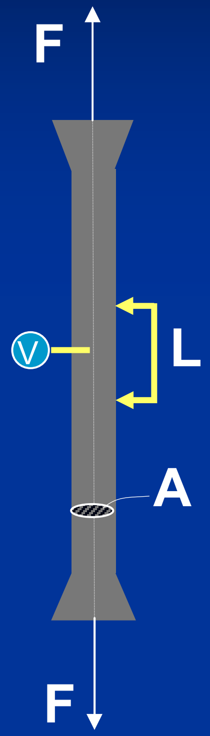
MODELOS CONSTITUTIVOS

Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques

COMPORTAMENTO UNIAXIAL

COMPORTAMENTO UNIDIMENSIONAL DE MATERIAIS ESTRUTURAIS

Teste de Tração Axial



Carga quase-estática **Temperatura moderada**

Tensão de Engenharia ou Lagrangeana: $$\sigma_{11}^{e} = \frac{F}{A_o}$$

Tensão Real ou Euleriana: $$\sigma_{11}^{r} = \frac{F}{A}$$

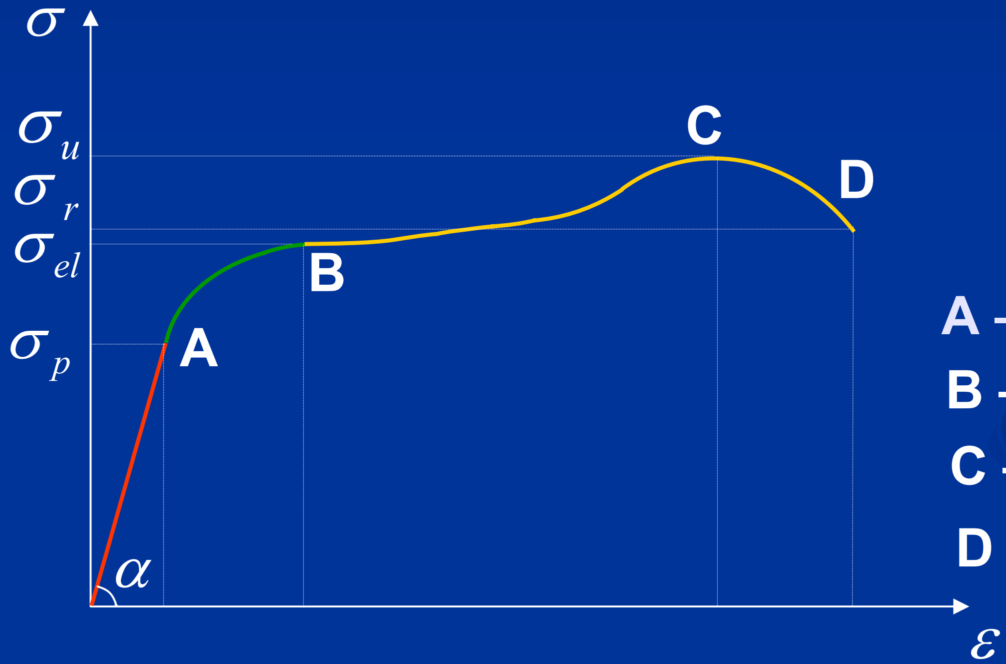
Deformação de Engenharia ou Lagrangeana: $$\varepsilon_{11}^{e} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

Deformação Logaritmica: $$\varepsilon_{11}^{l} = \ln \frac{L}{L_o}$$

$$\Delta L = L - L_o$$

A velocidade do carregamento deve ser baixa para evitar efeito dinâmico

A temperatura não deve ser alta para evitar efeitos dependentes do tempo



A – Limite de proporcionalidade

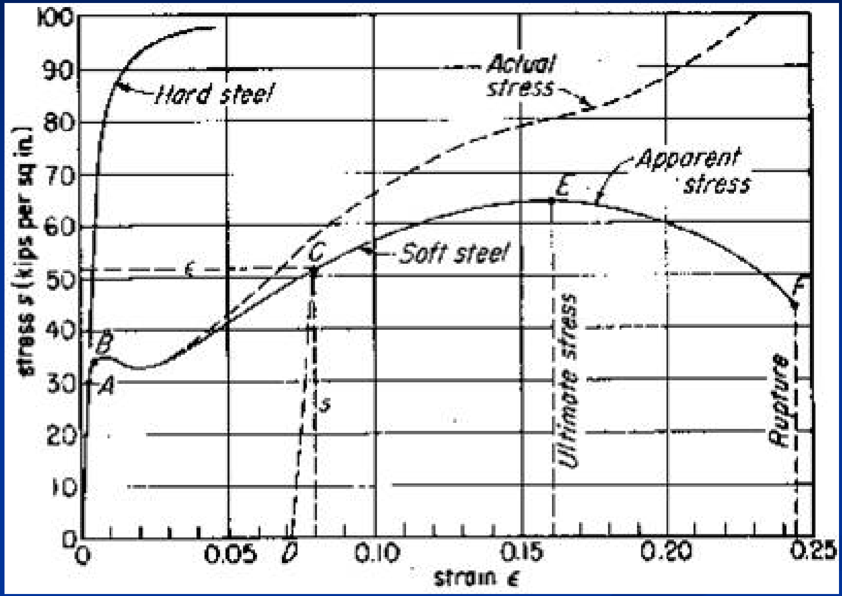
B – Limite elástico

C – tensão última

D – tensão de ruptura

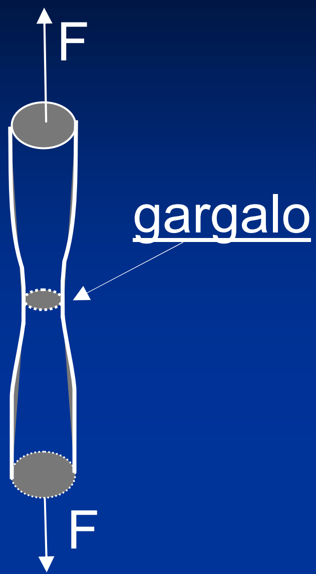
E = tan α = módulo de elasticidade

Diagramas tensão-deformação



Cargas baixas → $A \cong A_o$ → $\sigma^e \cong \sigma^r$

Cargas altas → $A \neq A_o$ → $\sigma^e \neq \sigma^r$ $(\sigma^e < \sigma^r)$



$$F = \sigma^e A_o = \sigma^r A \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{d\delta} = A_o \frac{d\sigma^e}{d\delta} = A \frac{d\sigma^r}{d\delta} + \sigma^r \frac{dA}{d\delta}$$

negativo

positivo

Tensão última $\Rightarrow$

$$\frac{dF}{d\delta} = \frac{d\sigma^e}{d\delta} = 0 \qquad A \frac{d\sigma^r}{d\delta} = -\sigma^r \frac{dA}{d\delta}$$

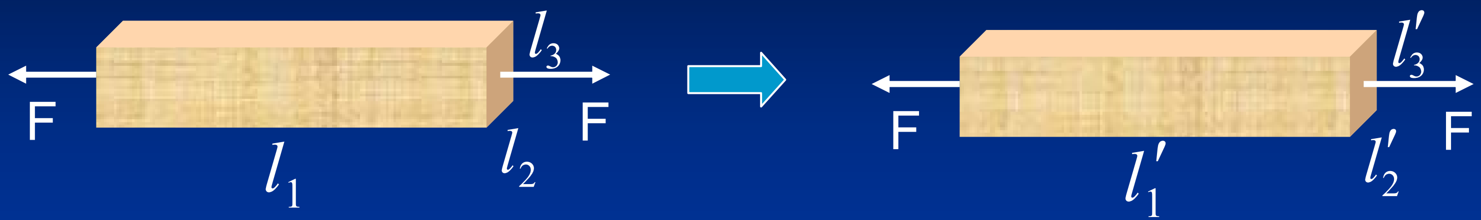
$$\frac{d\sigma^r}{d\delta} = -\frac{1}{A} \sigma^r \frac{dA}{d\delta} \qquad \frac{dA}{d\delta} < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^r \text{ é crescente}$$

No gargalo as deformações são inelásticas e grandes

$\Downarrow$

Escoamento plástico localizado do material

MATERIAL INCOMPRESSÍVEL



Material incompressível → $\Delta V = 0$ → $(l_1' l_2' l_3')/(l_1 l_2 l_3) = 1$

$$\ln\frac{l_1'}{l_1} + \ln\frac{l_2'}{l_2} + \ln\frac{l_3'}{l_3} = \ln 1$$ → $$\varepsilon_1^l + \varepsilon_2^l + \varepsilon_3^l = 0$$

$$\varepsilon^l = \ln\frac{L}{L_o} = \ln\frac{L_o + \Delta L}{L_o}$$ →

$$\varepsilon^l = \ln(1 + \varepsilon^e)$$

$$\varepsilon^e = \exp(\varepsilon^l) - 1$$

MATERIAL INCOMPRESSÍVEL

$$\varepsilon_1^l + \varepsilon_2^l + \varepsilon_3^l = 0 \Rightarrow \ln(1+\varepsilon_1^e) + \ln(1+\varepsilon_2^e) + \ln(1+\varepsilon_3^e) = 0$$

$$\ln[(1+\varepsilon_1^e)(1+\varepsilon_2^e)(1+\varepsilon_3^e)] = 0 \Rightarrow (1+\varepsilon_1^e)(1+\varepsilon_2^e)(1+\varepsilon_3^e) = 1$$

Desenvolvendo:

$$1 + \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e + \varepsilon_1^e\varepsilon_2^e + \varepsilon_1^e\varepsilon_3^e + \varepsilon_2^e\varepsilon_3^e + \varepsilon_1^e\varepsilon_2^e\varepsilon_3^e = 1$$

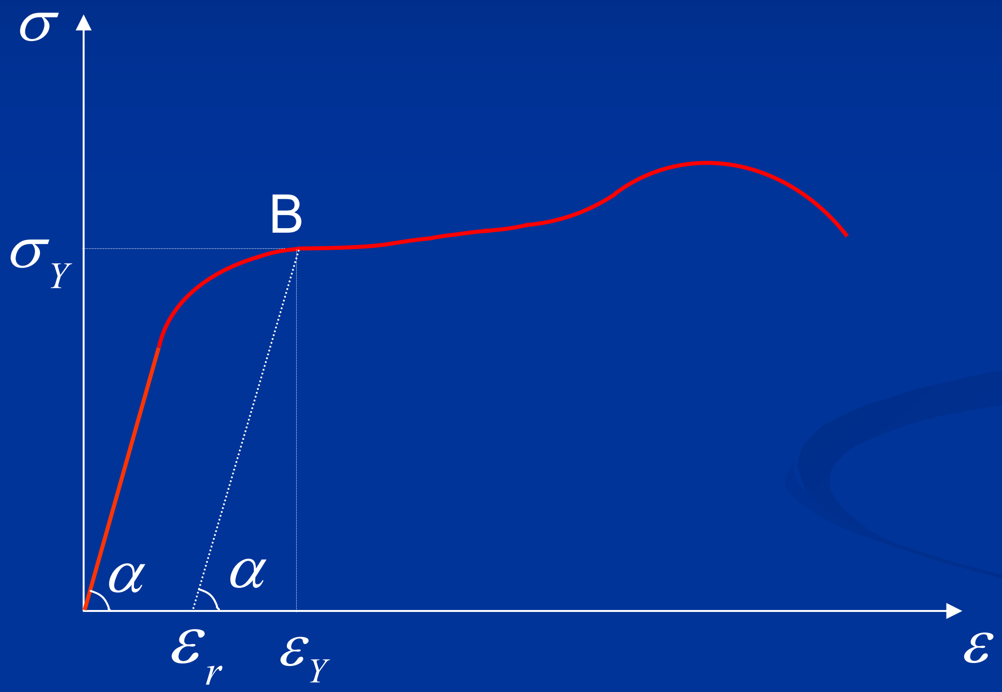
Admitindo ε_i^e **pequenos:**

$$\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e = 0$$

Definindo $\varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e = -\nu_p \varepsilon_1^e \Rightarrow \boxed{\nu_p = 0{,}5}$

Tensão Convencional de Escoamento

As dificuldades de obtenção do limite elástico do material levam ao uso de um valor convencional para a tensão correspondente ao início do comportamento inelástico



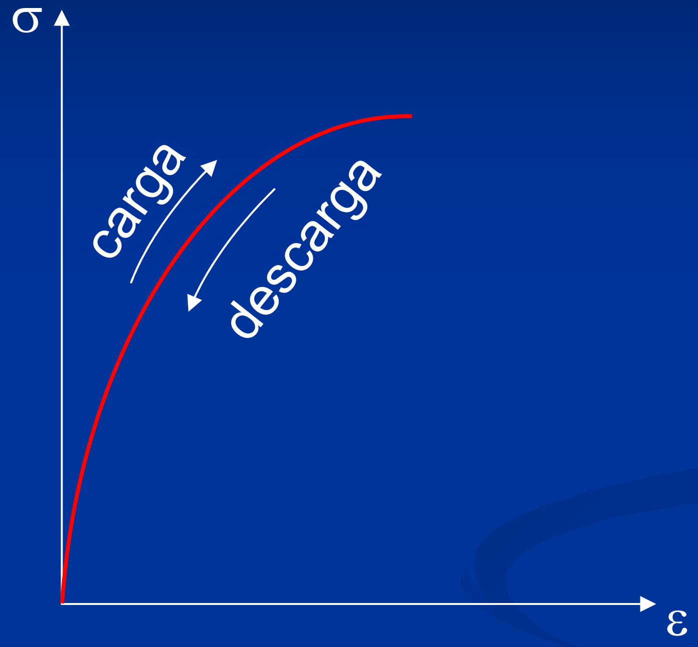
Valor prático:

$$\varepsilon_r = 0{,}002$$

ε_r = Deformação residual plástica após a descarga do corpo de prova

σ_Y = tensão de escoamento convencional do material

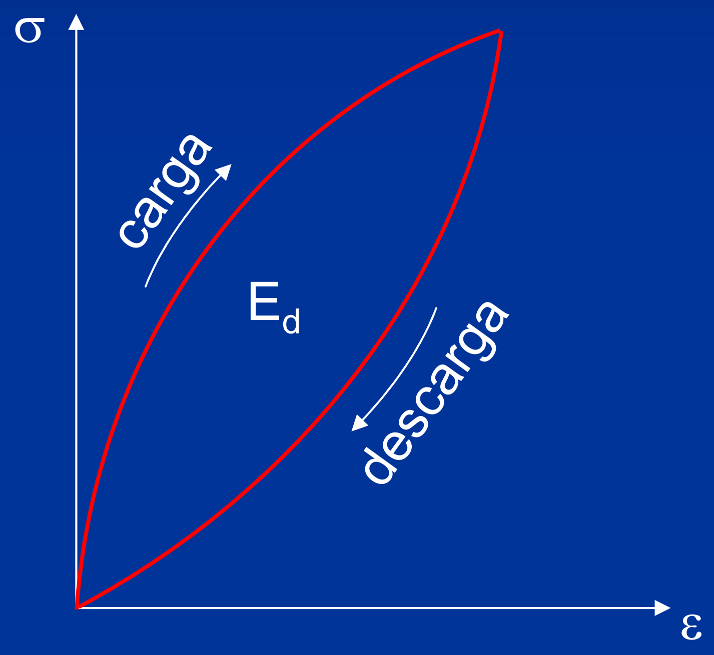
MATERIAIS ELÁSTICOS NÃO LINEARES



Exemplos: Alguns tipos de borracha

MATERIAIS ANELÁSTICOS

O elemento retoma a geometria inicial quando descarregado, mas, a curva de descarga não coincide com a curva de carga

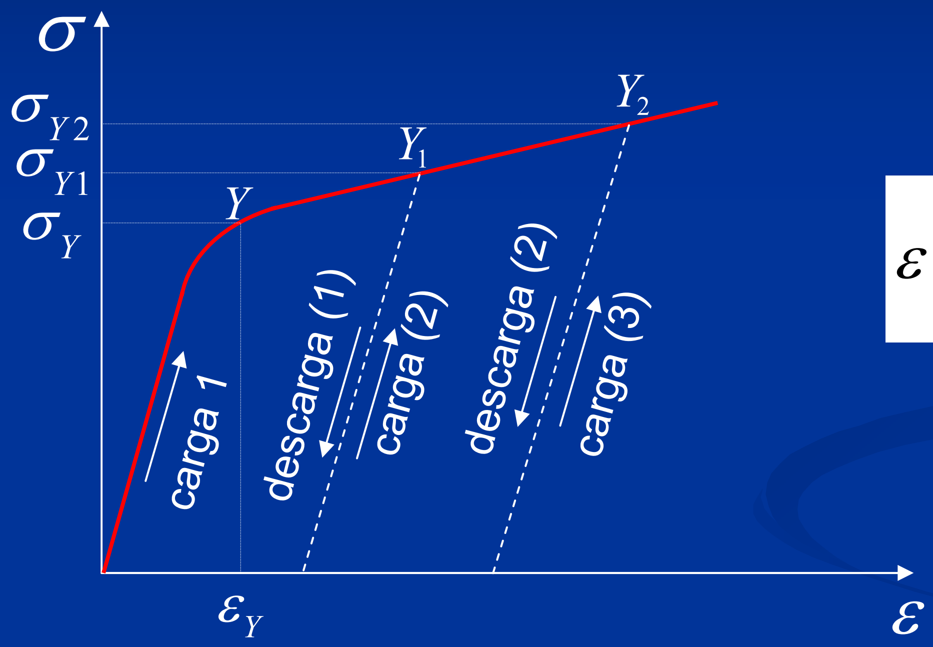


Exemplos: **alguns tipos de borrachas. Usadas para Amortecimento de vibrações**

E_d = área correspondente à energia dissipada no processo carga-descarga (energia térmica)

MATERIAIS COM ENDURECIMENTO

Endurecimento (*strain hardening*) ⇨ **propriedade definida pelo aumento contínuo da tensão axial com a evolução da deformação axial após o ponto de escoamento.**



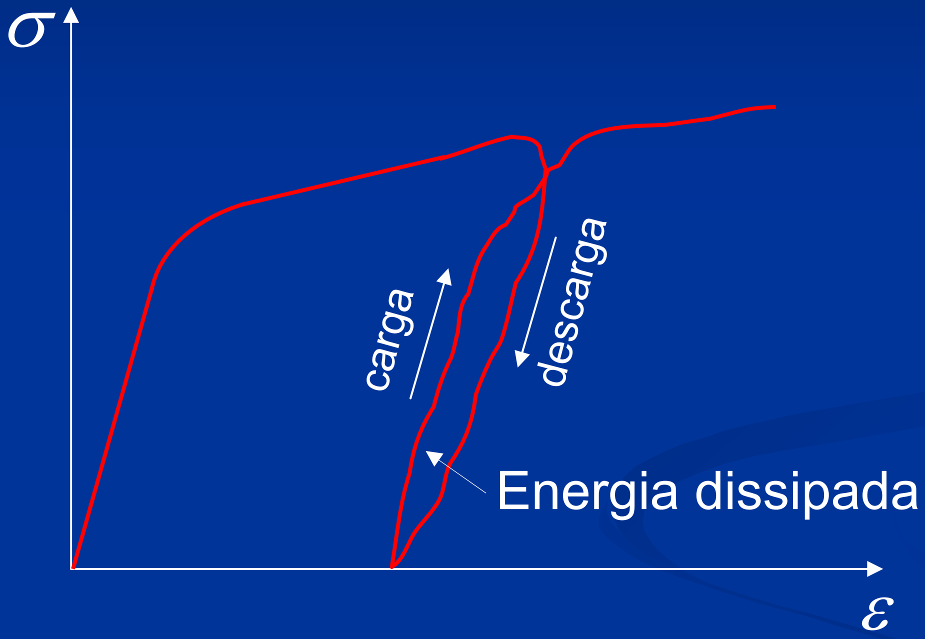
$$\varepsilon > \varepsilon_Y \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0$$

Trajetórias carga-descarga praticamente retas e coincidentes, paralelas ao ramo elástico linear inicial

Após descarga e carga consecutivas, ocorre um aumento da tensão de escoamento

MATERIAIS COM ENDURECIMENTO

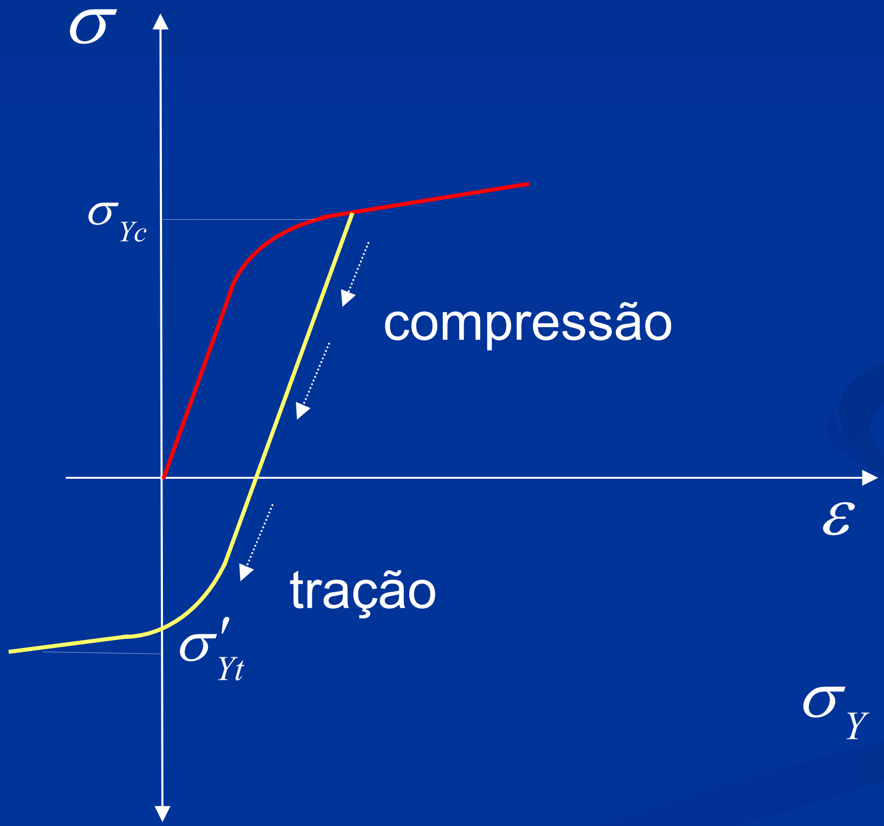
Na realidade as trajetórias carga-descarga consecutivas não são coincidentes

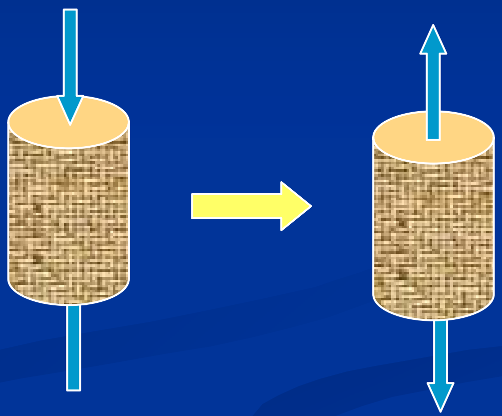


O aumento da tensão de escoamento com o processo descarga-carga acontece apenas na direção do carregamento. Nas direções normais não existe aumento, o que significa a indução de anisotropia no material

EFEITO BAUSCHINGER

Fenômeno traduzido pela redução da tensão de escoamento à tração (compressão) quando o material é descarregado à compressão (tração) no regime plástico e aplicada uma tração (compressão) na mesma direção.



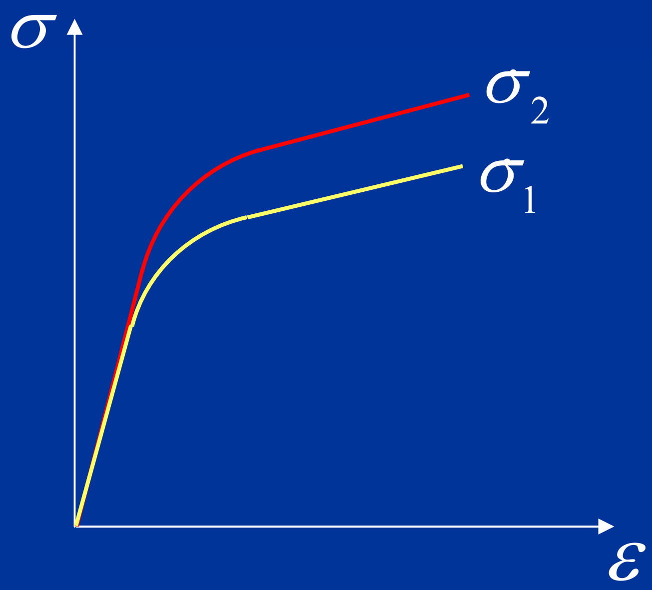


$$\sigma'_{Yt} < \sigma_Y$$

σ_Y = Tensão de escoamento do material virgem

EFEITOS DEPENDENTES DO TEMPO

Muitos materiais apresentam curvas tensão-deformação dependentes da velocidade ou taxa do carregamento. Em geral, o diagrama correspondente à maior taxa se localiza por cima daquele relativo à carga mais lenta.

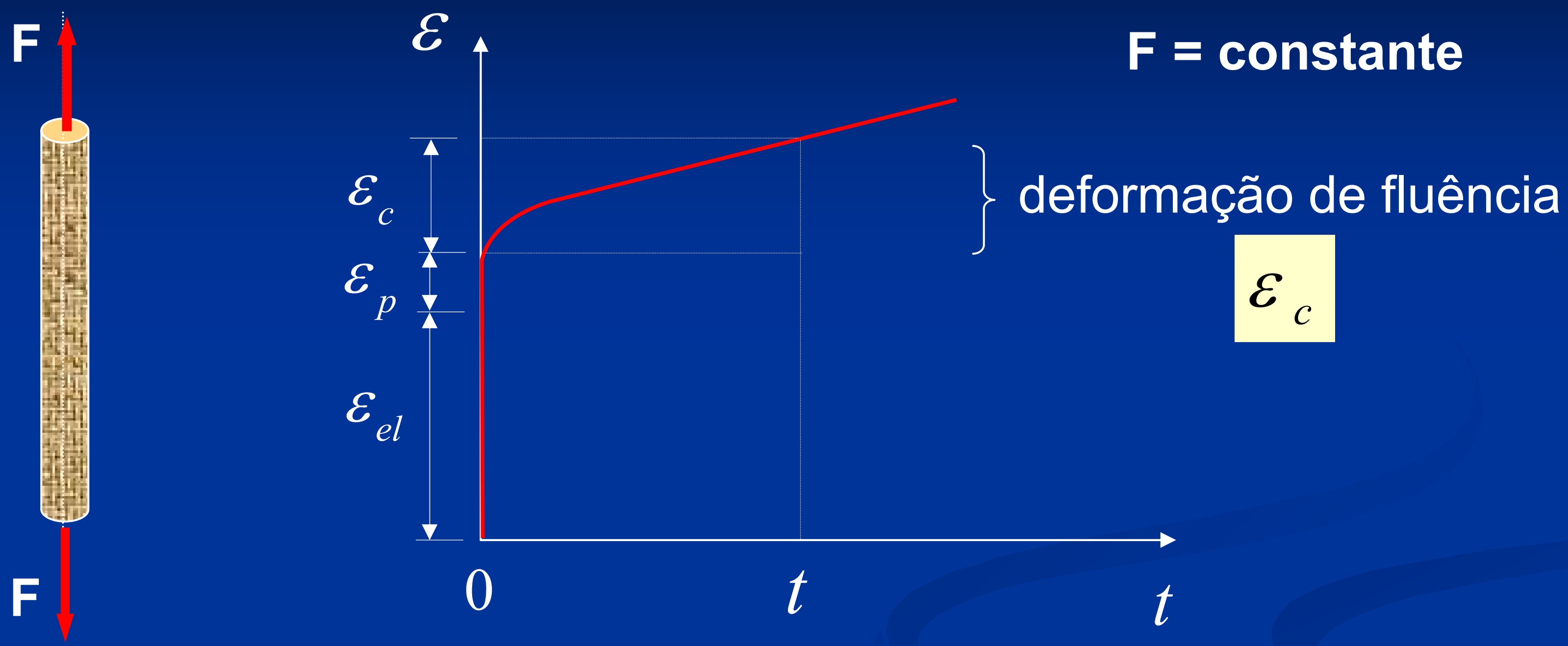


$$\dot{\sigma}_2 > \dot{\sigma}_1$$

Efeitos viscoelásticos ou viscoplásticos

Via de regra, os efeitos dependentes do tempo são acentuados com o aumento da temperatura

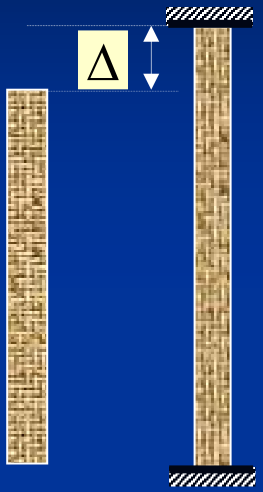
DEFORMAÇÃO POR FLUÊNCIA



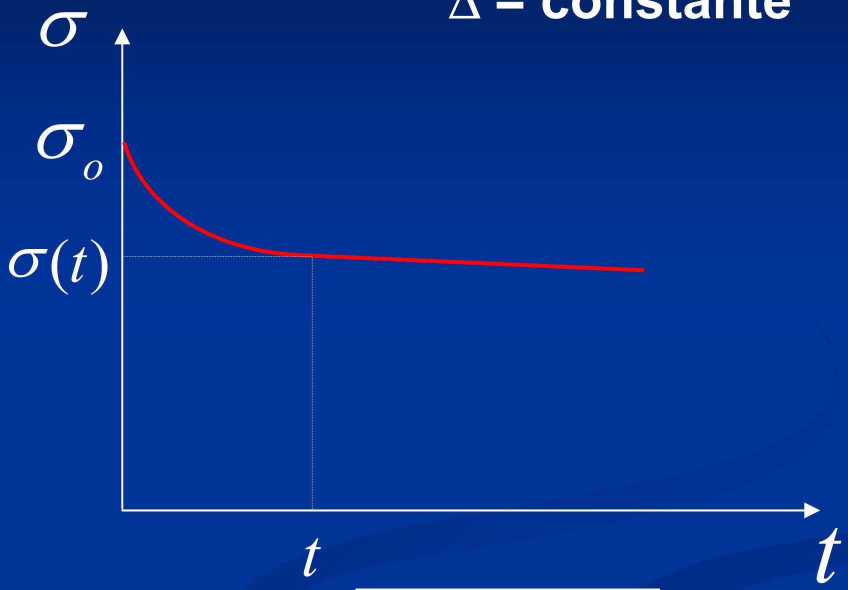
$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_{el} + \varepsilon_p + \varepsilon_c(t)}$$

Em geral, a curva de fluência depende da tensão aplicada (Ex.: metais)

RELAXAÇÃO DE TENSÃO



Δ = constante



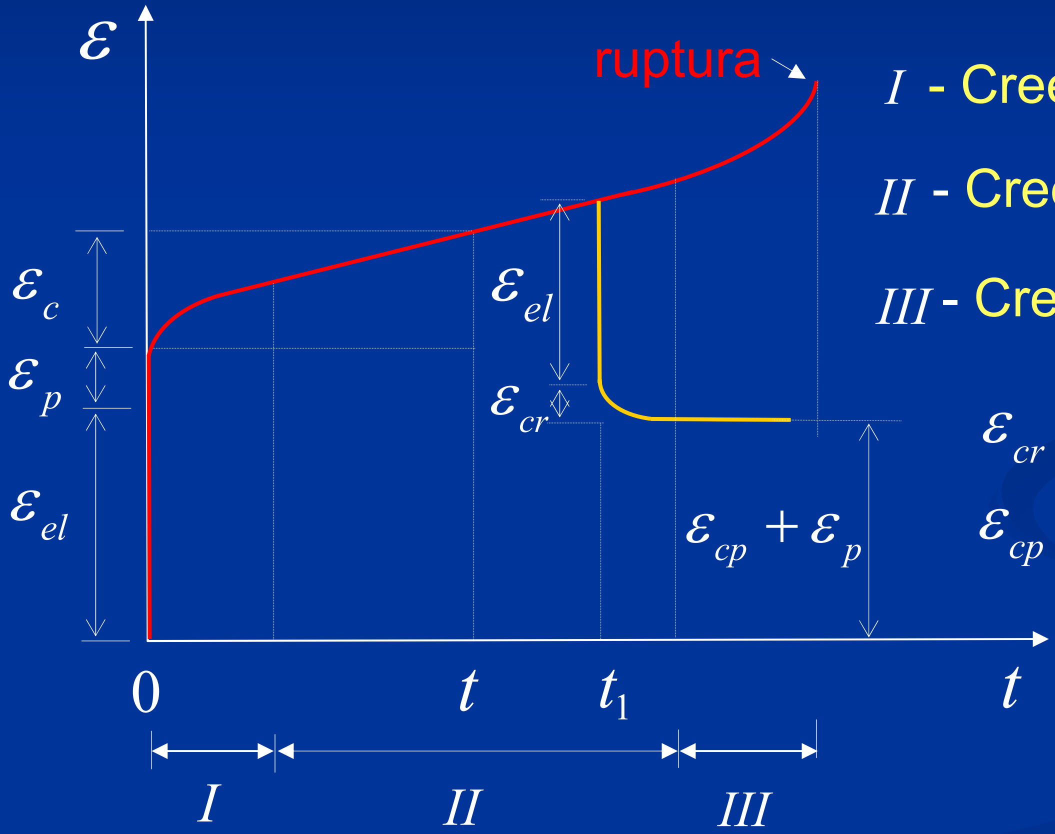
$$\sigma(t) < \sigma_o$$

σ_o = tensão inicial

A tensão diminui ao longo do tempo

CREEP

Creep ⇨ **Deformação dependente do tempo observada durante um teste de tração ou compressão em condição de temperatura elevada e com força constante.**



I - Creep primária - $\dot{\varepsilon}$ decrescente

II - Creep secundária - $\dot{\varepsilon}$ constante

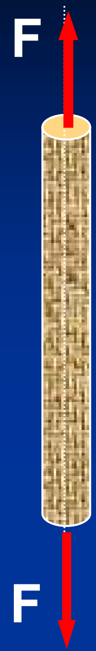
III - Creep terciária - $\dot{\varepsilon}$ crescente

ε_{cr} = def. creep recuperável

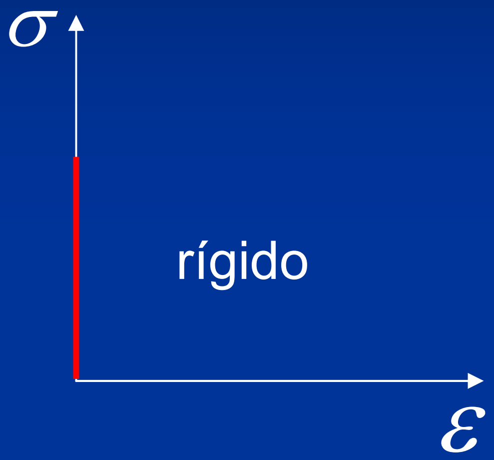
ε_{cp} = def. creep permanente

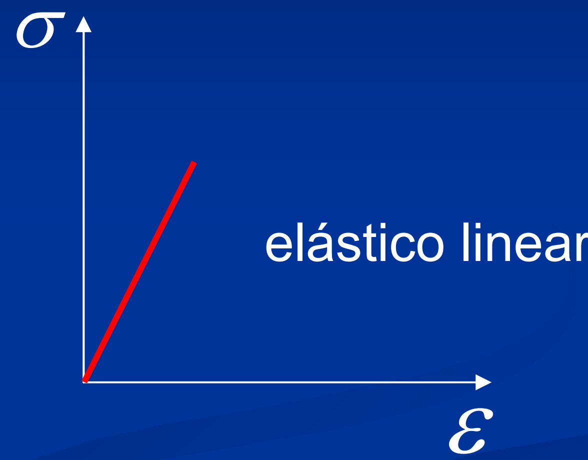
Creep induzida por temperatura: $T \geq \frac{1}{3} T_{fusão}$

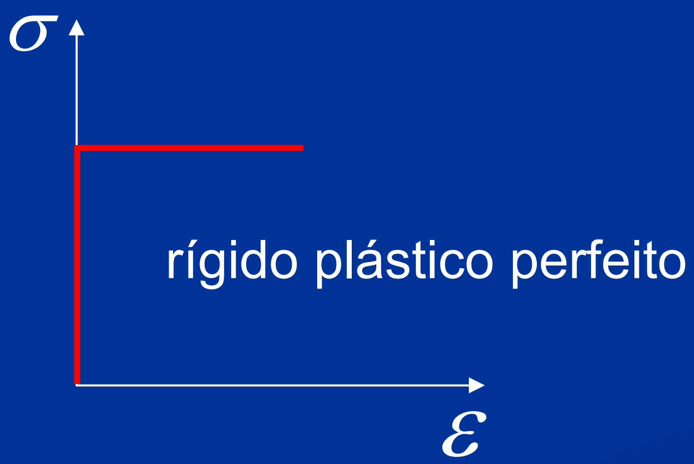
COMPORTAMENTO UNIAXIAL IDEALIZADO

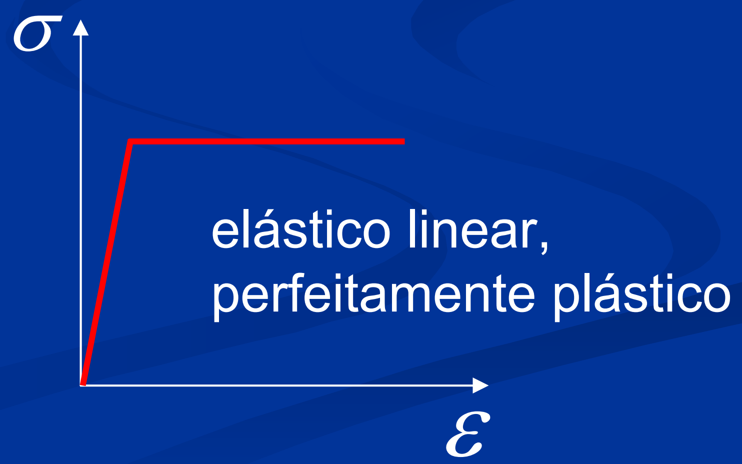


Teste de tração quase-estático em temperatura moderada

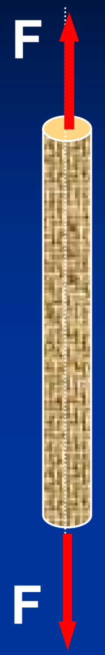


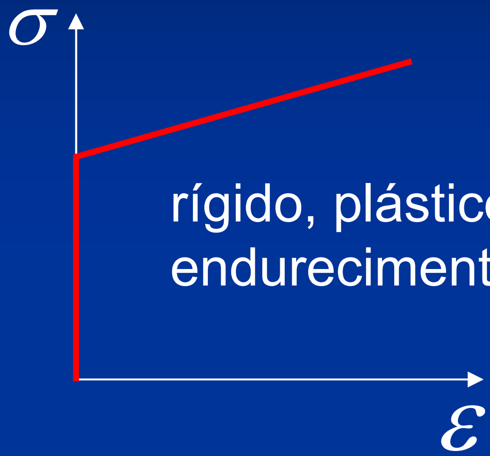




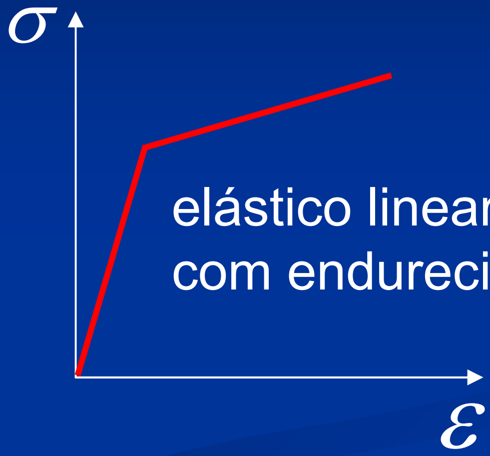


COMPORTAMENTO UNIAXIAL IDEALIZADO

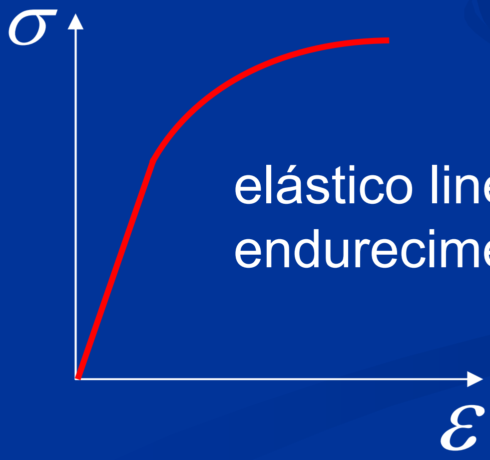




rígido, plástico com endurecimento linear



elástico linear, plástico com endurecimento linear



elástico linear, plástico com endurecimento não linear

MATERIAL ELÁSTICO

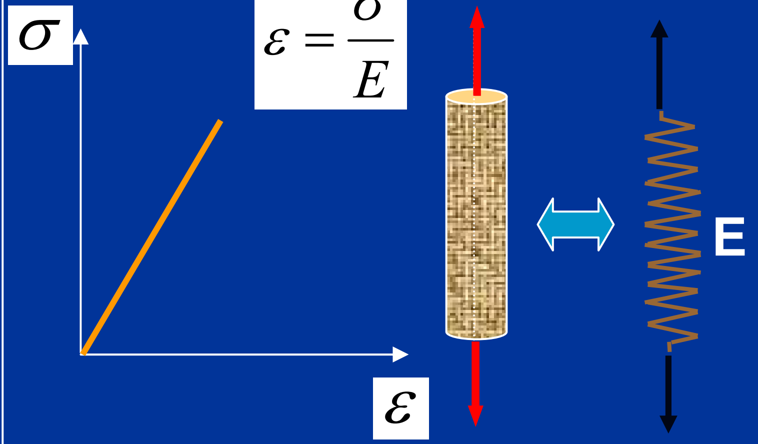
Retoma a geometria inicial quando descarregado

$$\varepsilon = f(\sigma)$$

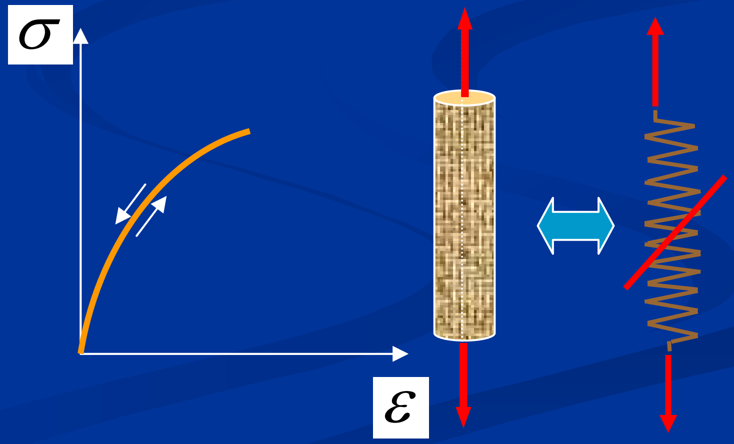
f = função biunívoca da tensão com *f(0)=0*

Material elástico linear (Hookeano)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$



Material elástico não linear (Hencky)



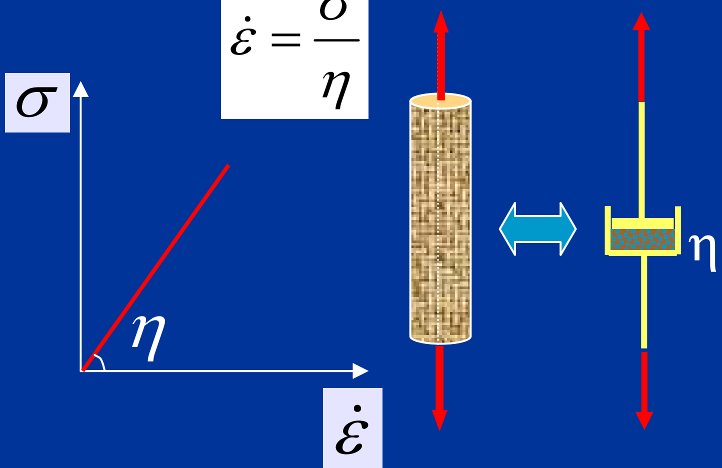
MATERIAL VISCOSO

A taxa de deformação é uma função da tensão

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = g(\sigma)$$

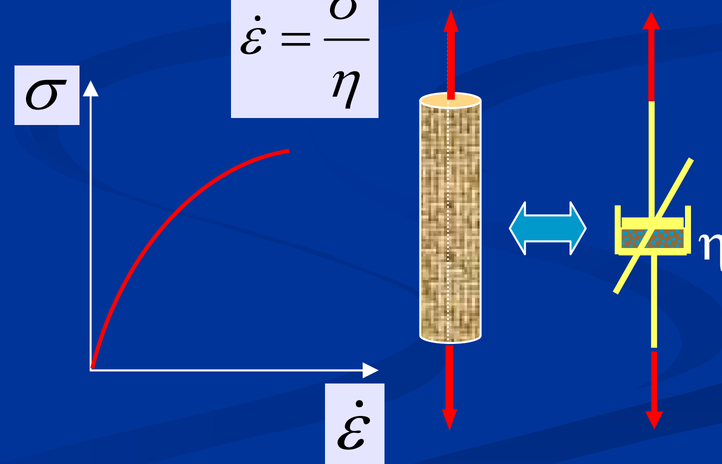
Material Viscoso Linear (Newtoniano)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$$



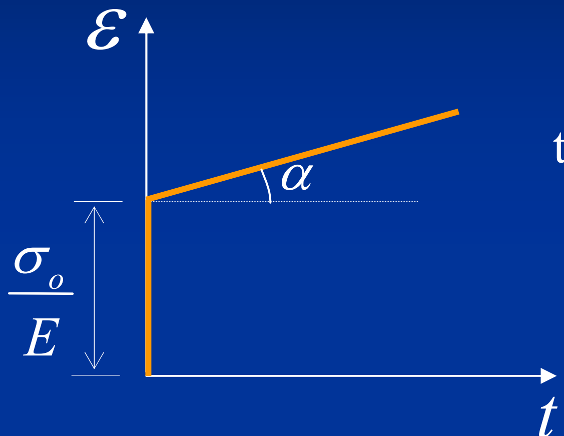
Material Quase-Viscoso (Não Newtoniano ou de Stokes)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$$



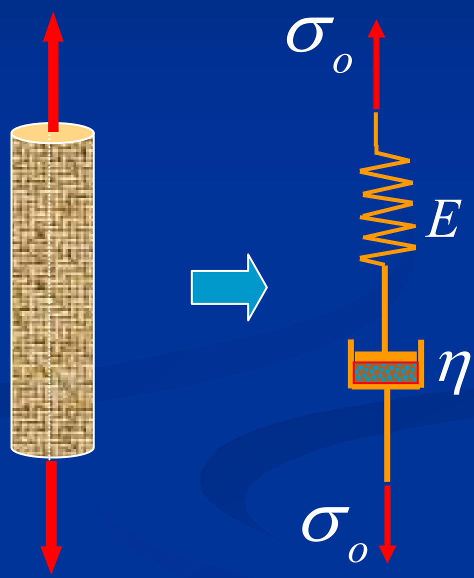
MATERIAL VISCOELÁSTICO

Combinação de comportamento elástico e viscoso



$$\tan\alpha = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_o}{\eta}$$

Modelo de Maxwell



$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Observações:

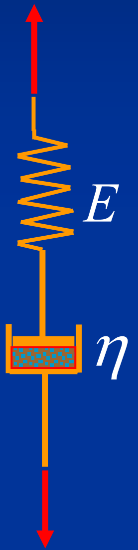
$$E \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) \rightarrow \frac{\sigma}{\eta}$$

Fluxo viscoso

$$\eta \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(t) \rightarrow \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

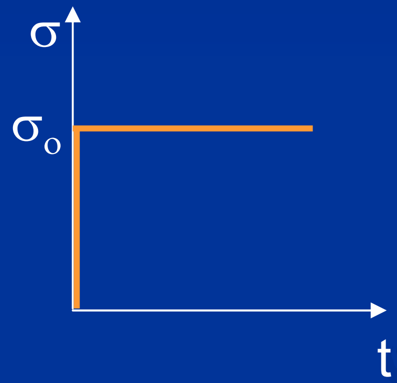
Elástico

Aplicação. Usando o modelo viscoelástico de Maxwell, deduzir: a) expressão das deformações para uma tensão constante σ_o aplicada instantaneamente e b) equação das tensões para o caso de uma deformação constante ε_o subitamente imposta.



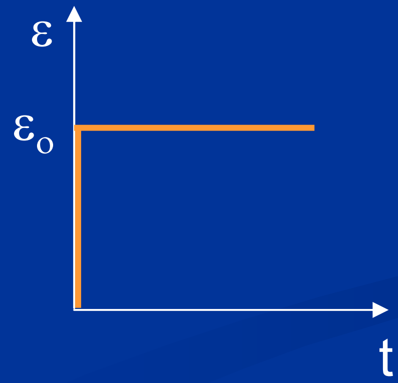
Respostas:

a)



$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\sigma_o + \frac{1}{\eta}\sigma_o t$$

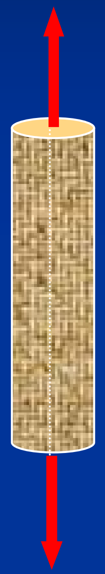
b)

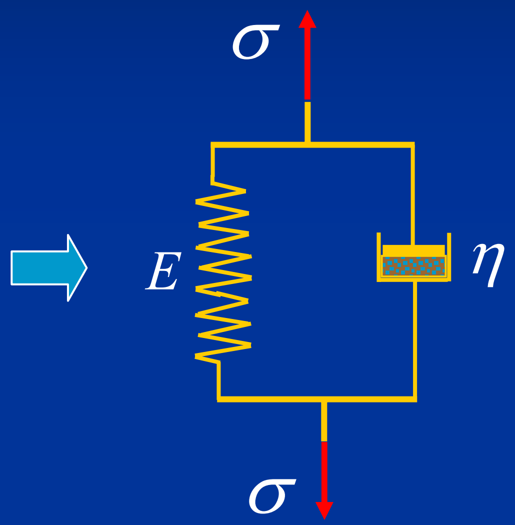


$$\sigma(t) = E\varepsilon_o e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

MATERIAL VISCOELÁSTICO

Modelo de Kelvin ou Voigt





$$\varepsilon_{mola} = \varepsilon_{amortecedor}$$

$$\sigma = \sigma_{mola} + \sigma_{amortecedor}$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

Observações:

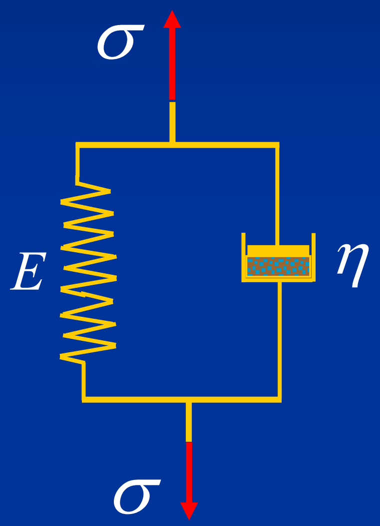
$$E \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma \to \eta\dot{\varepsilon}$$

Fluxo viscoso

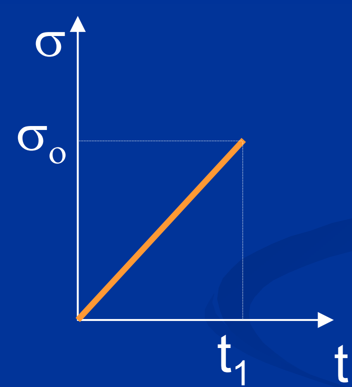
$$\eta \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma \to E\varepsilon$$

Elástico

Aplicação. Para um material viscoelástico de Kelvin, obter a relação tensão – deformação considerando uma tensão crescente, variando linearmente desde o valor 0, no tempo t=0, até σ_o em t=t_1.

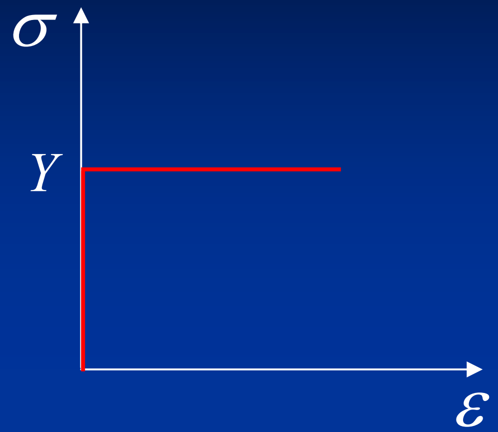


Resposta:

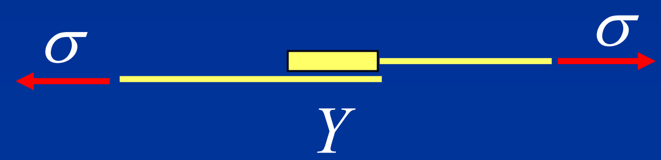


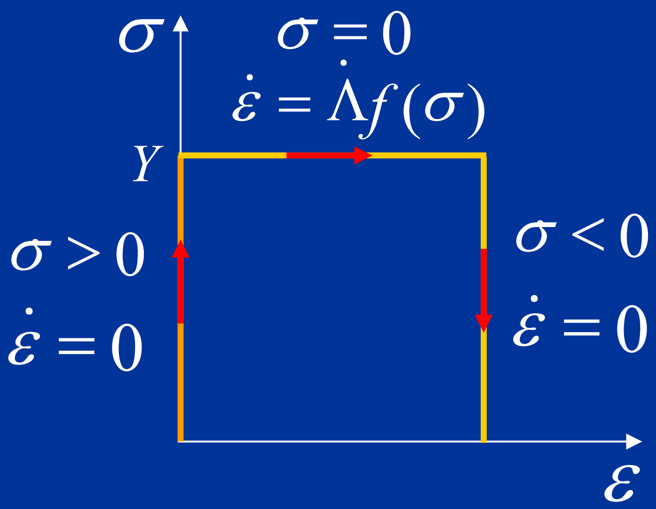
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \sigma_o \frac{\eta}{E^2 t_1}\left[1 - \exp(-\frac{\sigma}{\sigma_o}\frac{E t_1}{\eta})\right]$$

MATERIAL RÍGIDO PLÁSTICO PERFEITO



Modelo de Saint-Venant ou de Coulomb





Regra de Fluxo ou de Escoamento

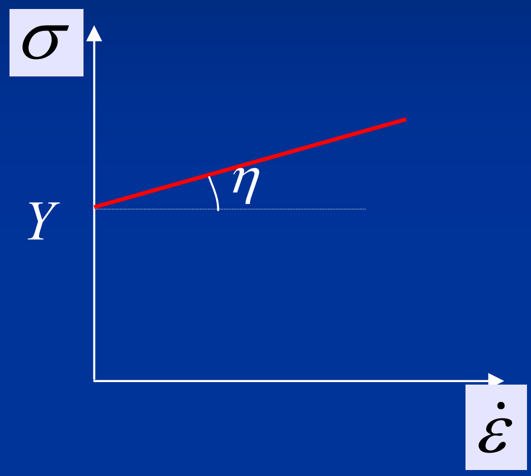
$$\sigma \geq 0:$$

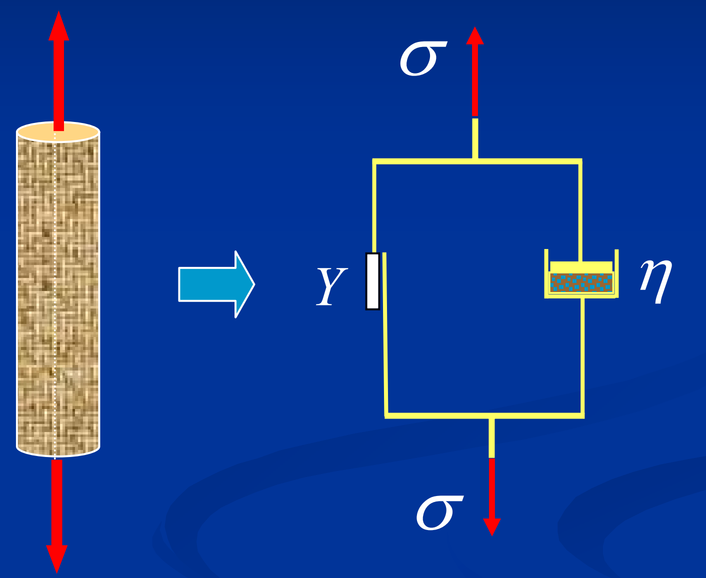
$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \text{ se } \sigma < \mathrm{Y} \text{ ou se } \sigma = \mathrm{Y} \text{ e } \dot{\sigma} < 0 \\ \dot{\Lambda} f(\sigma) \text{ se } \sigma = Y \text{ e } \dot{\sigma} = 0 \end{cases}$$

$\dot{\Lambda}$ = fator positivo e indeterminado

MATERIAL VISCOPLÁSTICO LINEAR

Modelo de Bingham





Regra de escoamento:

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \ \ \text{se}\ \sigma < \text{Y} \\ \dfrac{\sigma - Y}{\eta} \ \ \text{se}\ \sigma \geq Y \end{cases}$$

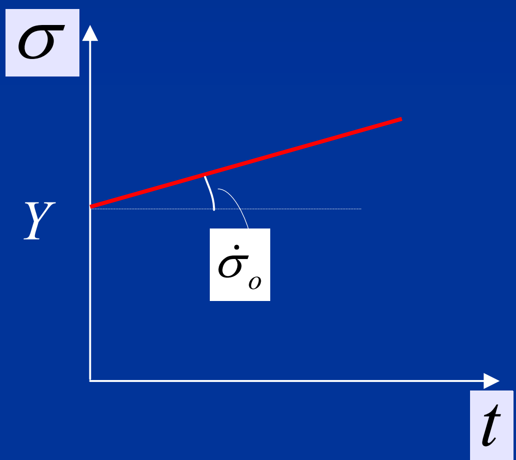
Observação:

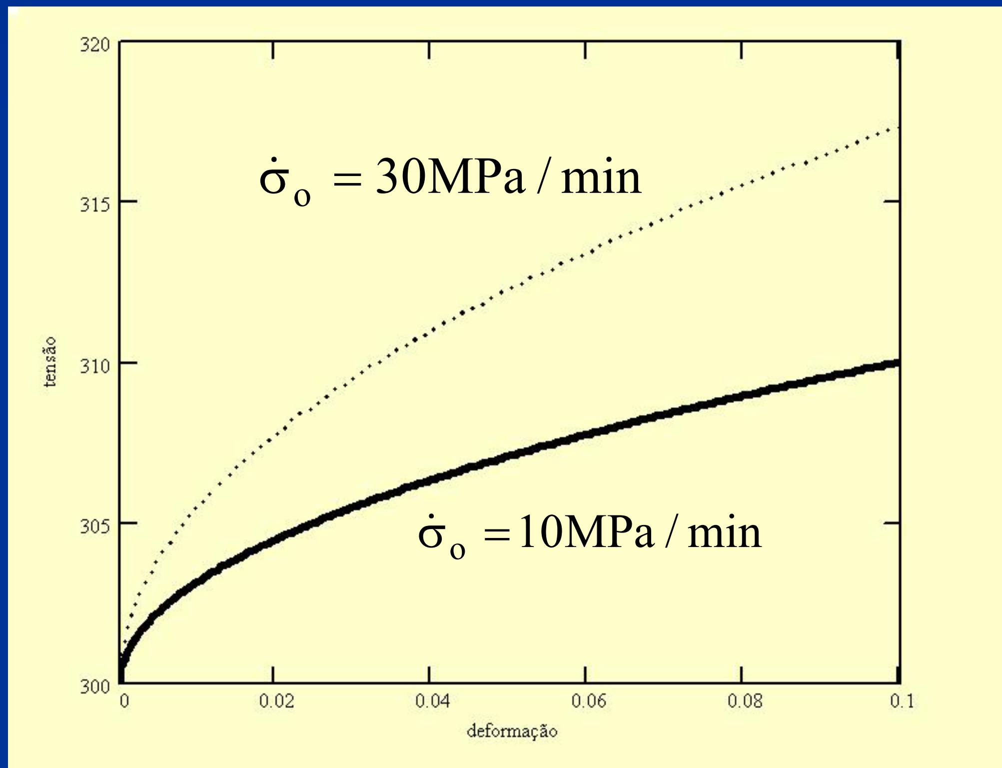
Enquanto não houver deslizamento no elemento de atrito, a tensão no Amortecedor é nula.

Aplicação. Deduzir a relação tensão – deformação de um material viscoplástico linear de Bingham submetido a uma tensão uniaxial dada por

$$\sigma = Y \text{ em } t = 0^{+}$$

$$\sigma = Y + \dot{\sigma}_o t \text{ para } t > 0$$





$$\sigma = Y + \sqrt{2\eta\dot{\sigma}_o}\sqrt{\varepsilon}$$