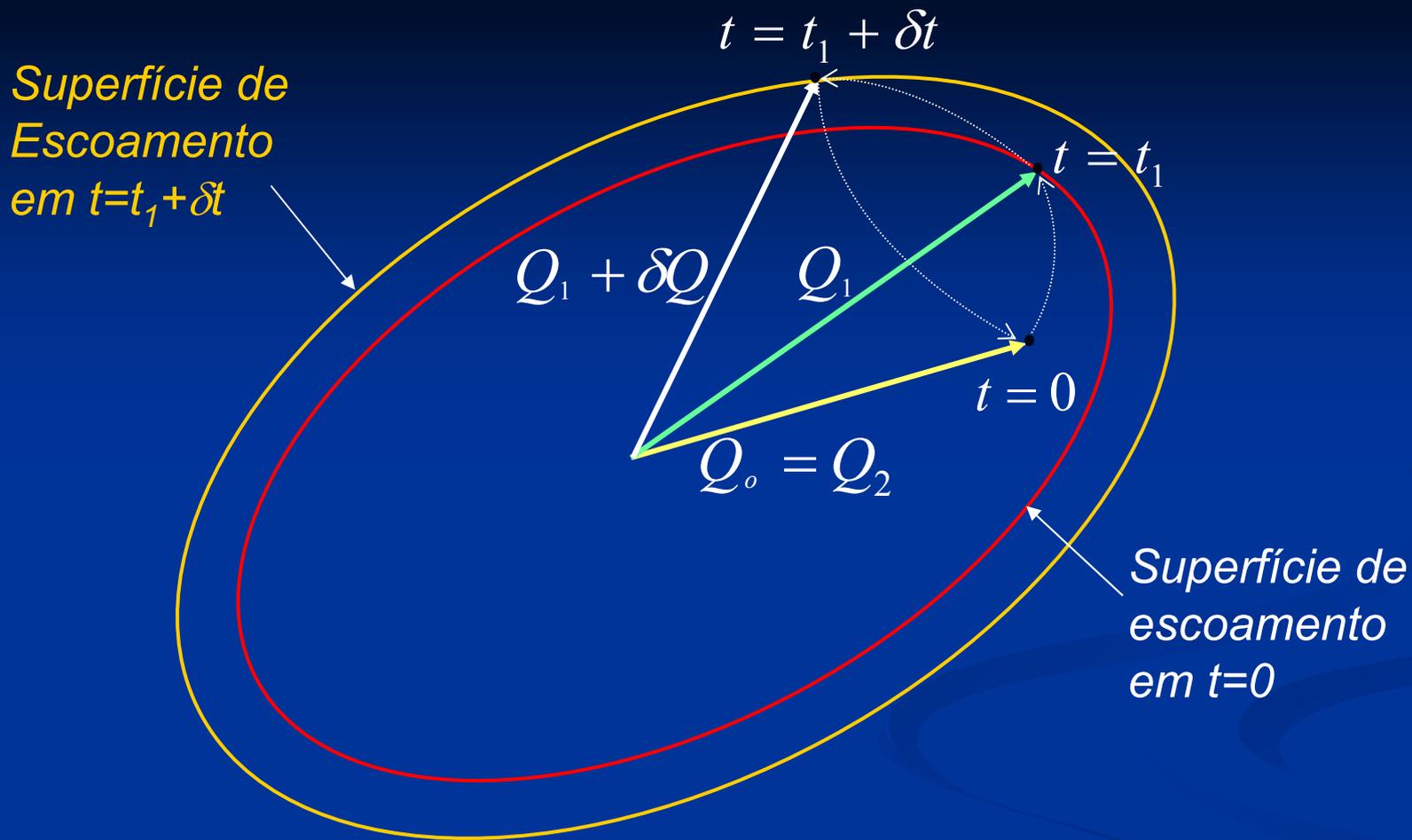
$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\tilde{\dot{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ 2\dot{\epsilon}_{23} \\ 2\dot{\epsilon}_{31} \\ 2\dot{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix}$$

componente elástica

componente plástica

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i^e + \dot{q}_i^p$$



Trabalho Total no Ciclo Aplicação-Remoção de Tensões

$$W_{tot} = \oint \dot{W} dt = \int_0^{t_1} Q_i \dot{q}_i^e dt + \int_{t_1}^{t_1+\delta t} Q_i (\dot{q}_i^e + \dot{q}_i^p) dt + \int_{t_1+\delta t}^{t_2} Q_i \dot{q}_i^e dt$$

Trabalho realizado no ciclo fechado envolvendo deformações elásticas é nulo

$$W_{tot} = \int_{t_1}^{t_1+\delta t} Q_i \dot{q}_i^p dt$$

δW^p
Incremento de trabalho plástico

Trabalho realizado pelas tensões generalizadas Q_i^0 durante o ciclo fechado

$$W_0 = \int_0^{t_1} Q_i^0 \dot{q}_i^e dt + \int_{t_1}^{t_1+\delta t} Q_i^0 (\dot{q}_i^e + \dot{q}_i^p) dt + \int_{t_1+\delta t}^{t_2} Q_i^0 \dot{q}_i^e dt$$

$$W_0 = \int_{t_1}^{t_1+\delta t} Q_i^0 \dot{q}_i^p dt$$

δW_0^p

$$W_{ext} = \delta W^p - \delta W_0^p$$

Pelo Postulado de Drucker:

$$W_{ext} = \delta W^p - \delta W_0^p = \int_{t_1}^{t_1 + \delta t} (Q_i - Q_i^0) \dot{q}_i^p dt \geq 0$$

δt arbitrariamente pequeno



**Desigualdade
de
Drucker**



$$(Q_i^p - Q_i^0) \dot{q}_i^p \geq 0$$

$$(\sigma_{ij}^p - \sigma_{ij}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0$$

OBS.: Foi usado o índice p em Q_i e σ_{ij} para indicar que tais tensões correspondem a um ponto sobre a superfície de escoamento

$$\left(Q_i^p - Q_i^0\right) \dot{q}_i^p \geq 0$$

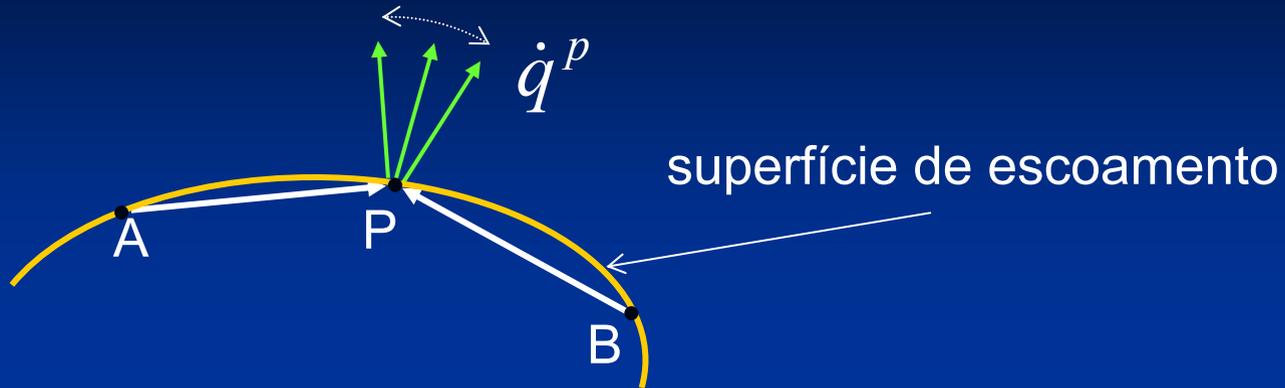


O vetor taxa de deformação plástica generalizada forma um ângulo não maior que 90° com o vetor de incrementos de tensões generalizadas

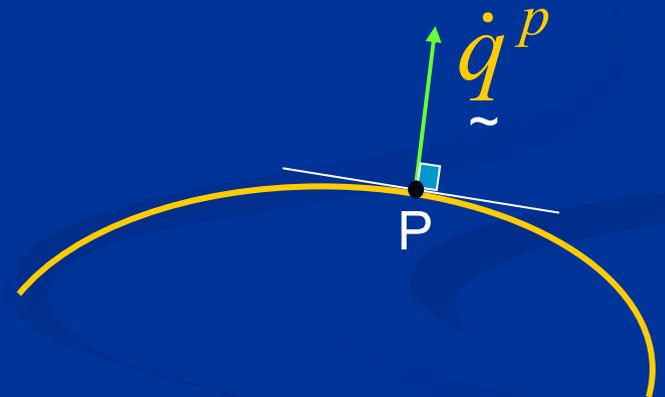
Em forma incremental, a desigualdade acima pode ser escrita na forma

$$\left(Q_i^p - Q_i^0\right) dq_i^p \geq 0$$

A, B  Pontos sobre a superfície de escoamento



Se $A \rightarrow P$ e $B \rightarrow P$



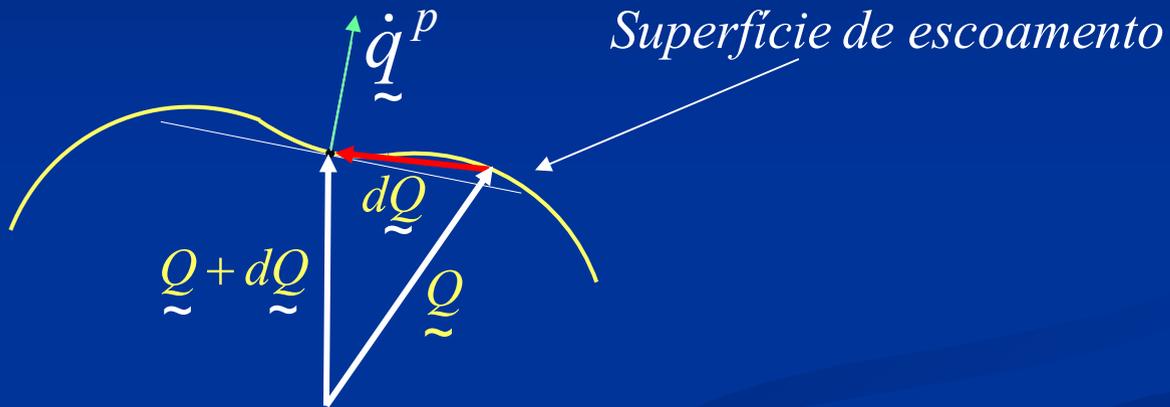
Lei ou Princípio da Normalidade

O vetor \dot{q}^P é normal à superfície de escoamento e aponta para fora

Superfície de escoamento côncava viola o postulado de Drucker



O ângulo entre \dot{q}^p e dQ pode resultar $> 90^\circ$



Lei da Convexidade

A superfície de escoamento é convexa

Um material que satisfaz o Postulado de Drucker é dito **ESTÁVEL** ou “**work-wardening material**”

Função Potencial Plástico e Regra de Fluxo

Regra de Fluxo



Hipótese cinemática postulada para a deformação plástica ou fluxo plástico

Função Potencial Plástico



Função escalar das tensões


$$g(\sigma_{ij})$$

Regra de Fluxo Plástico

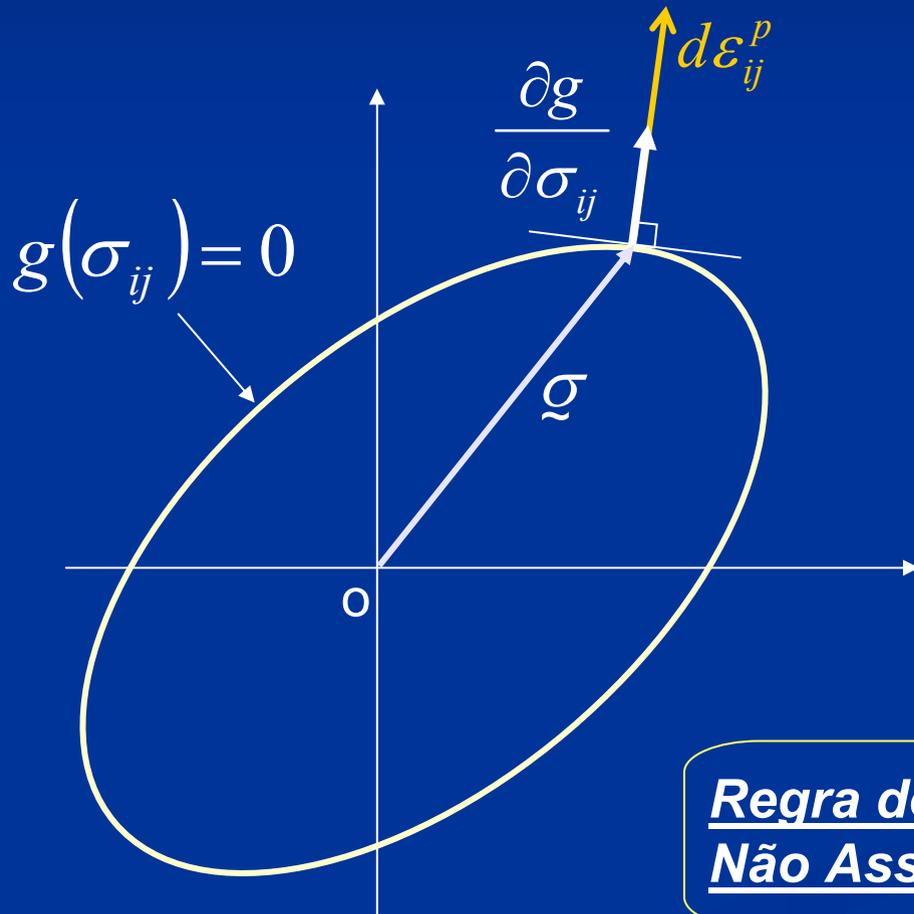
$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

$d\lambda$ = fator de proporcionalidade escalar não negativo

$d\varepsilon_{ij}^p$ = incremento de deformação plástica

Regra de Fluxo Plástico – Representação Geométrica

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$



Regra de Fluxo Associada

$$g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij})$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

Regra de Fluxo
Não Associada

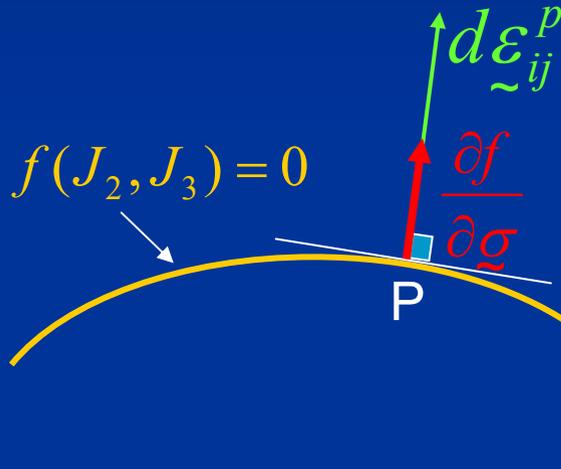
$$g(\sigma_{ij}) \neq f(\sigma_{ij})$$

Regra de Fluxo Geral Associada

$$f(J_2, J_3) = 0$$

Lei da Normalidade:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \right)$$



$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_3} r_{ij} \right)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ip} s_{pj} - \frac{1}{3} s_{qp} s_{pq} \delta_{ij} = r_{ij}$$

Regra de Fluxo Associada de von Mises

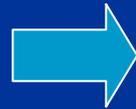
A função de escoamento de von Mises pode ser escrita como:

$$f(J_2) = J_2 - \frac{Y^2}{3} = 0$$

Regra de Fluxo Associada $\Rightarrow d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}}$

Como

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$$



$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}$$



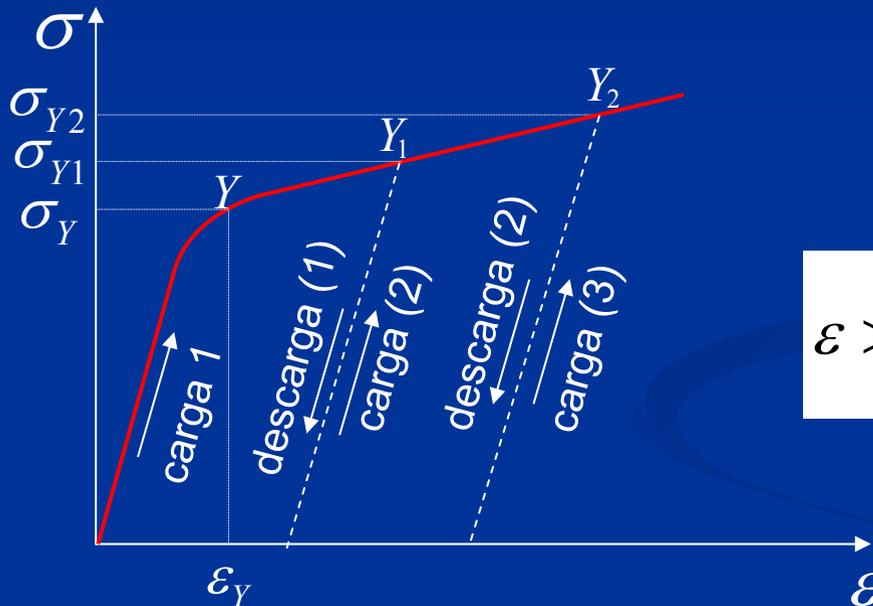
$$\frac{d\varepsilon_{11}^p}{s_{11}} = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{s_{22}} = \frac{d\varepsilon_{33}^p}{s_{33}} = \frac{d\varepsilon_{12}^p}{s_{12}} = \frac{d\varepsilon_{23}^p}{s_{23}} = \frac{d\varepsilon_{13}^p}{s_{13}} = d\lambda$$

Equações de Prandtl-Reuss

Materiais Elastoplásticos com Endurecimento

Caso Uniaxial

Endurecimento (*strain hardening*) → propriedade definida pelo aumento contínuo da tensão axial com a evolução da deformação axial após o ponto de escoamento.



$$\varepsilon > \varepsilon_Y \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0$$

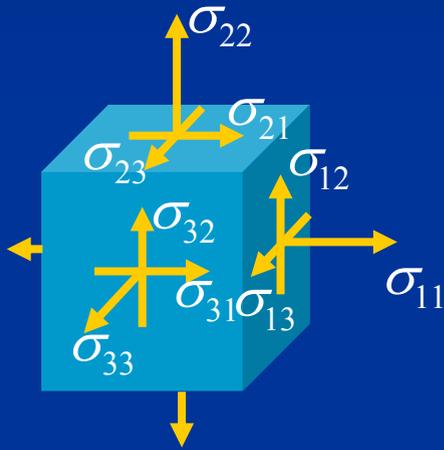
Trajetórias carga-descarga praticamente retas e coincidentes, paralelas ao ramo elástico linear inicial

Após descarga e carga consecutivas, ocorre um aumento da tensão de escoamento

Materiais Elastoplásticos com Endurecimento

Caso Tridimensional

Endurecimento (strain hardening) \Rightarrow a superfície de escoamento muda com a ocorrência de deformações plásticas adicionais



$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0$$

k = parâmetro de endurecimento

ε_{ij}^p = componentes de deformação plástica

Regra de endurecimento

(?)

Define a evolução da superfície de escoamento com o fluxo plástico

Critério de Continuidade de Fluxo Plástico

Material com Endurecimento

$$f = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} > 0$$

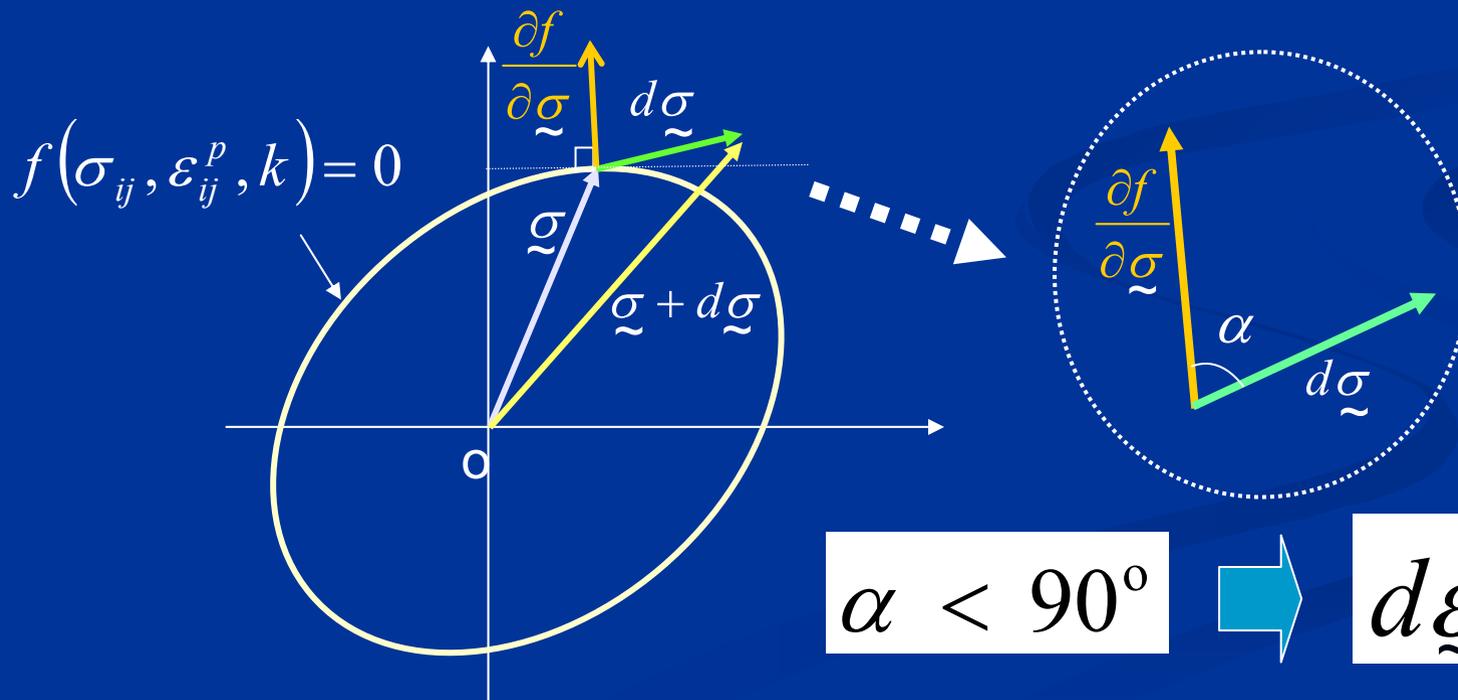


$$d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$$

$$f = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} \leq 0$$



$$d\varepsilon_{ij}^p = 0$$



Regra de Endurecimento para Materiais Elastoplásticos

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) - k^2(\varepsilon_p) = 0$$

forma da superfície

tamanho da superfície

Definições

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

Tensão Efetiva

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$$

Deformação Plástica Efetiva

Tensão e Deformação plásticas efetivas - Caso de Tensão Uniaxial



$$\sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2]}$$

$$\sigma_e = \sigma_1$$

Tensão efetiva = Tensão uniaxial

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3} [(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2]}$$

Material Plástico Incompressível



$$\varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = -\frac{1}{2} \varepsilon_1^p$$

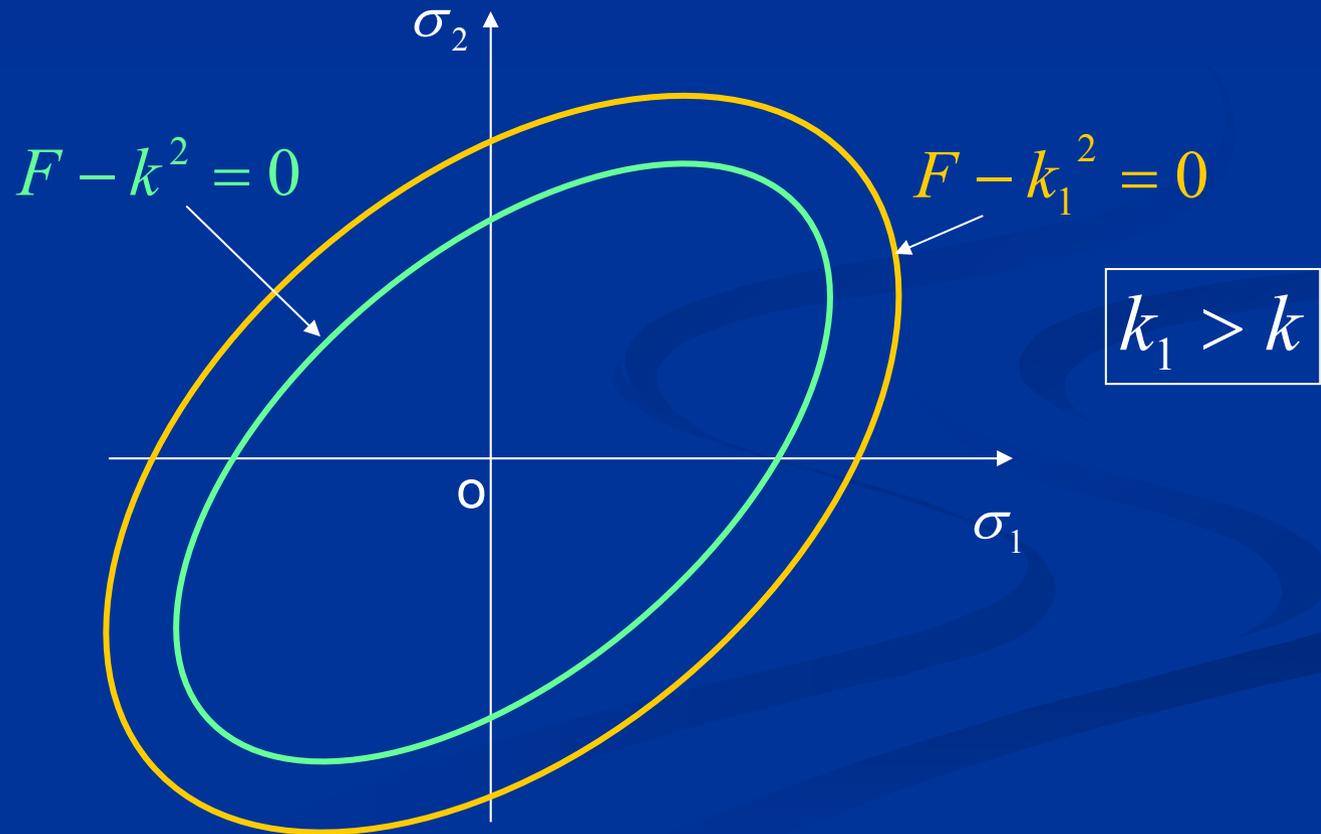
$$\varepsilon_p = \varepsilon_1^p$$

Deformação plástica efetiva = Deformação plástica uniaxial

Modelo de Endurecimento Isótropo

A superfície inicial se expande uniformemente sem distorção e sem translação quando ocorre o fluxo plástico

$$F(\sigma_{ij}) = k^2 (\varepsilon_p)$$



Modelo de Endurecimento Isotrópo – Função de von Mises

$$f(\sigma_{ij}, k) = J_2 - k^2(\varepsilon_p) = 0$$

Parâmetro $k(\varepsilon_p)$

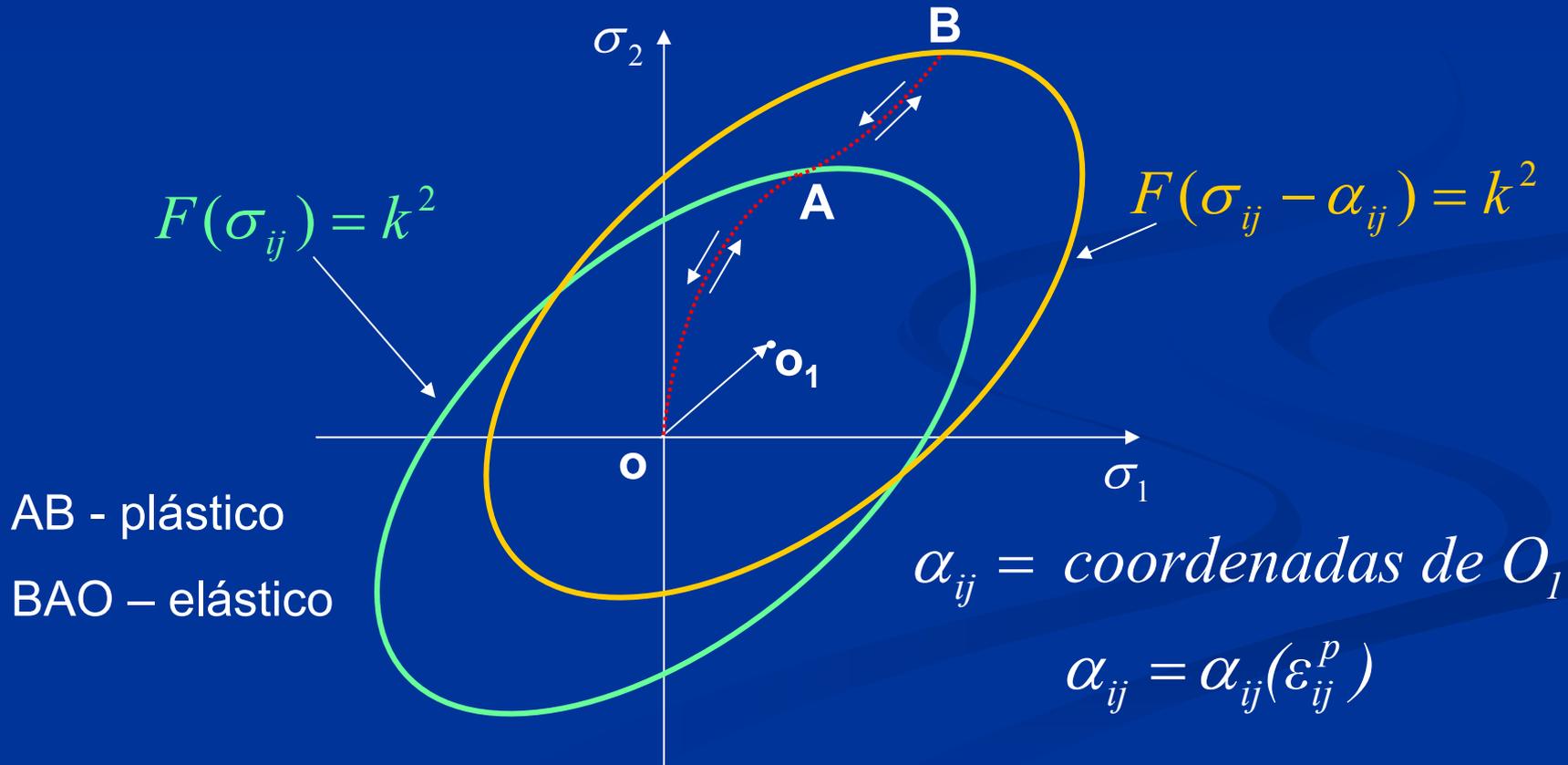

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2] = \frac{1}{3} \sigma_1^2$$
$$\frac{1}{3} \sigma_1^2 - k^2(\varepsilon_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_e^2 = 3k^2(\varepsilon_p)$$
$$k(\varepsilon_p) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_e$$

$$J_2 - \frac{1}{3} \sigma_e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3J_2 - \sigma_e^2 = 0$$

Modelo de Endurecimento Cinemático

Durante o fluxo plástico, a superfície de escoamento se desloca como um corpo rígido no espaço das tensões, mantendo a forma, o tamanho e a orientação da superfície inicial.

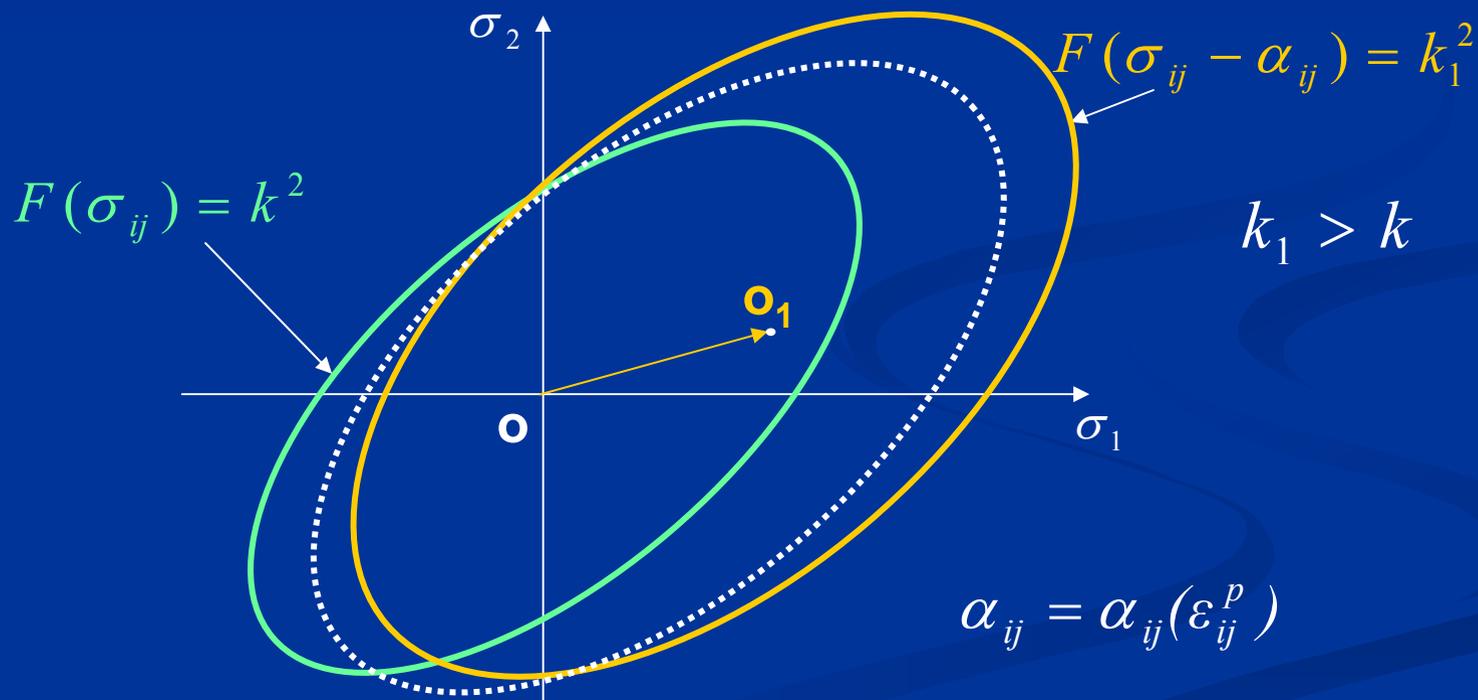
$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0$$



Modelo de Endurecimento Misto

Durante o fluxo plástico, a superfície de escoamento sofre uma translação definida por α_{ij} e uma expansão uniforme medida por k^2 , mantendo a sua forma original.

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2(\varepsilon_p) = 0$$



Relação Constitutiva Incremental

(Material Elastoplástico Perfeito)



Vetor de Incremento de Deformação

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\}$$

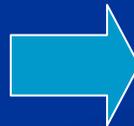
Vetor de Incremento de Tensão

$$\{d\sigma\} = [C]\{d\varepsilon^e\} = [C](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\})$$



$[C]$ = matriz de rigidez elástica do material

Lei da Normalidade



$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$$

Aplicando a lei da normalidade



$$\{d\sigma\} = [C] \left(\{d\varepsilon\} - d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right)$$

Condição de Consistência

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left([C] \{d\varepsilon\} - d\lambda [C] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right) = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [C] d\varepsilon - d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = 0$$

Fator de proporcionalidade

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \{d\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}$$

Relação Constitutiva Elastoplástica do Material

$$d\sigma = [C] \left(\{d\varepsilon\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \{d\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \right)$$

$$d\sigma = [C] \left([I] - \frac{\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}^T [C]}{\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}^T [C] \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}} \right) \{d\varepsilon\}$$

Matriz de Rigidez Elastoplástica do Material

$$[C^{ep}] = [C] \left([I] - \frac{\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}^T [C]}{\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}^T [C] \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{Bmatrix}} \right)$$

APLICAÇÃO: Matriz de Rigidez de uma Barra

Condição de plastificação de uma seção transversal

$$\psi(N_x, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z) = 0$$

Material estável de Drucker:

$$\{\dot{U}^p\} = \dot{\Lambda}\{G\}$$

Lei da normalidade

$\{\dot{U}^p\}$ = vetor taxa de deslocamentos plásticos

$\{G\}$ = vetor gradiente da função ψ

$\dot{\Lambda}$ = fator de proporcionalidade

A superfície $\psi = 0$ é convexa

$$\{G\}^T = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial N_x} \quad \frac{\partial \psi}{\partial V_y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial V_z} \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_x} \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_z} \right\}$$

Condição de Consistência $\Rightarrow \{G\}^T \{\dot{F}\} = 0$

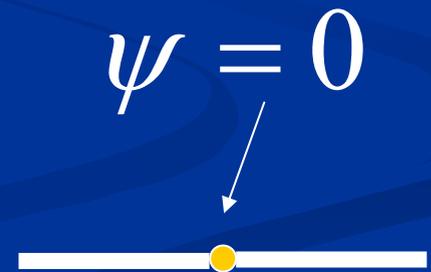
$\{\dot{F}\} =$ *vetor taxa de deslocamentos forças*

$$\{F\}^T = \{N_x, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z\}$$

Seção Plastificada



Rotula Plástica



Elemento de Barra



Elemento com uma rótula plástica no extremo 1



Vetor taxa de deslocamentos nodais



$$\{\dot{U}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1\} \\ \{\dot{U}_2\} \end{Bmatrix}$$

Vetor taxa de forças nodais



$$\{\dot{F}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{F}_1\} \\ \{\dot{F}_2\} \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{F}\} = [K^e] \{\dot{U}^e\}$$

$[K^e]$ = matriz de rigidez incremental elástica da barra

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{F}_1\} \\ \{\dot{F}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^e] & [K_{12}^e] \\ [K_{21}^e] & [K_{22}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1^e\} \\ \{\dot{U}_2^e\} \end{Bmatrix}$$

Vetor de taxa de deslocamentos elásticos no extremo 1

$$\{\dot{U}_1^e\} = \{\dot{U}_1\} - \{\dot{U}_1^p\}$$

Seção do Extremo 1

Lei da normalidade

$$\{\dot{U}_1^p\} = \dot{\Lambda}_1 \{G_1\}$$

Condição de Consistência

$$\{G_1\}^T \{\dot{F}_1\} = 0$$

$$\{G_1\}^T [K_{11}^e] \{\dot{U}_1\} + \{G_1\}^T [K_{12}^e] \{\dot{U}_2\} - \{G_1\}^T [K_{11}^e] \dot{\Lambda}_1 \{G_1\} = 0$$

$$\dot{\Lambda}_1 = \frac{1}{\{G_1\}^T [K_{11}^e] \{G_1\}} \begin{bmatrix} \{G_1\}^T [K_{11}^e] & \{G_1\}^T [K_{12}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1\} \\ \{\dot{U}_2\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{F}_1\} \\ \{\dot{F}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^e] & [K_{12}^e] \\ [K_{21}^e] & [K_{22}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1\} \\ \{\dot{U}_2\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [K_{11}^e] & [K_{12}^e] \\ [K_{21}^e] & [K_{22}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Lambda}_1 \{G_1\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{F}_1\} \\ \{\dot{F}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^e] & [K_{12}^e] \\ [K_{21}^e] & [K_{22}^e] \end{bmatrix} \left[[I] - \frac{1}{c} \begin{Bmatrix} \{G_1\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \{G_1\} & \{0\} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} [K_{11}^e] & [K_{12}^e] \\ [K_{21}^e] & [K_{22}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1\} \\ \{\dot{U}_2\} \end{Bmatrix}$$

$$c = \{B_1\}^T [K_{11}^e] \{B_1\}$$

Matriz de Rigidez Elastoplástica do Elemento

$$\{K_{EP}^1\} = [K^e] \left([I] - \frac{1}{c} \{G\} \{G\}^T [K^e] \right)$$

$$\{G\}^T = \left[\{G_1^T\} \quad \{0\} \right]$$