MODELOS CONSTITUTIVOS

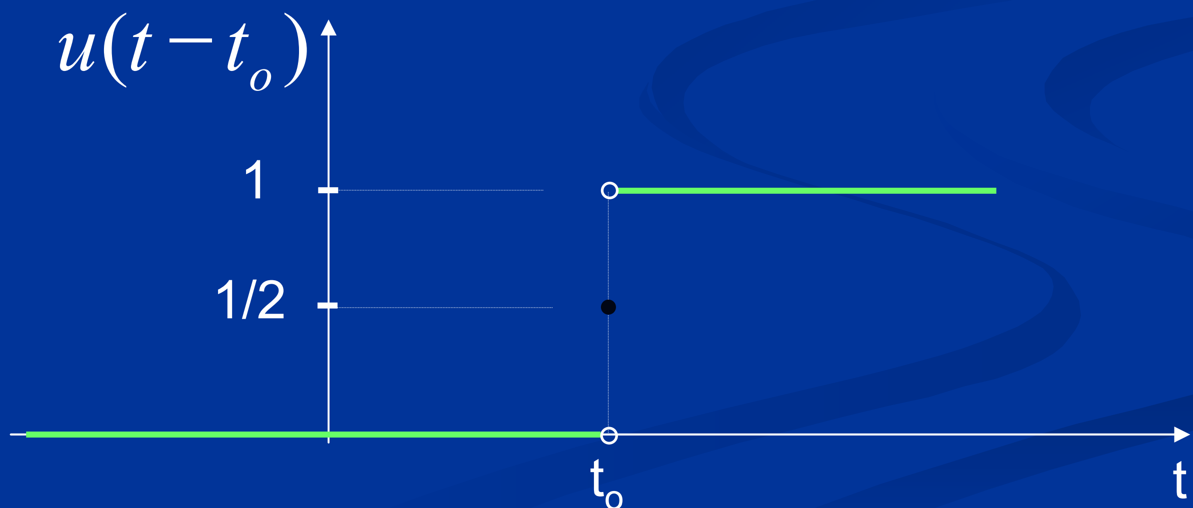
Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

FUNÇÕES COM DESCONTINUIDADES

FUNÇÃO PASSO UNITÁRIO (UNIT STEP FUNCTION)

$$u(t-t_o)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad t>t_o\\ 1/2 & \text{se} \quad t=t_o\\ 0 & \text{se} \quad t<t_o\end{cases}$$



Seja f(t) uma função integrável.

$$\int_{-\infty}^{t} f(t).u(t-t_o)dt = \int_{t_o}^{t} f(t).u(t-t_o)dt = u(t-t_o)\int_{t_o}^{t} f(t)dt$$

Considerando $f(t) = (t - t_o)^n$*, então*

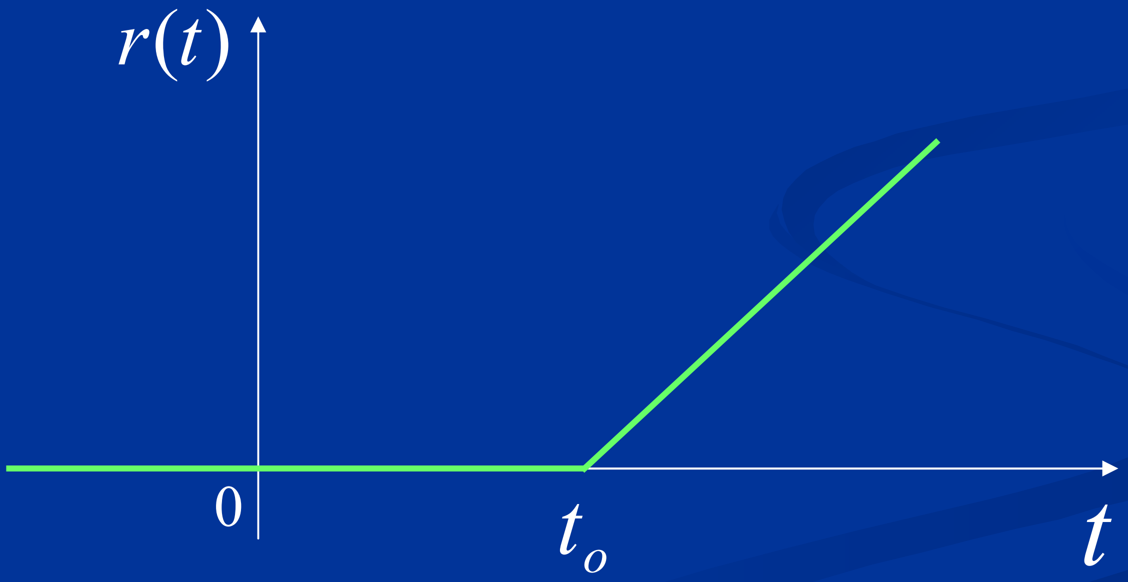
$$\int_{-\infty}^{t} f(t).u(t-t_o)dt = u(t-t_o)\int_{t_o}^{t} (t-t_o)^n dt = u(t-t_o)\,\frac{(t-t_o)^{n+1}}{n+1}$$

Se $n = 0 \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{t} (t-t_o)^0 .u(t-t_o)dt = u(t-t_o)(t-t_o)$

Função Rampa : $\longrightarrow$ $r(t) = u(t - t_o)(t - t_o)$

Função Rampa

$$r(t) = u(t - t_o)(t - t_o)$$



Função Delta de DIRAC $\Rightarrow$ $\delta(t - t_o)$

Seja f(t) uma função contínua em $t = t_o$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(t).\delta(t - t_o)dt = f(t_o).u(t - t_o)}$$

Como $u(\infty) = 1$ $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t - t_o)dt = f(t_o)$

Em caso de $f(t) = 1$ $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{t} \delta(t - t_o)dt = u(t - t_o)$

A integral da Função Delta de Dirac no intervalo $]-\infty, t]$ *é a Função Passo Unitário*

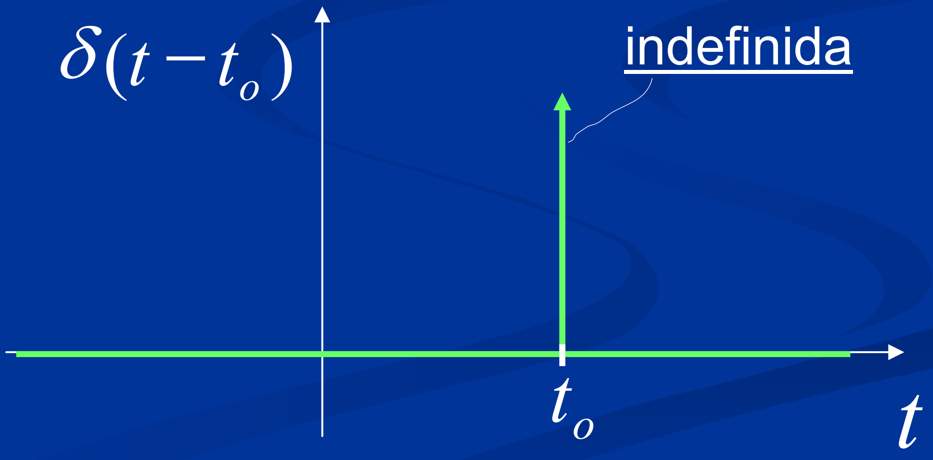
Aplicando a Regra de Leibnitz

$$\delta(t-t_o) = \frac{d}{dt}\left[u\left(t-t_o\right)\right]$$

$$t < t_o \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}[u(t-t_o)] = 0$$

$$t = t_o \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}[u(t-t_o)] \text{ é indefinida}$$

$$t > t_o \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}[u(t-t_o)] = 0$$



Observações:

$$t < t_o \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} f(t).\delta(t - t_o)dt = 0$$

$$t = t_o \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} f(t).\delta(t - t_o)dt = \frac{1}{2} f(t_o)$$

$$t > t_o \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} f(t).\delta(t - t_o)dt = f(t_o)$$

TRANFORMADA DE LAPLACE

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t).e^{-st}dt = \bar{f}(s)$$

s ⇨ número real não negativo, chamado parâmetro da transformada

$$L\{f(t) + g(t)\} = \int_0^\infty [f(t) + g(t)].e^{-st}dt = \bar{f}(s) + \bar{g}(s)$$

$$L\{af(t)\} = \int_0^\infty af(t).e^{-st}dt = a\bar{f}(s)$$

⇩

L é um operador linear

$$L\{\dot{f}(t)\} = \int_0^\infty \dot{f}(t).e^{-st}\,dt = f(t).e^{-st}\,(\infty) - f(t).e^{-st}\,(0) + \int_0^\infty s f(t).e^{-st}\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L\{\dot{f}(t)\} = -f(0) + s\bar{f}(s)}$$

$$L\{\ddot{f}(t)\} = \int_0^\infty \ddot{f}(t).e^{-st}\,dt = \dot{f}(t).e^{-st}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s\dot{f}(t).e^{-st}\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L\{\ddot{f}(t)\} = -\dot{f}(0) - sf(0) + s^2\bar{f}(s)}$$

Em geral,

$$L\{f^{(n)}(t)\} = -f^{(n-1)}(0) - sf(0) - \ldots sf^{(n-1)}(0) + s^n \bar{f}(s)$$

Conclusão:

A transformada de Laplace de uma derivada está relacionada com a transformada da função primitiva e com as condições iniciais relativas à função e suas derivadas até uma ordem menor que a ordem de derivada.

Observação:

$$Condições\ iniciais\ homogêneas\ em\ t = 0$$

⇩

$$A\ função\ e\ todas\ as\ suas\ \ derivadas\ são\ nulas\ em\ t = 0$$

Seja $f(t)$ uma função com $f(0^-) = 0$ e $f(0^+)$ igual a um valor finito

$$f(t) = g(t)u(t)$$

$g(t)$ é contínua em $-\infty < t < \infty$.

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty g(t)u(t).e^{-st}\,dt = L\{g(t)\}$$

Observação:

$$u(t) = 1 \quad \text{no intervalo } 0 < t < \infty$$

$$Seja\ f(t) = g(t)u(t),\ com\ g(t)\ contínua\ em\ -\infty < t < \infty$$

$$\boxed{\dot{f}(t) = g(t)\dot{u}(t) + \dot{g}(t)u(t)}$$

Então,

$$L\{\dot{f}(t)\} = L\{g(t)\dot{u}(t)\} + L\{\dot{g}(t)u(t)\}$$

Logo, usando o resultado anterior,

$$L\{\dot{f}(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} g(t)\dot{u}(t).e^{-st}dt + L\{\dot{g}(t)\}$$

$$L\{\dot{f}(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} g(t)\delta(t).e^{-st}dt + L\{\dot{g}(t)\}$$

Pela definição de $\delta(t)$,

$$\int_{-\infty}^{t} g(t)\delta(t).e^{-st}dt = g(0^-)e^{0}.u(t)$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} g(t)\delta(t).e^{-st}dt}_{0} + \int_{-0}^{t} g(t)\delta(t).e^{-st}dt = g(0^-)u(t)$$

$t \to \infty$ $\Rightarrow$ $\int_{-0}^{t} g(t)\delta(t).e^{-st}dt = g(0^-)$

$$L\{\dot{f}(t)\} = g(0^-) + L\{\dot{g}(t)\} = g(0^-) - g(0^-) + sL\{g(t)\}$$

$$\boxed{L\{\dot{f}(t)\} = sL\{g(t)\} = sL\{f(t)\}}$$

Seja $f(t) = u(t)$.

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = e^{-st}\left[-\frac{1}{s}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{L\{u(t)\} = \frac{1}{s}}$$

Seja $f(t) = \delta(t)$.

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^\infty \delta(t)e^{-st}dt = e^o.u(\infty)$$

$$\boxed{L\{\delta(t)\} = 1}$$

$$Seja\ r(t) = t.u(t) \qquad \textit{(função rampa)}$$

$$L\{r(t)\} = \int_0^{\infty} t.u(t).e^{-st}dt = \int_0^{\infty} t.e^{-st}dt$$

$$L\{r(t)\} = t.e^{-st}\left[-\frac{1}{s}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{1}{s}e^{-st}dt = 0 + \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{L\{r(t)\} = \frac{1}{s^2}}$$

Outras funções importantes

$$\boxed{L\{e^{-at}\}} = \int_0^\infty e^{-at}.e^{-st}dt = \left[-e^{-(s+a)t}.\frac{1}{s+a}\right]_0^\infty = \boxed{\frac{1}{s+a}}$$

$$\boxed{L\{cos\ at\}} = \int_0^\infty cos\ at.e^{-st}dt = \boxed{\frac{s}{s^2+a^2}}$$

$$\boxed{L\{sen\ at\}} = \int_0^\infty sen\ at.e^{-st}dt = \boxed{\frac{a}{s^2+a^2}}$$

$$\boxed{L\{t^n\}} = \int_0^\infty t^n.e^{-st}dt = \boxed{\frac{n!}{s^{n+1}}} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

TEOREMAS DOS LIMITES

$$\lim_{s\to\infty} s\bar{f}(s) = f(0^+)$$

Prova:

$$L\{\dot{f}(t)\} = -f(0^+) + s\bar{f}(s)$$

$$\lim_{s\to\infty} L\{\dot{f}(t)\} = -f(0^+) + \lim_{s\to\infty} s\bar{f}(s)$$

$$\lim_{s\to\infty} L\{\dot{f}(t)\} = \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \dot{f}(t).e^{-st}dt = \int_0^\infty \dot{f}(t).\lim_{s\to\infty} e^{-st}dt = 0$$

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} s\bar{f}(s) = f(0^+)}$$

c.q.d.

TEOREMAS DOS LIMITES

$$\lim_{s\to 0} s\bar{f}(s) = f(\infty)$$

Prova:

$$L\{\dot{f}(t)\} = -f(0) + s\bar{f}(s)$$

$$\lim_{s\to 0} L\{\dot{f}(t)\} = -f(0) + \lim_{s\to 0} s\bar{f}(s)$$

$$\lim_{s\to 0} L\{\dot{f}(t)\} = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \dot{f}(t).e^{-st}dt = \int_0^\infty \dot{f}(t)dt = f(\infty) - f(0)$$

$$\boxed{\lim_{s\to 0} s\bar{f}(s) = f(\infty)}$$

c.q.d.

TRANSFORMADAS DE INTEGRAIS

$$\boxed{f(t) = \int_a^t g(t)dt}$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_a^t g(t')dt'\right] e^{-st} dt$$

$$L\{f(t)\} = \left[\int_a^t g(t')dt'.e^{-st}\left(-\frac{1}{s}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-st}\left(-\frac{1}{s}\right) g(t)dt$$

$$L\{f(t)\} = \int_a^\infty g(t')dt'.0.\left(-\frac{1}{s}\right) + \int_a^0 g(t')\frac{1}{s}dt' + \frac{1}{s}\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

$$L\{f(t)\} = \int_a^0 g(t')\frac{1}{s}dt' + \frac{1}{s}\overline{g}(s)$$

$$\boxed{L\{f(t)\} = \frac{1}{s}\overline{g}(s) - \frac{1}{s}\int_0^a g(t')dt'}$$

INTEGRAL DA CONVOLUÇÃO

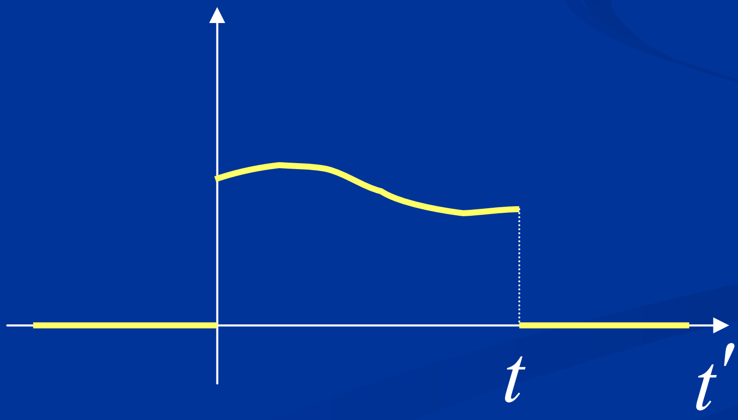
Seja

$$h(t) = \int_0^t f(t')g(t-t')dt'$$

onde $f(t)$ *e* $g(t)$ *são nulas para* $t < 0$.

$$Assim,\ para\ t' < 0\ e\ t' > t \ \Rightarrow\ h(t) = 0.$$

$f(t').g(t-t')$



$$L\{h(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t').g(t-t')dt' \right] e^{-st} dt$$

$$L\{h(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_{-\infty}^\infty f(t').g(t-t')dt' \right] dt$$

$$L\{h(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(t-t') e^{-st} dt \right] f(t').dt'$$

Fazendo

$$t'' = t - t'$$

$$L\{h(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(t'') e^{-s(t'+t'')} dt'' \right] f(t').dt'$$

$$L\{h(t)\} = \int_0^\infty g(t'') e^{-st''} dt''. \int_0^\infty f(t').e^{-st'} dt'$$

$$\boxed{L\{h(t)\} = L\{g(t)\}.L\{f(t)\}}$$

Teorema da CONVOLUÇÃO