Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Universidade Federal de Alagoas

MODELOS CONSTITUTIVOS

Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques

MATERIAL ELÁSTICO LINEAR

COMPORTAMENTO ELÁSTICO

MATERIAL HOMOGÊNEO → Apresenta as mesmas propriedades mecânicas em todos os seus pontos

MATERIAL ISÓTROPO → Em cada ponto, as propriedades mecânicas não mudam com a direção

→ ISOTROPIA ≠ ANISOTROPIA

Os conceitos de isotropia e homogeneidade são relativos ao nível ou escala da análise mecânica: nanomecânica, micromecânica ou macromecânica.

MATERIAL ELÁSTICO → Assume sua forma original quando as tensões atuantes são removidas

MATERIAL ELÁSTICO DE CAUCHY

⇩

O estado de tensão em um dado instante t depende somente do estado de deformação existente em t, não tendo nenhuma dependência da história da deformação.

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl})$$

Para cada estado de deformação ε existe um, e um só, estado de tensão σ

$$\varepsilon \overset{F}{\longleftrightarrow} \sigma$$

$$\varepsilon = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sigma = 0$$

O material elástico de Cauchy pode violar a 1ª lei da termodinâmica!

Sejam

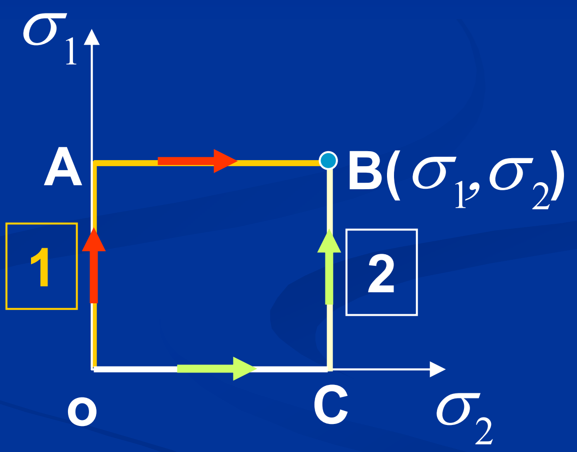
$\varepsilon_1 = a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2$ $\varepsilon_2 = a_{21}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2$ **com** $a_{12} \neq a_{21}$

Energia de deformação complementar: Ω

Trajetória 1: OAB

$$\Omega_{1c} = \int_O^A (\varepsilon_1 d\sigma_1 + \varepsilon_2 d\sigma_2) + \int_A^B (\varepsilon_1 d\sigma_1 + \varepsilon_2 d\sigma_2)$$

$$\boxed{\Omega_{1c} = \frac{1}{2} a_{11}\sigma_1^2 + a_{21}\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2} a_{22}\sigma_2^2}$$



Trajetória 2: OCB

$$\Omega_{2c} = \int_O^C (\varepsilon_1 d\sigma_1 + \varepsilon_2 d\sigma_2) + \int_C^B (\varepsilon_1 d\sigma_1 + \varepsilon_2 d\sigma_2)$$

$$\boxed{\Omega_{2c} = \frac{1}{2} a_{11}\sigma_1^2 + a_{12}\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2} a_{22}\sigma_2^2}$$

Se

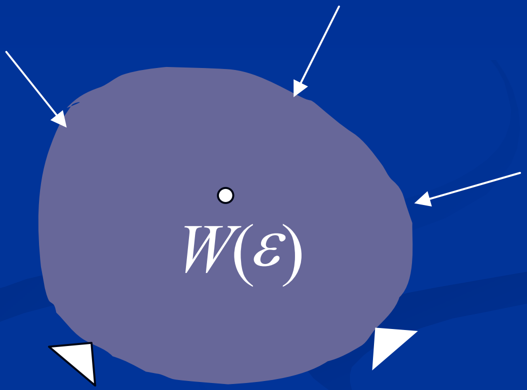
$a_{12} \neq a_{21} \Rightarrow \Omega_{1c} \neq \Omega_{2c}$

(?)

MATERIAL ELÁSTICO DE GREEN OU HIPERELÁSTICO

Existe uma função ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA W, tal que

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$



onde

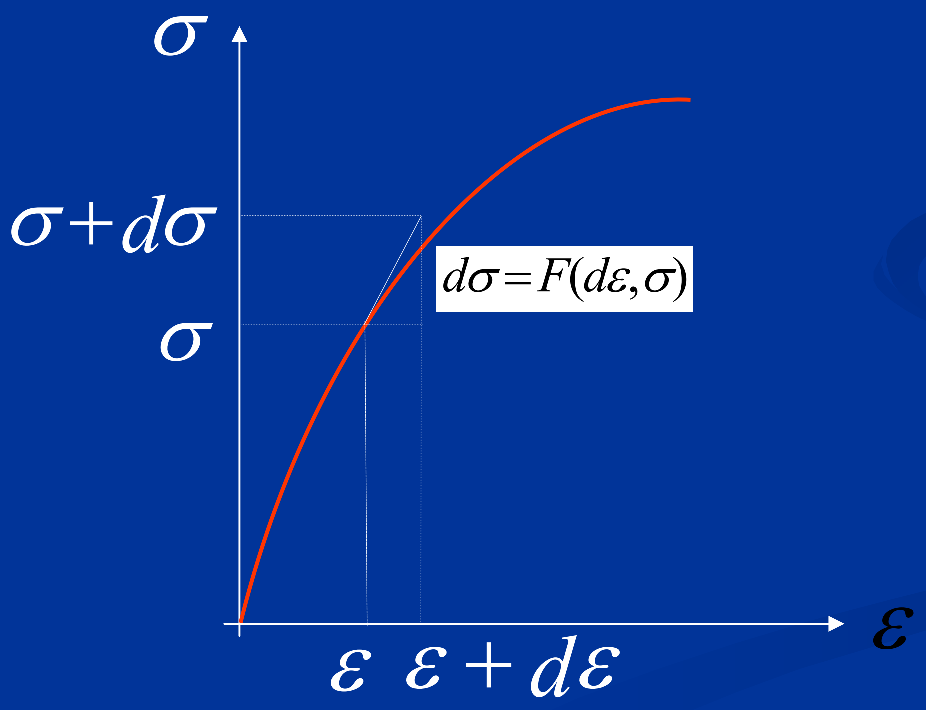
$$W = W(\varepsilon_{kl})$$

MATERIAL HIPOELÁSTICO

⇩

Relações constitutivas elásticas incrementais

O estado de tensão é uma função do estado de deformação e da trajetória das tensões.

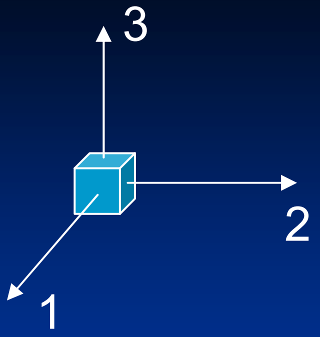


Em geral, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\dot{\varepsilon}_{kl}, \sigma_{mn})$$

MATERIAL ELÁSTICO LINEAR

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$



C_{ijkl} ⇒ **Tensor das constantes elásticas do material**

(81 componentes)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ji} = C_{jikl}\varepsilon_{kl}$$

$$\Rightarrow 0 = (C_{ijkl} - C_{jikl})\varepsilon_{kl} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijlk}\varepsilon_{lk}$$

$$\Rightarrow 0 = (C_{ijkl} - C_{ijlk})\varepsilon_{kl} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

36 componentes independentes

Em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\sigma\} = [C_{KM}]\{\varepsilon\}}$$

Vetor tensão
(6 x 1)

Vetor deformação
(6 x 1)

Matriz constitutiva do material
(6 x 6)

MATERIAL HIPERELÁSTICO

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}$$

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

⇓

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{klij}}$$

→

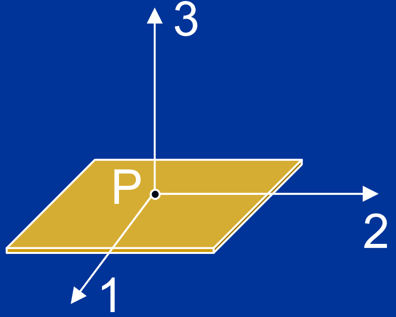
(36-6)/2+6= 21 componentes independentes

SIMETRIA MATERIAL

Quando um material apresenta o mesmo comportamento mecânico em certas direções, diz-se que existe simetria material nas mesmas

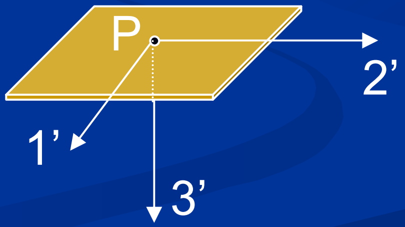
Um material sem simetria material é chamado de anisótropo

Diz-se que um material apresenta um plano de simetria em um ponto P quando suas constantes não se alteram com a inversão do eixo perperpendicular ao plano

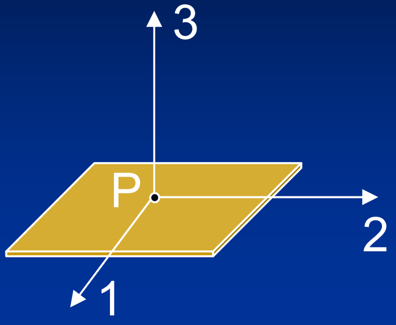


Plano de simetria (1-2)

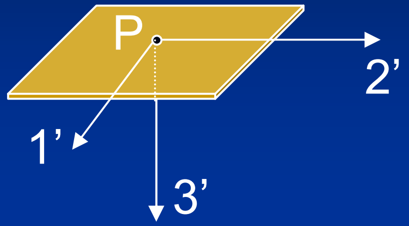
$$\boxed{C_{ijkl} = C_{i'j'k'l'}}$$



UM PLANO DE SIMETRIA – MATERIAL MONOCLÍNICO



$$[\sigma'] = [a][\sigma][a]^t$$



Matriz de rotação ⇒

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1'1'} & \sigma_{1'2'} & \sigma_{1'3'} \\ \sigma_{1'2'} & \sigma_{2'2'} & \sigma_{2'3'} \\ \sigma_{1'3'} & \sigma_{2'3'} & \sigma_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Analogamente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1'1'} & \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_{1'3'} \\ \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_{2'2'} & \varepsilon_{2'3'} \\ \varepsilon_{1'3'} & \varepsilon_{2'3'} & \varepsilon_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

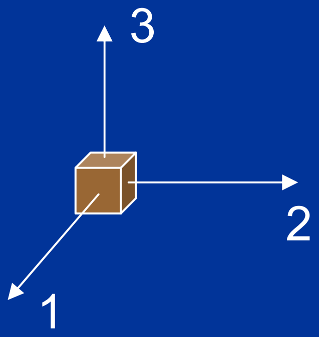
PLANO DE SIMETRIA MATERIAL (plano 1-2)

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{14}\varepsilon_{23} + C_{15}\varepsilon_{13} + C_{16}\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{11} = C_{1'1'}\varepsilon_{11} + C_{1'2'}\varepsilon_{22} + C_{1'3'}\varepsilon_{33} + C_{1'4'}(-\varepsilon_{23}) + C_{1'5'}(-\varepsilon_{13}) + C_{1'6'}\varepsilon_{12}$$

Como $C_{ij} = C_{i'j'}$ $\Rightarrow$ $C_{14} = C_{15} = 0$

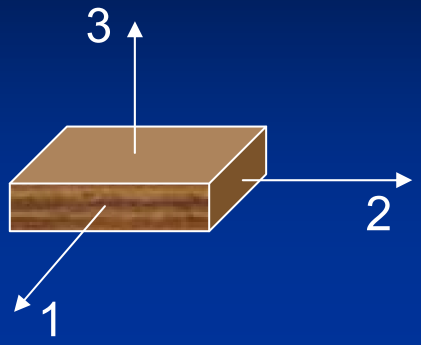
Em geral, resulta:



$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

13 componentes independentes

MATERIAL ORTÓTROPO



Três planos de simetria material mutuamente perpendiculares entre si

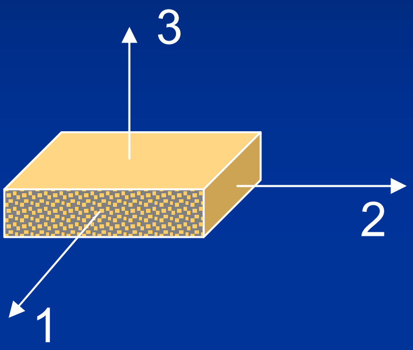
Planos de simetria ⇨ **1 - 2; 2 - 3 e 1 - 3**

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

9 componentes independentes

MATERIAL TRASVERSALMENTE ISÓTROPO

Simetria rotacional em relação a um dos eixos coordenados



Exemplo: No plano 2-3, ou em torno do eixo 1, as propriedades são as mesmas em todas as direções

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}$$

com

$$C_{44} = C_{22} - C_{23}$$

5 componentes independentes

MATERIAL ISÓTROPO

As constantes elásticas do material independem da direção

⇓

Tensor Constitutivo de Quarta Ordem Isotrópo

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \alpha(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

λ, μ, α – **constantes**

$$C_{1212} = \lambda\delta_{12}\delta_{12} + \mu(\delta_{11}\delta_{22} + \delta_{12}\delta_{21}) + \alpha(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21})$$

$$C_{1221} = \lambda\delta_{12}\delta_{21} + \mu(\delta_{12}\delta_{21} + \delta_{11}\delta_{22}) + \alpha(\delta_{12}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{22})$$

$$C_{1212} = \mu + \alpha \qquad C_{1221} = \mu - \alpha$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}}$$

Sendo

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl}$$

Sendo

$$\delta_{kl}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kk} \qquad \delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ij} \qquad \delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}}$$

MATERIAL ISÓTROPO

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

2 constantes independentes

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

λ, μ

Constantes de Lamé

Forma alternativa:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right)$$

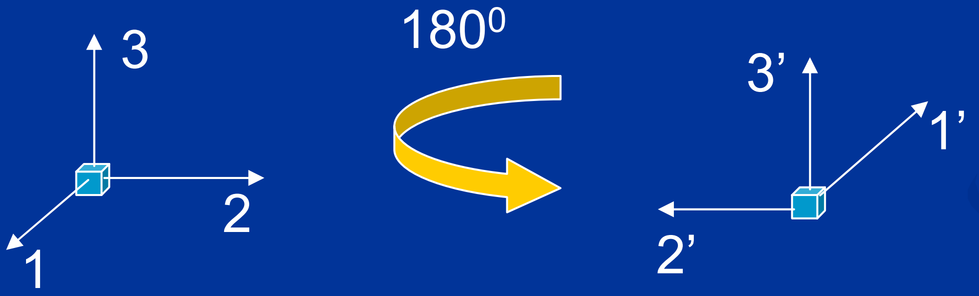
E = Módulo de Young ou de Elasticidade

ν = Coeficiente de Poisson

TEOREMA: Em um material isótropo os eixos principais de deformações coincidem com os eixos principais de tensões

Prova: Sejam 1, 2 e 3 os eixos principais de deformações

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij22}\varepsilon_{22} + C_{ij33}\varepsilon_{33}$$



$$a_{p'i} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1'1'} & \sigma_{1'2'} & \sigma_{1'3'} \\ \sigma_{1'2'} & \sigma_{2'2'} & \sigma_{2'3'} \\ \sigma_{1'3'} & \sigma_{2'3'} & \sigma_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1'1'} & \sigma_{1'2'} & \sigma_{1'3'} \\ \sigma_{1'2'} & \sigma_{2'2'} & \sigma_{2'3'} \\ \sigma_{1'3'} & \sigma_{2'3'} & \sigma_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Analogamente, para as deformações:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1'1'} & \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_{1'3'} \\ \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_{2'2'} & \varepsilon_{2'3'} \\ \varepsilon_{1'3'} & \varepsilon_{2'3'} & \varepsilon_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1'1'} & \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_{1'3'} \\ \varepsilon_{1'2'} & \varepsilon_{2'2'} & \varepsilon_{2'3'} \\ \varepsilon_{1'3'} & \varepsilon_{2'3'} & \varepsilon_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{i'j'} = C_{i'j'1'1'}\varepsilon_{11} + C_{i'j'2'2'}\varepsilon_{22} + C_{i'j'3'3'}\varepsilon_{33}$$

Assim,

$$\sigma_{23} = C_{2311}\varepsilon_{11} + C_{2322}\varepsilon_{22} + C_{2333}\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{2'3'} = C_{2'3'1'1'}\varepsilon_{11} + C_{2'3'2'2'}\varepsilon_{22} + C_{2'3'3'3'}\varepsilon_{33} = -\sigma_{23}$$

$$\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{11} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33}$$

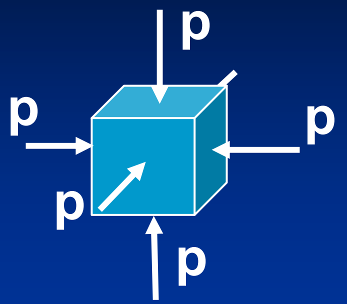
$$\sigma_{1'3'} = C_{1'3'1'1'}\varepsilon_{11} + C_{1'3'2'2'}\varepsilon_{22} + C_{1'3'3'3'}\varepsilon_{33} = -\sigma_{13}$$

$$C_{ijkl} = C_{i'j'k'l'} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_{23} = 0} \qquad \boxed{\sigma_{13} = 0}$$

Rotacionando o sistema de 180° em torno do eixo 2 ⇒ $\boxed{\sigma_{12} = 0}$

MATERIAL ISÓTROPO

Pressão Hidrostática

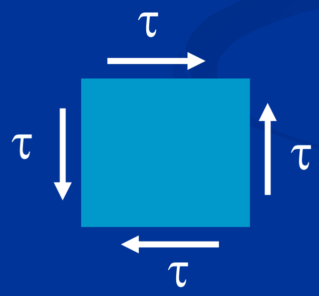


$$p = K\varepsilon_{kk}$$

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

K = módulo de elasticidade volumétrico (Bulk Modulus)

Cisalhamento Puro



$$\tau = G\gamma$$

$$\boxed{G = \mu}$$

G = módulo de elasticidade transversal

MATERIAL ANISÓTROPO

Constantes Técnicas de RABINOVICH

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{11} & -\nu_{31}/E_{11} & \eta_{23,1}/E_{11} & \eta_{31,1}/E_{11} & \eta_{12,1}/E_{11} \\ -\nu_{12}/E_{22} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{22} & \eta_{23,2}/E_{22} & \eta_{31,2}/E_{22} & \eta_{12,2}/E_{22} \\ -\nu_{13}/E_{33} & -\nu_{23}/E_{33} & 1/E_{33} & \eta_{23,3}/E_{33} & \eta_{31,3}/E_{33} & \eta_{12,3}/E_{33} \\ \eta_{1,23}/G_{23} & \eta_{2,23}/G_{23} & \eta_{3,23}/G_{23} & 1/G_{23} & \mu_{31,23}/G_{23} & \mu_{12,23}/G_{23} \\ \eta_{1,31}/G_{13} & \eta_{2,31}/G_{13} & \eta_{3,31}/G_{13} & \mu_{23,31}/G_{13} & 1/G_{13} & \mu_{12,31}/G_{13} \\ \eta_{1,12}/G_{12} & \eta_{2,12}/G_{12} & \eta_{3,12}/G_{12} & \mu_{23,12}/G_{12} & \mu_{13,12}/G_{12} & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

E_{ii} → **Módulos de Young** nas direções *i*

G_{ij} → **Módulos de Cisalhamento** no plano *ij*

ν_{ij} → **Coeficiente de Poisson** correspondente à deformação na direção *j* e tensão na direção *i*

$\mu_{ij,kl}$ → **Coeficiente de CHENTSOV** correspondente à deformação de cisalhamento no plano *kl* e tensão de cisalhamento no plano *ij*

$\eta_{ij,k}$ → **Coeficiente de Influência Mútua do Primeiro Tipo** correspondente à deformação na direção *k* e tensão de cisalhamento no plano *ij*

$\eta_{i,kl}$ → **Coeficiente de Influência Mútua do Segundo Tipo** correspondente à deformação de cisalhamento no plano *kl* e tensão normal na direção *i*

Observação:

$$\frac{\nu_{ji}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ij}}{E_{jj}}$$

APLICAÇÕES

1) **Para um material elástico linear, deduzir o Teorema da Reciprocidade de Betti.**

$$\int_D \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_D \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV$$

Prova:

$$\int_D \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_D C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad \Rightarrow \quad \int_D C_{klij} \varepsilon_{ij}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(1)} dV = \int_D \sigma_{kl}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(1)} dV$$

$$\int_D \sigma_{kl}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(1)} dV = \int_D \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_D \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_D \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV}$$

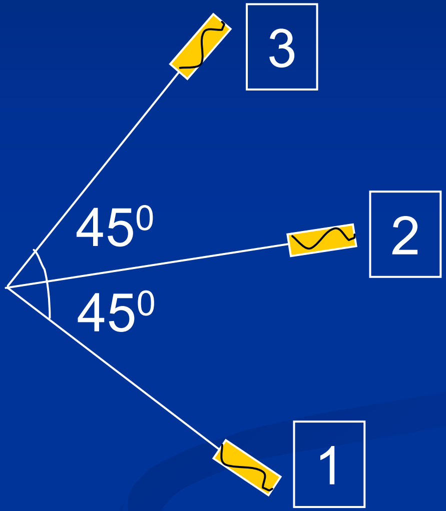
c.q.d.

2) A roseta de deformação retangular mostrada na figura é montada sobre a superfície de uma corpo elástico linear. As medidas de deformações são:

$$\varepsilon_{(1)} = 0{,}002$$

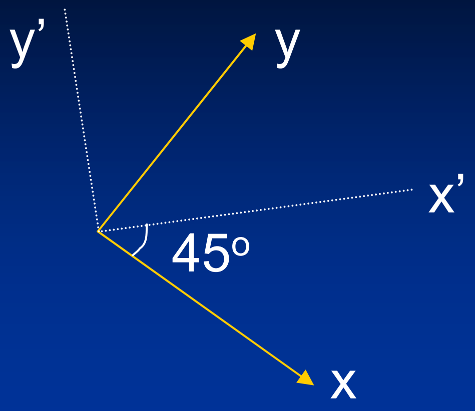
$$\varepsilon_{(2)} = 0{,}003$$

$$\varepsilon_{(3)} = 0{,}004$$



A) Se E = 2 x 10^5 MPa e $\nu = 0{,}3$, calcular as tensões principais;

B) Determinar a deformação normal na direção perpendicular à superfície do corpo.



$$a_{i'j}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{i'j'}=a_{i'k}a_{j'l}\varepsilon_{kl}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'}=&\,a_{1'1}a_{1'1}\varepsilon_{11}+a_{1'1}a_{1'2}\varepsilon_{12}+a_{1'1}\cancel{a_{1'3}}\varepsilon_{13}\\&+a_{1'2}a_{1'1}\varepsilon_{21}+a_{1'2}a_{1'2}\varepsilon_{22}+a_{1'2}\cancel{a_{1'3}}\varepsilon_{23}\\&+\cancel{a_{1'3}}a_{1'1}\varepsilon_{31}+\cancel{a_{1'3}}a_{1'2}\varepsilon_{32}+\cancel{a_{1'3}}a_{1'3}\varepsilon_{33}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{x'x'}=\frac{1}{2}\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}+\frac{1}{2}\varepsilon_{22}=0{,}003\;\Rightarrow\;\boxed{\varepsilon_{12}=\varepsilon_{xy}=0}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0{,}002 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}004 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

As direções x, y e z são principais

$$0{,}002 = \frac{\sigma_{xx}}{200000} - 0{,}3\frac{\sigma_{yy}}{200000}$$

$$0{,}004 = \frac{\sigma_{yy}}{200000} - 0{,}3\frac{\sigma_{xx}}{200000}$$

$$\boxed{\sigma_{xx} = 703{,}30 MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{yy} = 1010{,}99 MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{zz} = 0}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{zz} = -0{,}00257}$$